

SOBRE UN PRETENDIDO METODO DE CROSS A

Por CARLOS LORENTE DE NÓ,
Ingeniero de Caminos.

El Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos D. José López Rodríguez, ha publicado la primera parte de una obra titulada "Breve introducción al método de Cross A, para el cálculo de estructuras reticulares planas. Cuaderno primero. Los giros sin traslaciones de los nudos".

Fueron varios los compañeros que se acercaron a la Redacción de esta REVISTA solicitando la publicación de algún artículo, con el fin de discutir y hacer ver los errores que en el citado libro decían encontrar. No accedimos a ello en atención exclusiva al Sr. López Rodríguez.

Con alguna anterioridad, el mismo citado Ingeniero Sr. López Rodríguez nos había hecho entrega, con el ruego de que se publicara en esta REVISTA, de un artículo, concordante con el contenido del libro en cuestión, titulado: "Presunta sorpresa tocante al grado de libertad de las estructuras reticulares".

Pensamos que si este artículo era publicado ya no era posible seguir negando las columnas de la REVISTA a los compañeros que deseaban escribir sobre las tesis expuestas por el Sr. López Rodríguez.

Deseosos de evitar esta controversia, de la que pudiera no salir favorecido el Sr. López Rodríguez, escribió la Dirección de esta REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS carta que, a la letra, dice así:

"Mi querido amigo y respetado Jefe:

Hemos estado estudiando la cuestión de la publicación en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS del artículo que nos remitió usted últimamente.

El tema tratado en este artículo es muy semejante al desarrollado en el libro que usted ha publicado recientemente, también sobre el método de Cross. Esta publicación de la casa Dossat ha sido grandemente discutida y comentada por varios Ingenieros de Caminos en sentido adverso, lo que nos hace suponer que con la publicación de su artículo volveríamos a entrar en una controversia sobre su contenido, a mi entender, no conveniente bajo ningún aspecto.

Por este motivo he estimado no debe llevar a cabo la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS la publicación de su artículo. Esto no quiere decir que para cualquier otro trabajo suyo, que no afecte al método de Cross, no estemos muy honrados en darle nuestra mejor acogida.

Aprovecho la ocasión para saludarle con el mayor afecto y respeto, Luis Martín de Vidales."

Esta carta, que estimamos totalmente correcta, ha sido contestada por el Sr. López Rodríguez con la publicación de un folleto que está repartiendo profusamente y cuyo contenido será juzgado debidamente por cada uno de los compañeros que lo lean.

Sin embargo y precisamente porque el citado folleto nos hace ver que hemos sido mal interpretados por el Sr. López Rodríguez, hemos decidido cambiar de criterio y publicamos a continuación un artículo de D. Carlos Lorente de Nó que enjuicia y discute el contenido de ese Método de Cross A, sin más que desarrollar las advertencias ya por él formuladas desde estas columnas hace años.

Y al Sr. López Rodríguez le hacemos saber, por medio de estos renglones, que si nos envía nuevamente el artículo cuya devolución ha motivado su enojo, no tendremos inconveniente, después de lo que antecede, en proceder a su publicación.

Antecedentes.

Recordarán los lectores de la REVISTA un artículo que con el ambicioso título de *Compases de la marcha triunfal de mi método de Cross A* publicó, en el número de julio del año 1953, el Ingeniero de Caminos D. José López Rodríguez.

De las muchas afirmaciones y juicios que componían esos *Compases* interesa destacar, para ceñirnos al tema, sus afirmaciones de que el método de Cross es una *cosa a medio hacer*, de que "el método de Cross, en cuanto a las estructuras reticulares planas está tan sólo comenzado y pendiente de una decorosa terminación" y el anuncio de su método de Cross A, "el que confío no tardará en ser conocido, perfectamente explicado y convenientemente empleado por todos".

La confianza en el resultado de sus investigaciones era terminante: "Yo me permito afirmar... que por

lo respectivo al cálculo de estructuras reticulares, no existe ni existirá método directo o de aproximaciones sucesivas, clásico o moderno, que pueda aventajar en claridad y sencillez al método de Cross A".

Quizás recuerde el lector que en estos *Compases* triunfales condicionaba el Sr. López Rodríguez la pública presentación de su Método de Cross A a la previa resolución por el autor de estas líneas del siguiente problema:

Dada la estructura de la figura 1.^a, determinar los cuatro valores de la relación $M_2 : M_1$ para que:

- a) Que resulte nula la traslación del nudo I.
- b) Que sea nulo el giro en el nudo I.
- c) Que el giro en R debido a M_1 sea idéntico al giro en el mismo nudo debido a M_2 ; y
- d) Que los giros en B y en Q, puntos de aplicación de los pares actuantes sean iguales.

Al hacer la presentación del problema, afirmaba

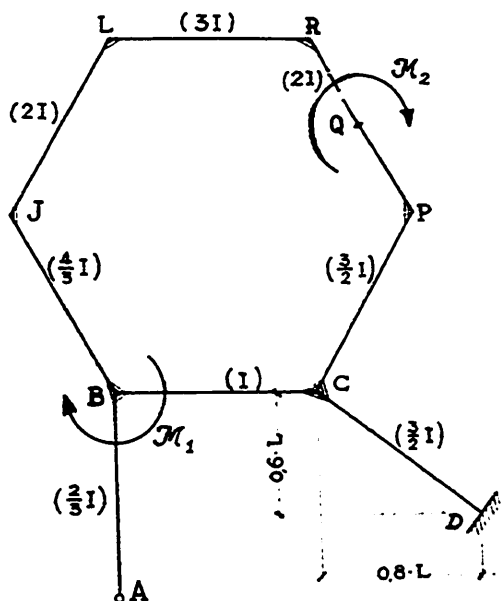


Fig. 1.ª — La estructura del problema planteado.

el Sr. López Rodríguez que la estructura en cuestión es de dos grados de libertad, afirmación que creía demostrar diciendo: "efectivamente, si por fuerzas (o pares flectores, que tanto da) aplicadas en los nudos /

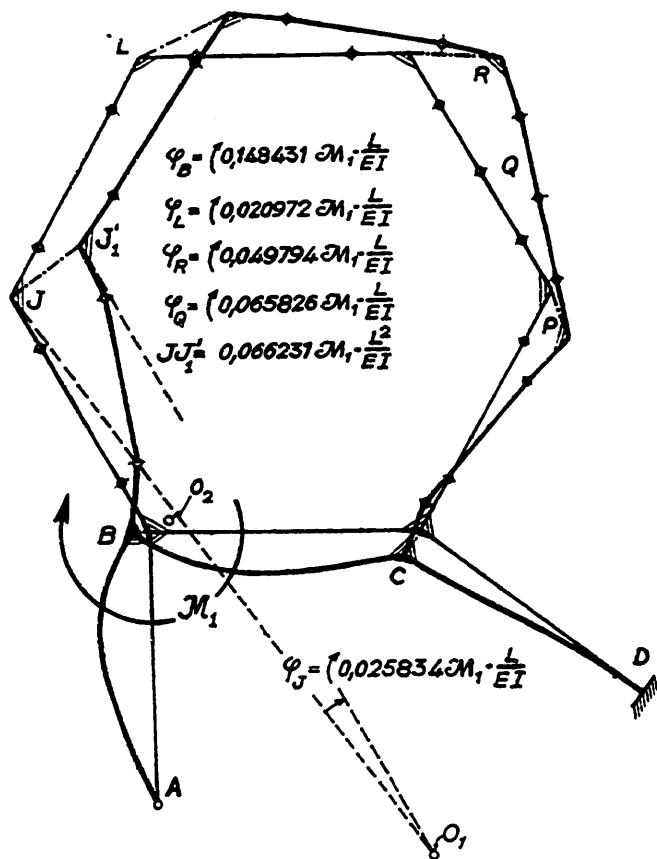


Fig. 2.^a — Deformaciones producidas por la aplicación de un par $\mathcal{M}_1$ en el nudo B .

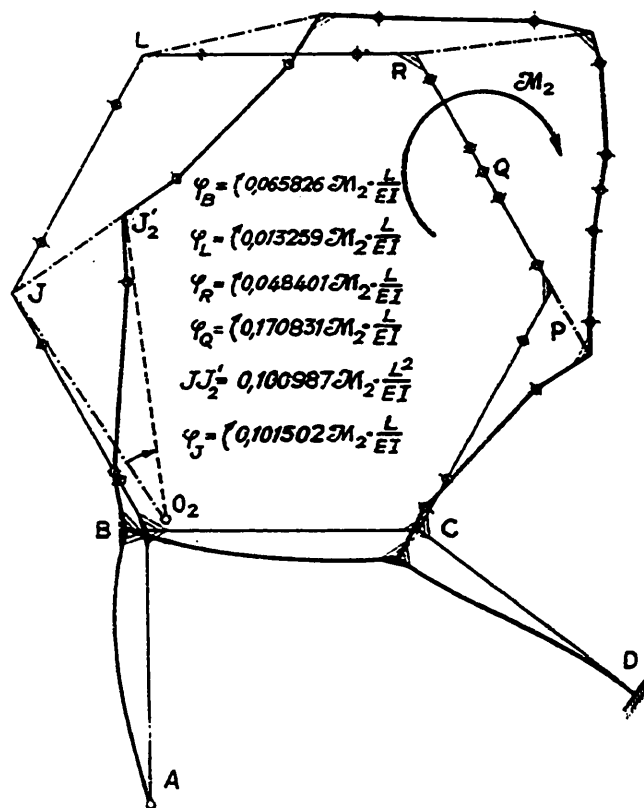


Fig. 3.^a — Deformaciones producidas por la aplicación de un par M_x en el punto medio Q de la barra KP .

y R de esa estructura impedimos las traslaciones de dichos nudos, no las habrá tampoco en los restantes (es decir, en los nudos B , L , P y C), al no tener en cuenta las deformaciones por compresión".

Bastaba una lectura atenta de estas líneas, o fijarse en la primera de las preguntas del problema, para sacar la penosa conclusión de que el pretendido método de Cross A iba a ser el resultado de errores de concepto, tanto de mecánica elástica como de mecánica racional, graves y básicos.

E innecesaria, por tanto, ninguna réplica a los muchos juicios y críticas, algunas personales, que componían los *Compases*, lo que hubiese dado a la contestación una apariencia de discusión polémica: bastaba esperar a la presentación del pretendido método para que, sin duda ni apelación, sentenciase el lector que tales juicios y críticas están tan desprovistas de fundamento como el propio Método A.

Fué el consejo de los más el de que me limitase a una escueta y rápida solución del problema que públicamente se me había planteado. Así lo hice en cuanto a la rapidez, pero, y ruego con verdadero interés a los compañeros que lo comprueben, no pude por menos de dar, junto con la resolución del problema, toda una serie de indicaciones que debían permitir al Sr. López Rodríguez caer en la cuenta de sus errores.

Incluía la contestación la representación, figuras 2.^a y 3.^a, de las dos deformadas de la estruc-

tura correspondientes a la aplicación de los pares $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, lo que era tanto como entregar al Sr. López Rodríguez los ensayos en modelo de su estructura (1). A la vista quedaba que el comportamiento de los nudos B y C de la célula inferior es bien distinto del de los nudos J, L, R, P de la polygonal superior; el nudo C ha de trasladarse siempre según la normal a su barra CD, y el nudo B, siempre también según la normal a la barra AB, en tanto que las traslaciones de los nudos J, L, R y P pueden tener lugar según una orientación cualquiera.

Sobre el nudo J, en particular, se le hacía notar que poseía los tres grados de libertad de un punto y ser dos las acciones necesarias para definir su traslación.

En la explicación del método de cálculo utilizado se señalaban bien explícitamente las tan especiales condiciones que a las estructuras impone la hipótesis previa de no existir deformaciones por esfuerzo normal ni tangencial.

Finalmente, y para que no se dudase de la resolución alcanzada por dicho método, hacía constar que los resultados obtenidos por el estudio directo de las deformaciones, habían sido después comprobados partiendo de los diagramas de momentos flectores. En las figuras 4.^a y 5.^a quedan reproducidos estos diagramas, así como todas las operaciones de su total comprobación.

De haber sido atendida cualquiera de estas indicaciones, el Sr. López Rodríguez hubiera podido subsanar a tiempo la falsedad de las premisas sobre las que apoya su método de Cross A.

El pretendido método.

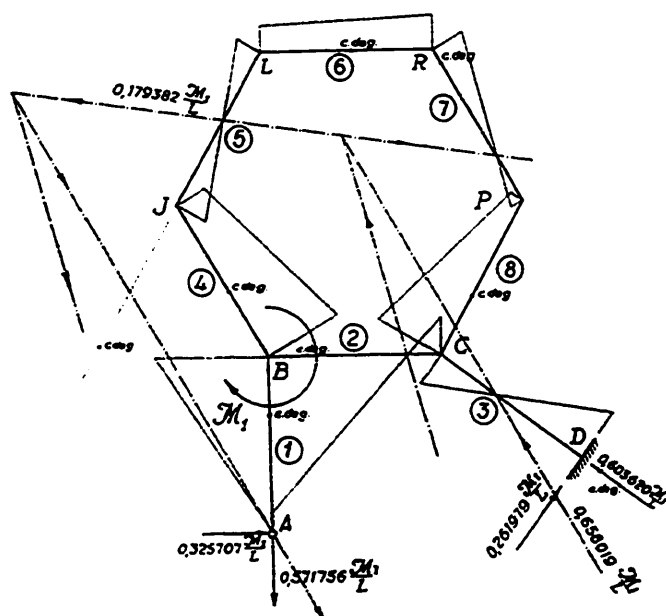
En el mes de junio ha aparecido en librerías el cuaderno primero (2) de la exposición de este método. Reitera su autor, en su primer capítulo, su manifestación de que el método de Cross que conocemos es *cosa a medio hacer* y que sale su libro "animado por el ambicioso intento de dar fe de la existencia del método de Cross A, mediante la exposición al efecto de algunos de sus elementos y peculiaridades más esenciales".

Ambición y fe que resultan más patentes en las siguientes líneas: "Confiadamente espera por todo el autor que, lo mismo el estudioso que el lector menos aplicado, sin ostensible resistencia, se dejarán acaso llevar y convenir por las razones (que cree le asisten) integrantes de su contenido; hasta sospecha si quizá más motivada, competente y entusiastamente que él, lleguen unos y otros lectores a la formal proclamación de la existencia del método

(1) Las deformaciones representadas corresponden a un valor de los pares $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 5 \frac{EI}{L}$.

(2) "Breve introducción al Método de Cross A, para el cálculo de estructuras reticulares planas". Ordenada por José López Rodríguez, Ingeniero de Caminos. Cuaderno primero. "Los giros, sin traslaciones de los nudos". Editorial Dossat. Madrid, 1956.

$$\begin{aligned} M_{B-1} &= 0,325707 \cdot \mathcal{M}_1; M_{B-2} = 0,093032 \cdot \mathcal{M}_1; M_{B-3} = 0,041519 \cdot \mathcal{M}_1; M_{B-4} = 0,102537 \cdot \mathcal{M}_1 \\ M_{B-5} &= 0,440399 \cdot \mathcal{M}_2; M_{B-6} = 0,073587 \cdot \mathcal{M}_2; M_{B-7} = 0,208137 \cdot \mathcal{M}_2; M_{B-8} = 0,159442 \cdot \mathcal{M}_2 \\ M_{B-9} &= 0,233894 \cdot \mathcal{M}_1; M_{B-10} = 0,099343 \cdot \mathcal{M}_1; M_{B-11} = 0,105600 \cdot \mathcal{M}_1 \end{aligned}$$



Barras	Áreas reducidas (radiantes)	Coordenadas del C.de G. (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a x-y (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a x-x (metros)
CB	0,167399 $\frac{ML}{EI}$	0,228196 $\cdot L$ 0,000000	0,038200 $\frac{ML^2}{EI}$	0,000000
BJ	-0,122597	-0,214095 0,370822	0,026247	-0,045462
JL	-0,004861	-0,964061 0,062248	0,004686	-0,000303
LR	0,028822	0,524823 1,732051	0,015126	0,049921
RP	0,014456	1,046996 1,630652	0,015135	0,023862
PC	-0,083219	1,194384 0,336683	-0,099395	-0,028018
Σ	0,000000		0,000001	0,000000
AB	0,244280	0,000000 0,666667	0,000000	0,162853
BC	-0,167399	0,228196 1,000000	-0,038200	-0,167399
CD	0,018968	2,013839 0,239621	0,038198	0,004545
Σ	0,095849		-0,000002	-0,000001

Fig. 4.^a — Comprobaciones, estática y elástica, correspondientes al caso representado en la figura 2.^a.

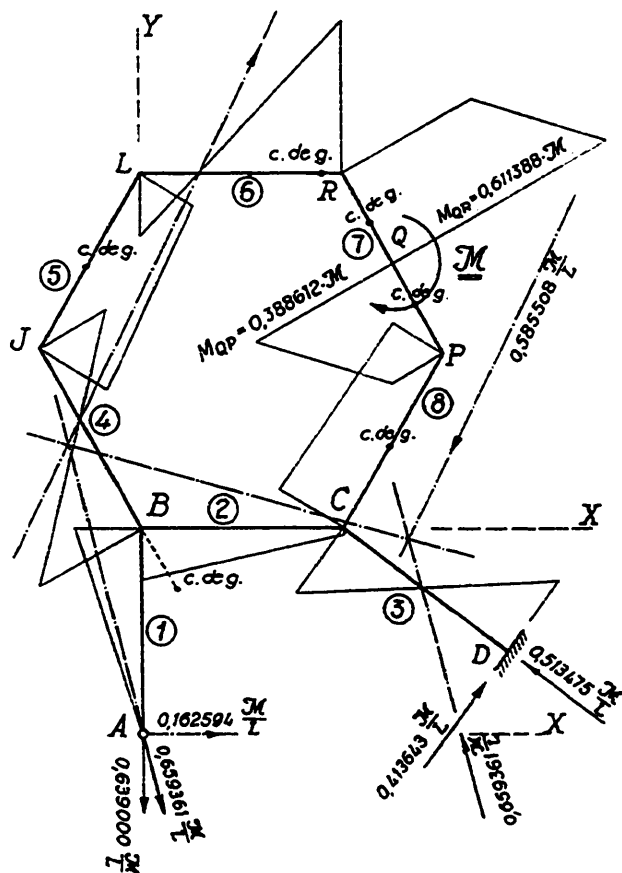
de Cross A, ensalzando con las protocolarias solemnidades de bombo y platillos, las indiscutibles excepciones de tal método."

Termina el capítulo reiterando la observación de que exclusivamente se consideran las deformaciones originadas por los momentos flectores.

$$M_{B-1} = 0,162594 \cdot \mathcal{M}; M_J = 0,195771 \cdot \mathcal{M}; M_P = 0,145273 \cdot \mathcal{M}; M_{C-3} = 0,198406 \cdot \mathcal{M};$$

$$M_{B-2} = 0,128312 \cdot \mathcal{M}; M_L = 0,157199 \cdot \mathcal{M}; M_{C-8} = 0,183844 \cdot \mathcal{M}; M_D = 0,215238 \cdot \mathcal{M};$$

$$M_{B-4} = 0,290907 \cdot \mathcal{M}; M_R = 0,368049 \cdot \mathcal{M}; M_{C-2} = 0,014561 \cdot \mathcal{M};$$



Barras	Áreas reducidas (radianes)	Coordenadas del C.d.g. (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a Y-Y (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a X-X (metros)	
CB	-0,071436	$\frac{\mathcal{M}L}{EI}$	0,367305 · L	-0,026238	$\frac{\mathcal{M}L^2}{EI}$
BJ	-0,035676	"	0,176299	-0,006290	"
JL	+0,088242	"	0,259106	-0,022864	"
LR	-0,035141	"	0,915186	-0,032161	"
RQ	-0,122429	"	1,135352	-0,139000	"
QP	+0,066735	"	1,356008	+0,090493	"
PC	+0,109706	"	1,115426	+0,136061	"
Σ	0,000001 = 0		0,416097	-0,000003 = 0	0,0
AB	-0,121945	"	0	0	-0,081297
BC	+0,071436	"	0,367305	+0,026239	+0,071436
CD	-0,005611	"	4,676648	-0,026241	+0,009861
Σ	-0,056120	"	1,00	-0,000002 = 0	0,0

Comprobación de la célula CBJLRPC
Comprobación de la célula ABCD

Fig. 5.ª — Comprobaciones, estática y elástica, correspondientes al caso representado en la figura 3.ª.

Titúlase el segundo capítulo "Búsqueda de una definición aceptable del grado de libertad de una estructura reticular plana", en el que, tras recordar "que es condición esencial de la distribución Cross de los momentos flectores la de que durante el proceso de la distribución sean rigurosamente nulas las traslaciones de los nudos", pasa a comentar que "al objeto de conseguir la efectividad de tan fundamental y obligada condición, los trata distas más conocidos entre nosotros, suelen frecuentemente recurrir al empleo de los que vienen denominando apoyos ficticios y fuerzas ficticias, con las que tales traslaciones se impiden" (1).

A continuación viene el párrafo donde se condensa el propósito que guía al autor: "No son tales ficciones en rigor, como ya veremos, cosas imprescindibles; y en este libro, dando preferencia a la realidad sobre la ficción, para impedir las traslaciones de la totalidad de los nudos de la estructura que sea, nos valdremos sola y exclusivamente de PARES FLECTORES AUXILIARES, que aplicaremos (como podremos ver y comprobar en los ejemplos que desarrollaremos en nuestro texto), en determinados nudos de cada estructura, renunciando a los apoyos y fuerzas ficticios tan en boga."

Y poco más adelante nos asegura: "Concedemos en este modesto trabajo al grado de libertad excepcional importancia; por lo que, haciéndole todos los honores, hemos de considerar, precisar y aun acicalar tal concepto, con el debido detenimiento, ... y a tales efectos vamos a pasar revista a las distintas partes de la figura 1.ª, en la que he reunido un *enjambre* de variadas estructuras, examinándolas una por una y haciendo tal cual sencillo comentario, con lo que me parece que la búsqueda y establecimiento de una aceptable definición del grado de libertad habrán de resultar satisfactoriamente documentados, explicados, justificados y formulados, aun para los más descontentadizos, puristas o implacablemente exigentes."

No es menester seguir estas documentadas explicaciones, justificaciones, etc., etc. Basta con reproducir la figura del citado *enjambre* (fig. 6.ª) y anotar al pie de la misma el grado de libertad que el Sr. López Rodríguez asigna a cada una de ellas. Dice son de un grado de libertad las estructuras *b)*, *b')*, *b'')* y *b''')*. De dos grados de libertad las estructuras *c)*, *c')* y *c'')*. De tres grados las *d)*, *d')* y *d'')*. Y de grado de libertad cuatro las *e)* y *e')*.

No solamente el estudioso, sino también el lector menos aplicado, en cuyos entusiásticos aplausos confiaba el autor del Método de Cross *A*, preferirán, vista la figura, cerrar el libro y renunciar a oír tales documentadas explicaciones, etc.

* * *

(1) Lo que no recoge, a pesar de ser ello un extremo fundamental, es que todos esos tratadistas ponen buen cuidado en precisar que el *apoyo ficticio* es un *apoyo deslizando*, y que algunos, más reiterativos, y perdonen me cite, insistimos en decir que lo que aplicamos es "una biela, o lo que es lo mismo, un apoyo deslizando, o dicho de otro modo, una fuerza". Y con ello hecho patente que tan sólo imponemos una y no dos limitaciones a la traslación del nudo.

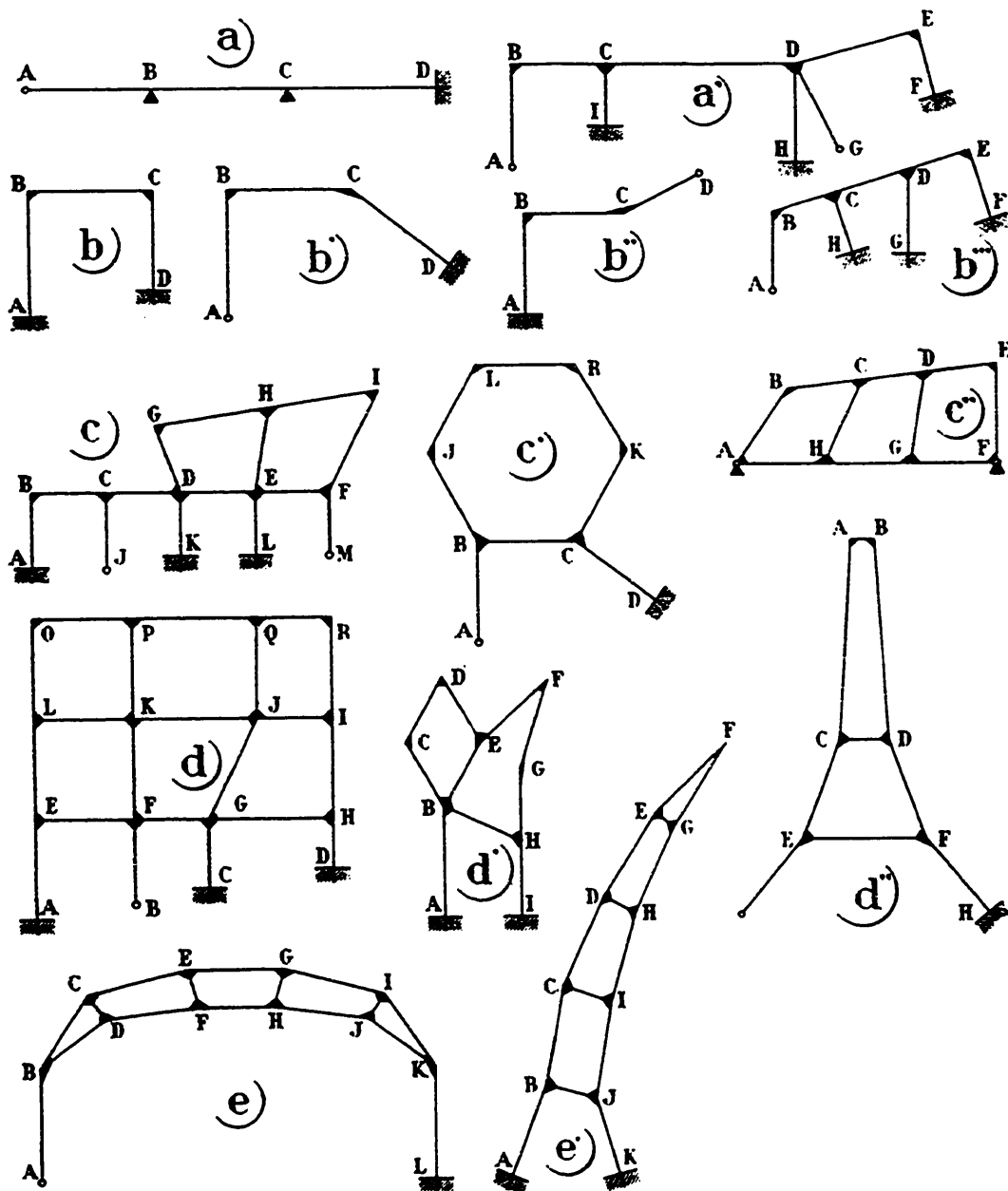


Fig. 6.^a — Para el Sr. López Rodríguez, todas las estructuras *c)* son de dos grados de libertad; todas las *d)* son de tres grados y de cuatro grados de libertad las estructuras *e)*.

Para cualquier lector de la REVISTA es de dos grados de libertad la estructura c), pero no es de dos, sino de cuarto grado la c'), y de tercero la c'') en cuanto se piense que uno de los apoyos de esta viga Vierendeel es forzosamente deslizante. Tienen tres grados de libertad las estructuras d) y d''), pero es, en cambio, de cuarto la d'). Es, efectivamente, de cuarto grado la c'), pero tiene cinco grados de libertad la c). ¿Cómo es posible haya llegado su autor a tan inexactas estimaciones del grado de libertad de las estructuras?

Partiendo de un grave y fundamental error:

Veamos lo que dice de la estructura c'): "si mediante un par auxiliar aplicado en J fijamos este nudo, por estarlo el A, quedará también fijo (o imposibilitado para traslaciones) el B; y al estar éste fijo, lo estará el C. Será suficiente aplicar un segundo par flector en R, que impida las traslaciones de este nudo, para que resulten fijos los nudos L y K, al estarlos los J, C y R. Este número mínimo de dos pares flectores auxiliares acredita que la estructura c) de la figura 1.ª es de grado 2" (1).

Si el lector compara este párrafo con el que figuraba en el artículo titulado *Compases de la marcha*

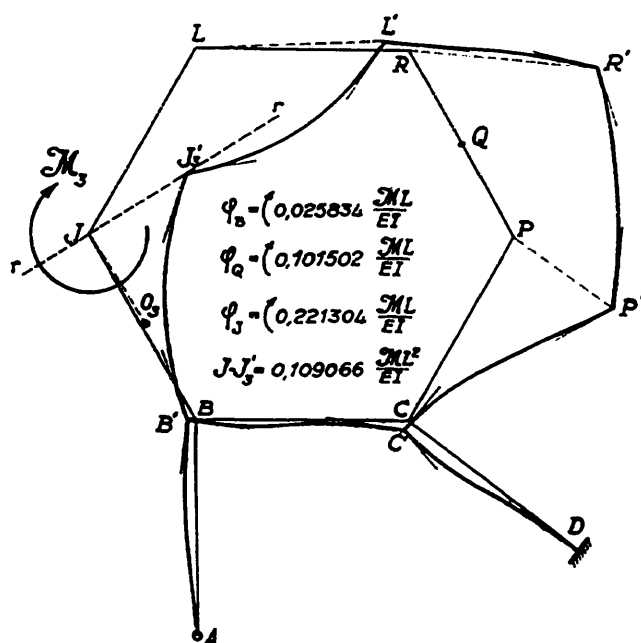


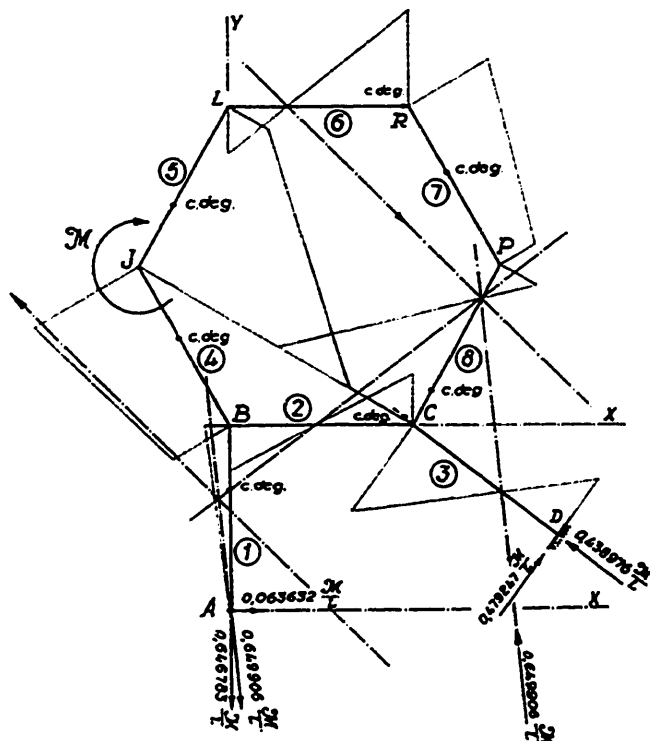
Fig. 7.ª — Esto es lo que sucede cuando se aplica un par en el nudo J. (Para esta figura y para las anteriores figuras 2.ª y 3.ª, se ha tomado como valor $M_1 = M_2 = M_3 = \frac{5EI}{L}$).

(1) Aun dentro de lo inexacto de este razonamiento, sorprende ver cómo su autor lo ha aplicado tan arbitrariamente a sus estructuras. Lógicamente debiera haber clasificado la estructura c) como de un solo grado de libertad, pues la aplicación de un par en J, que, según él inmoviliza este punto, acarrea la inmovilización de F y, por tanto, la de todos los restantes.

La estructura c') debiera haberla clasificado como de dos grados, pues a él le basta aplicar un par en C para inmovilizar B, J e I, y otro par en E para inmovilizar todos los restantes nudos, etc., etc.

triumfal de mi método de Cross A, y que hemos dejado transcrito en los "Antecedentes", verá que en

$$\begin{aligned}
 M_{B-1} &= 0,063632 M_3; M_{J-2} = 0,335531 M_3; M_{R-3} = 0,260639 M_3; M_{C-4} = 0,137040 M_3 \\
 M_{B-2} &= 0,122091 \dots; M_{J-3} = 0,664469 \dots; M_{R-4} = 0,110832 \dots; M_{C-5} = 0,289586 \dots \\
 M_{B-4} &= 0,185723 \dots; M_{C-6} = 0,127011 \dots; M_{C-7} = 0,426626 \dots; M_{D-8} = 0,189561 \dots
 \end{aligned}$$



Barras	Áreas reducidas (radianes)	Coordenadas del C.deg. (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a y-y (metros)	Momentos estáticos de las áreas respecto a x-x (metros)
CB	-0,007475 $\frac{MJ}{EI}$	3,389016 · L 0,000000	-0,025332 $\frac{MJ^2}{EI}$	0,000000
BJ	0,195470 "	-0,273950 0,474495	-0,053549 "	0,092750
JL	-0,197870 "	-0,306588 1,201025	0,060665 "	-0,237647
LR	0,022271 "	0,983494 1,732051	0,021904 "	0,038575
RP	0,092868 "	1,216393 1,357247	0,112964 "	0,126045
PC	-0,105265 "	1,108173 0,187361	-0,116651 "	-0,019722
Σ	-0,000001 = 0		0,000001 = 0	0,000001
AB	0,047724 "	0,000000 0,666667	0,000000 "	0,031816
BC	0,007475 "	3,389016 1,000000	0,025332 "	0,007475
CD	-0,033308 "	0,760522 1,179608	-0,025332 "	-0,039291
Σ	0,021891		0,000000	0,000000

Fig. 8.ª — Diagrama de momentos flectores, reacciones y curva de presiones para estructura solicitada por un par aplicado en el nudo J. Y su comprobación elástica.

vano han pasado tres años y que han resultado inútiles todas las indicaciones que le fueron hechas al resolver el problema que en aquel artículo nos fuera planteado.

Ocioso, por inútil, resultaría repetir las indicaciones allí dadas y no comprendidas. Y necesario es señalar de otro modo el error.

El Sr. López Rodríguez concede a la acción de sus pares sobre los puntos de sus estructuras la facultad, taumatúrgica, de fijarlos.

El Ingeniero Sr. López Rodríguez nunca debiera haber olvidado que la aplicación de un par sobre un punto de una estructura hace sufrir a dicho punto una rotación instantánea alrededor del centro O , de su elipse elástica.

Cuando se aplica un par en el punto J de esa estructura c' , las cosas suceden tal y como indicamos en la adjunta figura 7.^a (1). El punto J no queda fijo; lo único que queda es obligado a trasladarse según la dirección rJr normal al radio JO_a . El efecto del par es idéntico al logrado por un apoyo que deslizase sobre la recta rr , o lo que es lo mismo, al logrado por una biela orientada según la recta JO_a , es decir, es tan sólo el de la limitación de uno de los dos grados de libertad de traslación de dicho punto J .

Vea el Sr. López Rodríguez cómo no difiere en nada la acción de un par de la acción de un apoyo deslizante ficticio o de la aplicación de la fuerza ficticia que desde hace medio siglo venían haciendo los tratadistas. Tan sólo difiere en que éstos, avezados en cálculo de estructuras, no solamente rehuyen el empleo de pares, sino que adoptan en cada caso como orientación del apoyo o como dirección de la fuerza, la más conveniente para facilitar la posterior deducción del valor de la reacción o fuerza ficticias.

El caso particular en el que la acción del par no llega a producir la traslación del punto, por coincidir con el propio punto el centro de su elipse elástica, es prácticamente inexistente y limitado tan sólo a casos muy especiales: por ejemplo, las articulaciones fijas.

Tan inverosímil es esto como la coincidencia de que las acciones a que estuviese sometida la estructura de la figura 1.^a fuesen tales que provocasen en el punto J una traslación que *precisamente* tuviera lugar según rJr , único caso en que el par aplicado por el Sr. López Rodríguez podría llegar a anular tal traslación (2). * * *

(1) Y en la figura 8.^a reproducimos los diagramas de momentos flectores y de reacciones y todas las operaciones numéricas que comprueban en una y otra célula de la estructura, la total exactitud de la solución dada en la figura 7.^a.

(2) Pero aún más improbable es que el autor del Cross I llegase a alcanzar la solución elástica del problema por superposición de un diagrama Cross de nudos inmóviles y dos *solos* diagramas traslacionales. Le quedan otras dos posibilidades de movilidad, es decir, dos infinitudes de probable error: al superponer estos tres diagramas no recons-

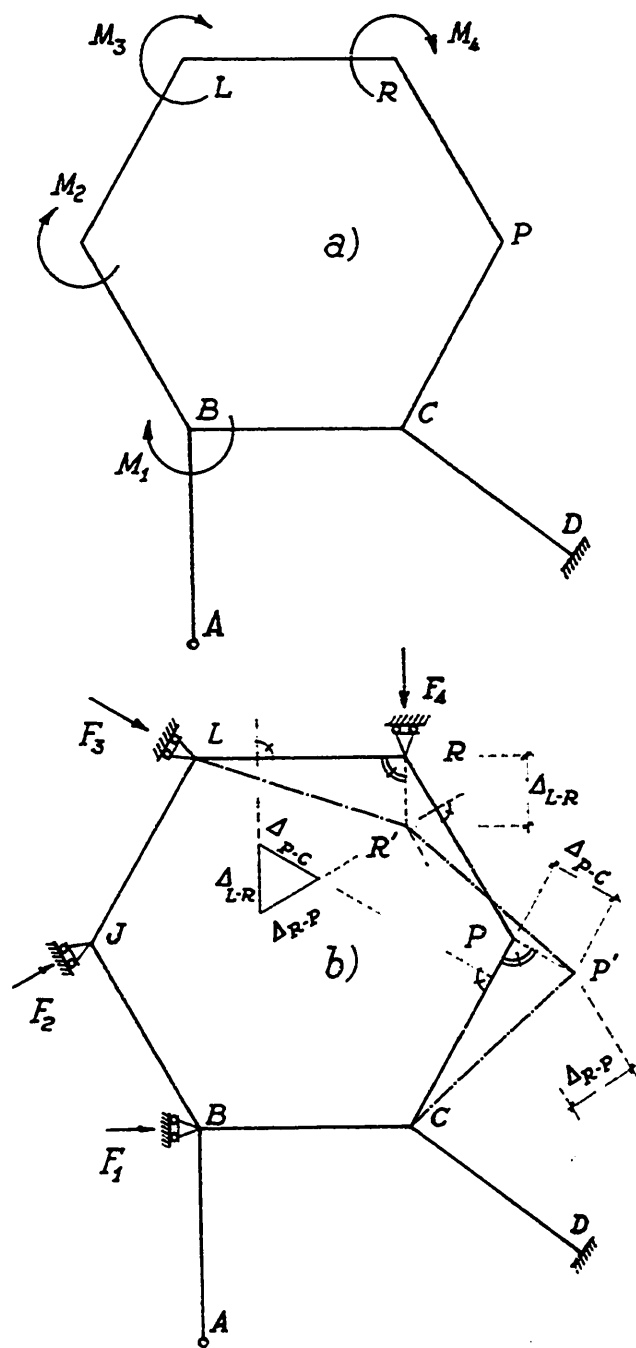


Fig. 9.^a — Cuatro obstáculos simples impiden la traslación de la totalidad de los nudos de esta estructura. (La supresión de uno cualquiera de ellos nos conduce a estructuras de un sólo grado de libertad.)

truye la estructura primitiva, sino que, sin saberlo, llega a una estructura de igual aspecto que la de la fig. 1.^a pero que tiene aplicados en dos de sus nudos unos apoyos deslizantes, y al ignorar su presencia y no tomar en cuenta las reacciones que ellos ejercen, le resultarán elásticamente falsos cuantos diagramas estáticos obtenga (por mucho que haya cuidado de hacer las comprobaciones de equilibrio de nudos y de barras).

Hemos dejado para después de esta puesta en claro de la cuestión el comentar la definición que, en la página 14 del libro que comentamos, al final del examen del *enjambre* de estructuras, formula el Sr. López Rodríguez, y que es la siguiente: "Entendamos por *grado de libertad* de una estructura reticular plana cualquiera, el número mínimo de nudos de la misma, a los que, aplicados *pares flectores auxiliares*, basten para impedir las traslaciones de la totalidad de los nudos de la estructura de que se trate."

Pues bien, es de notar que esta definición, que en manos de su autor conduce a tan dispares y erróneos resultados, es, en manos de cualquier otro, una definición correcta. Tanto da, desde un punto de vista teórico, como ya hemos visto, coartar los movimientos de los nudos mediante pares como coartarlos mediante apoyos deslizantes o fuerzas. (Los cuatro grados de libertad de esa estructura *c'*), igualmente pueden ser anulados por los cuatro pares de la figura 9.^a-a) como por las cuatro deslizaderas de la figura 9.^a-b.) En la práctica resolutive, este procedimiento de apoyos deslizantes o fuerzas ficticias presenta ventajas decisivas sobre el de aplicación de pares, como luego, con más detalle, comentamos.

Hay al pie de esa página 14 una nota que por un momento hace pensar que el autor ha caído en cuenta de que algo hay que no es correcto. Dice la nota: "N. del A. — Es totalmente correcta la definición de grado de libertad dada; pero hay alguna incorrección en lo que antecede a su establecimiento, que cumplidamente podrá desvanecerse en el segundo cuaderno."

Pero la incorrección que encuentra, y que promete desvanecer, debe ser muy accesoria (quizá la arbitrariedad con que, a su modo, aplica la definición a las diversas estructuras y que anteriormente hemos comentado), pues más adelante, en el capítulo IV, titulado "Sucinta exposición del camino a seguir para la distribución Cross de los momentos flectores", adopta para auxilio gráfico de dicha exposición la *grúa titán* de la figura 10. Y a esta estructura la define, tanto

en la página 28 como en las 38 y 39, como de *grado de libertad* 4, y sigue hablándonos de inmovilizar los nudos mediante la aplicación de pares en los mismos, es decir, manteniéndose en el mismo error ya visible en aquellos *Compases de la Marcha Triunfal*.

La estructura de la tal grúa titán tiene, para los demás, seis grados de libertad.

(Los aficionados al Cross encontrarán, en esta página 39 y siguientes, juicios nada ortodoxos sobre el método de Cross, de los que, y con razón, disenterán. No es menester irlos enumerando, pues la estrecha visión que el autor del método *A* tiene del Método de Cross, queda bien de manifiesto en el siguiente párrafo, en el que completa el detalle de las cargas que aplica a la *grúa titán*: "Para que nada falte, hay otro peso aislado (P_2) aplicado en el nudo Q; y debo declarar que mis preferencias por los pares flectores auxiliares relativamente a las *fuerzas ficticias*, para impedir las traslaciones de los nudos de las estructuras reticulares, derivan, en parte, de la *necesidad de tener algo que distribuir*; ¿qué puede dar que distribuir, de sí por sí, el peso P_2 ?"

No es necesario que hagamos comentario alguno, pues los hará, y sabrosos, el lector. Tan candorosa pregunta descubre, por otra parte, el origen y la inviolabilidad del pretendido método *A*.)

Los métodos particulares de cálculo de estructuras.

Aún más que el mismo error, lo que en este caso extraña es su contumacia, y ésta solamente resulta explicable por haber operado dicho autor con estructuras de un solo grado de movilidad, en las que efectivamente, la aplicación de una sola acción basta para anular las traslaciones de los nudos. El suponer que lo que es válido y cierto para estas estructuras ha de seguir siéndolo en las de mayor grado de movilidad, ha sido probablemente lo que le ha llevado a desoir las indicaciones que le fueron hechas.

Para mejor apartar por nuestra parte los peligros que toda generalización encierra, volvamos de nuevo sobre la indicación, al principio apuntada, de las condiciones tan especiales que imponemos a las estructuras al no atribuirles otra deformabilidad elástica que la de los giros elementales debidos a la acción de los momentos flectores: en cada elemento de longitud ds no hay más deformación elástica que el giro relativo entre sus caras de valor

$$d\theta = M_x^I \cdot \frac{ds}{EI}$$

alrededor del centro de gravedad de estas secciones. En cuanto a los esfuerzos normales y a los tangenciales, la materia de estas estructuras se comporta como el sólido rígido de la mecánica racional.

Pues bien, esta hipótesis de la indeformabilidad frente a dichos dos esfuerzos, hipótesis frecuente en

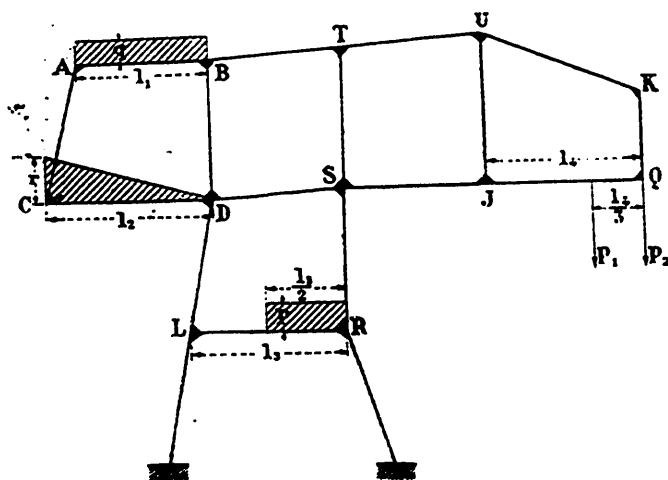


Fig. 10. — Grúa Titán, definida por su autor como de cuatro grados de libertad.

muchos problemas elásticos, no se reduce en este caso a la introducción de una mera licencia tendente a la simplificación de los cálculos, sino que, por el contrario, es la hipótesis básica complementaria de la que depende la validez de todos los métodos particulares de cálculo de estructuras (método de Cross, método de los puntos fijos, método de las deformaciones, etc., etc.).

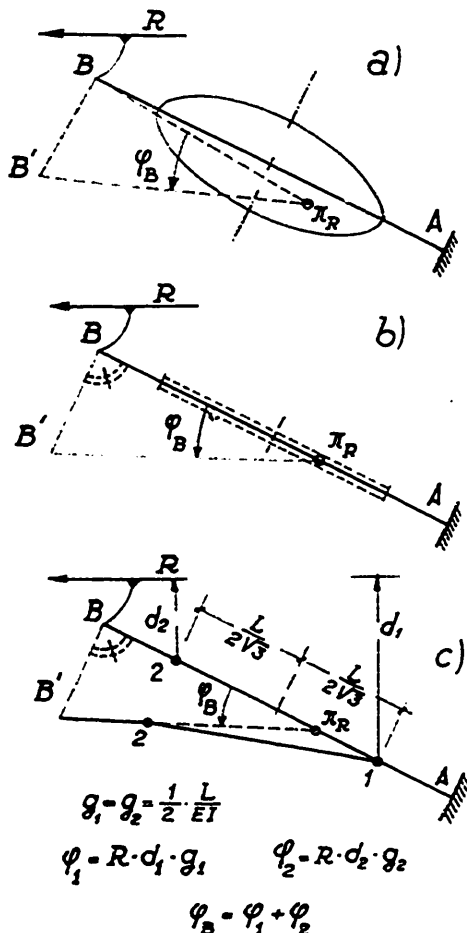


Fig. 11. — Variación de la movilidad del extremo B según cambian las propiedades elásticas del material de la pieza.

Creemos haber desarrollado con claridad este tema en esta misma REVISTA (artículos del mes de octubre de 1953 y siguientes) (1), y hecho notar cómo de la simple consideración de esta tan particular deformabilidad se deducen las expresiones de giro de nudo y giro de barra, es decir, las expresiones de Mohr (que cincuenta años después nos volverían bajo el nombre de *slope deflection method*), y con ellas el concepto de "grado de movilidad" de las estructuras y la posibilidad del conocimiento previo de las relaciones entre recorridos de los nudos.

(1) Recogidos posteriormente en forma de libro. Editorial Dossat. "Los métodos directos (y los métodos de aproximaciones sucesivas) de cálculo de estructuras". Madrid, 1954.

No es menester reproducir aquí todo ello, pues basta la adjunta figura 11 para llegar, *cualitativamente*, a iguales conclusiones.

Si los elementos del trozo AB de la figura 11-a) fuesen también susceptibles de deformarse bajo el efecto de fuerzas axiales, el movimiento del punto B al ser solicitado por una acción R, será un giro instantáneo alrededor del antipolo π_R , y el punto B efectuará, por tanto, un recorrido BB' según la normal a $\pi_R B$. Variando la orientación, o la posición de la sollicitación, nos irá variando el valor del giro y la dirección y magnitud de su recorrido BB'. Es decir, el punto B tiene, *a priori*, los tres grados de libertad de un punto. (Sólo un estudio elástico nos podrá informar de cuál ha sido en cada caso el giro, y la dirección y la magnitud de su recorrido.) Esta total libertad que, *a priori*, tiene el punto B, la tienen igualmente todos los restantes puntos de ese trozo desde el momento en que se le ha reconocido la deformabilidad por esfuerzos axiales.

Pero si a esa misma pieza se le niega esta posibilidad de variación de su longitud, entonces, en términos de Estática Gráfica, la elipse que definía el comportamiento elástico del punto B queda degenerada a su eje mayor. Y para toda posición o dirección de la sollicitación R, el giro instantáneo tiene lugar alrededor de un punto, π_R , situado ahora sobre AB, y por tanto, la traslación BB' ha de tener lugar, *siempre*, según la normal a la barra. (Al punto B, como a todos los puntos de la pieza, no les queda, *a priori*, más que dos grados de libertad: su giro puede ser cualquiera, pero su traslación no puede tener más componente que la normal al eje de la pieza.)

Si a dicha pieza 11-b), además de negarle la posibilidad de deformación por esfuerzos axiales, le negamos la de deformarse por esfuerzos tangenciales, no quedando más deformaciones que los giros elementales producidos por los momentos flectores, pasan a ser exactas las expresiones de Mohr y toma sentido el concepto de "giro ψ de la barra" como relación entre la traslación normal $\overline{BB'}$ del extremo, a la longitud, $\overline{AB}$, de la barra.

Es más, recordemos que el comportamiento elástico del extremo B es, en este último caso, idéntico al del extremo B de la cadena A-1: 1-2: 2-B (ver figura 11-c), formada por esos tres eslabones rígidos, articulados entre sí, en 1 y 2, por unos resortes de flexibilidad al giro $g_1 = g_2 = \frac{L}{2EI}$. (Y es posible resolver cualquier problema elástico como un ejercicio de cadenas cinemáticas.)

Una estructura de un grado de movilidad como la representada por la figura 12 (que es reproducción de la figura 18 de los citados artículos), formada por barras de esta tan especial materia elástica, presenta

en su deformación la ventajosisima propiedad de que las *traslaciones normales* entre extremos de cada barra han de guardar entre si unas relaciones *geométricas* invariables. Y esto es lo que nos permite, fijado un valor Δ , para una cualquiera de estas traslaciones, saber cuáles son los valores de todas las restantes, o lo que es lo mismo, dado un valor de un "giro de barra", determinar el de todas las demás (1), conviniéndonos atribuir todas estas *traslaciones normales*, o todos estos "giros", a la acción de una incógnita fuerza F^* aplicada en un cierto nudo.

sido capaz de producir el movimiento de nudos supuesto.

Y por una regla de tres calcular cuáles son los corrimientos, y los momentos, cuando lo que aplicamos es una determinada fuerza de magnitud F .

Una estructura como la de esa figura 12, en la que, sean cuales sean las cargas que apliquemos, se ven constreñidos los nudos a moverse según direcciones fijas, y con recorridos en proporción constante, puede ser inmovilizada, para la debida aplicación del Cross, por una causa cualquiera, por o fuerza, causa

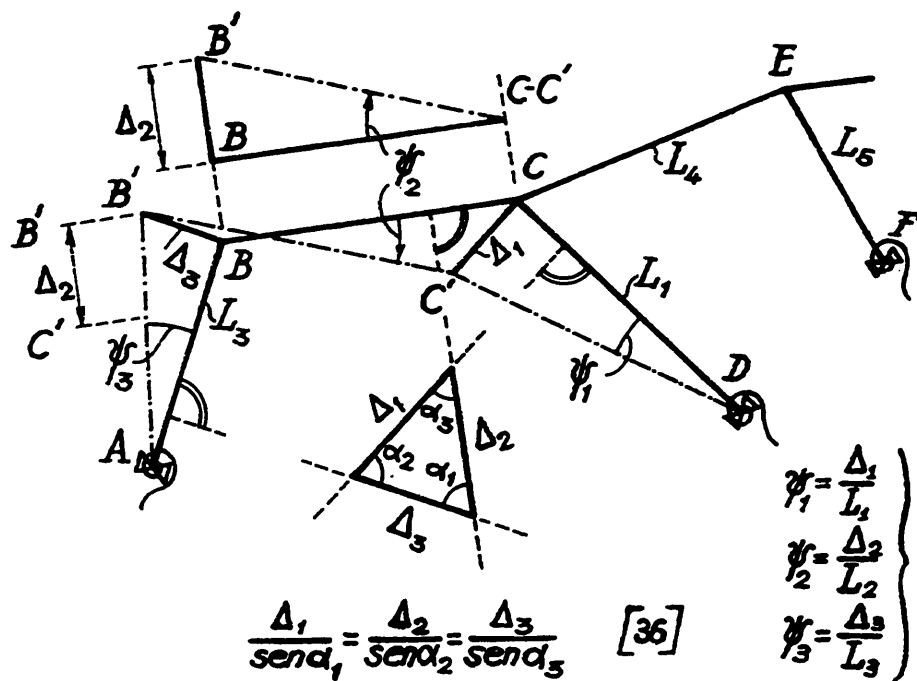


Fig. 12. -- Reproducción de la figura 18 de "Los Métodos directos de cálculo de estructuras".

Fig. 18 - Al no existir deformaciones por esfuerzos normales ni tangenciales, las tres barras de la célula A B C D (sea cualquiera la causa que actúe sobre la estructura A B C D E F... y el punto de la misma en el que esté aplicada), se deformarán de modo que las traslaciones normales relativas entre sus extremos estarán en la relación [36], constante y dependiente tan sólo de la orientación de dichas barras.

Al conocimiento del estado elástico real se llega al operar por Cross (como ya lo hacía el método de los puntos fijos), aplicando barra por barra los pares $\pm \frac{6EI}{L^2} \Delta$, con lo que conseguimos llevar paralelamente sus extremos a la posición que obligadamente han de ocupar, para después restablecer la continuidad entre barras aplicando en cada extremo pares iguales y contrarios (o dicho en la terminología crossista: aplicando en cada nudo el momento descompensado cambiado de signo). Hecha la distribución de momentos, una cualquiera de las condiciones de la estática nos da el valor de esa fuerza F^* que había

que no solamente puede estar aplicada en un nudo, sino que puede estarlo en cualquier punto de la estructura. Un sencillo caso de este tipo de estructuras es el pórtico de la figura 13. Es el pórtico estudiado por el Sr. López Rodríguez en su libro *El Método de Cross en serio y de broma*, "estudio" que le llevó a afirmar que el método de Cross es inexacto cuando hay barras oblicuas. Afirmación de la que, por cierto, no se ha desdecido, sino limitado a relegarla, como cuestión secundaria, ante el logro de su Cross A (1).

(1) O dicho en otras palabras: sabido a qué punto se ha trasladado un nudo, se sabe cuáles son los puntos a los que tienen que trasladarse todos los demás; quedando sólo por determinar los valores de los giros de los nudos.

(1) Véase su artículo "El Método de Cross y el diagrama de Williot", en el número de la REVISTA del mes de febrero de 1953. (Ya también comentamos en su día, R. O. P., abril 1953, que no comprendíamos qué tenía que hacer el diagrama de Williot en estas estructuras, en las que, por principio de partida, no cabe la deformación axial.)

Lo particular de los movimientos que estas estructuras pueden ejecutar queda de modo bien aparente y visible si, como hacemos en dicha figura 13, representamos las elipses que traducen y definen el comportamiento elástico de los nudos: son elipses degeneradas a su eje mayor, estando este eje situado sobre la barra respecto a la cual ha de verificarse siempre la traslación normal del nudo. Como en la figura hemos anotado las características de estas elipses, y las relaciones entre las tres traslaciones normales Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , es un ejercicio elemental deter-

figura 11-b); los movimientos del nuevo extremo C (figura 14-a) vienen definidos por una elipse elástica perfecta (1), y por tanto, en su deformación elástica puede trasladarse hacia cualquier dirección del plano.

Y en la figura 14-b) se esquematiza el recurso a adoptar (el mismo que empleamos en las estructuras de dos o más grados de movilidad de nudos), a fin de obligar al punto C a que sus recorridos hayan de ser traslaciones normales: introducido en B un apoyo móvil, o fuerza ficticia F, queda impedida toda traslación de este nudo y el nudo C no puede sufrir más

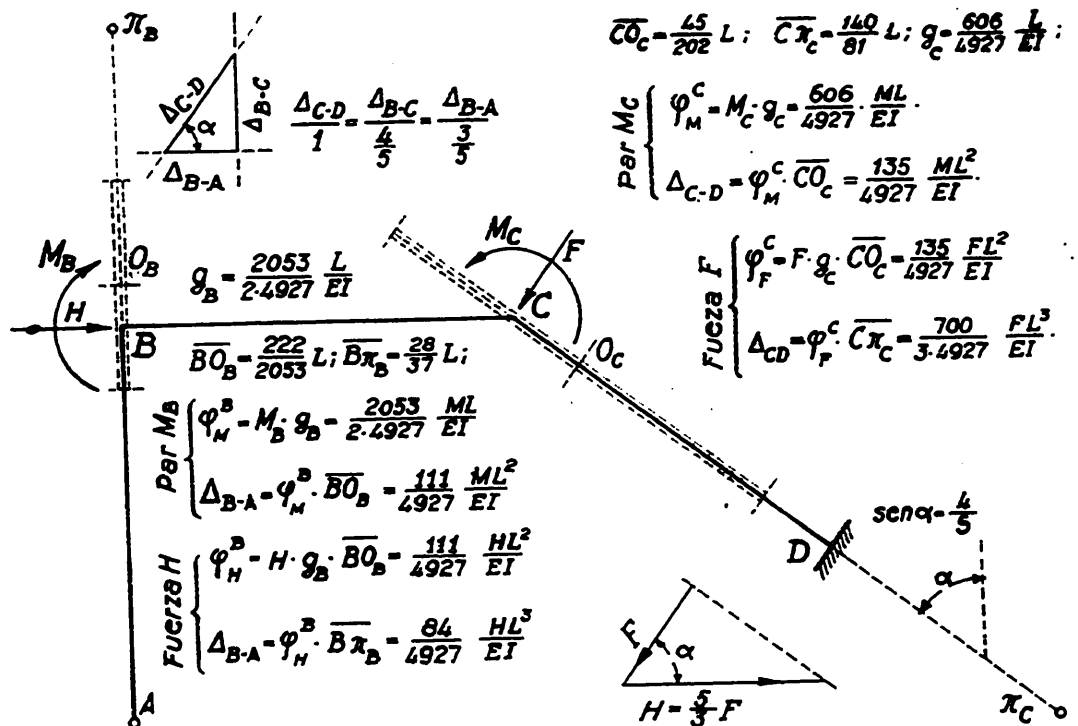


Fig. 13. — Ejemplo de estructura de un solo grado de movilidad.

minar los movimientos de los nudos cuando en ellos aplicamos pares o fuerzas, y comprobar por Maxwell la exactitud de los resultados.)

Aunque lo especial de las propiedades elásticas impuestas al material de estas estructuras obliga, dentro de cada barra, a que sus puntos sólo puedan separarse normalmente respecto a su eje, la combinación de este movimiento con los de arrastre de las barras puede permitir que puntos, y nudos, de determinadas partes de la estructura, gocen de su total movilidad y perdamos esa ventaja tan fundamental de saber predecir geoméricamente los recorridos de los nudos.

El ejemplo más sencillo de esto lo logramos con adicionar una segunda barra a la AB de la anterior

deformaciones que giros instantáneos (suma del giro de B y de los giros de los elementos entre B y C), con centro sobre la recta BC, y por tanto, las traslaciones CC' pasan a ser, necesariamente, traslaciones normales a la barra.

(El estado elástico real se obtiene ahora como superposición del estado 14-b, estructura coartada por el apoyo ficticio, cuya reacción es F, y del estado correspondiente a estructura sometida a la fuerza — F.)

Tanto el método de los puntos fijos, desde 1911, como después los métodos de aproximaciones sucesivas, al enfrentarse con estructuras de grado n de movilidad, resuelven el problema por superposición de una estructura inmovilizada sometida a las cargas

(1) Lo más cómodo será obtener esta elipse como elipse de inercia de las cuatro masas elásticas g_1 , g_2 , g_3 y g_4 .

exteriores (en la que están impedidas las traslaciones de sus nudos por la aplicación de los n apoyos o fuerzas ficticias) y de n estructuras de un sólo grado de movilidad (obtenidas al retirar, uno a uno, cada uno de esos apoyos) sometidas respectivamente a la acción de las fuerzas $-F_1, -F_2, \dots, -F_n$. Todos estos $n+1$ estados particulares de movilidad nos son directamente cognoscibles, tanto en uno como en otro método, y para pasar a la estructura real basta plan-

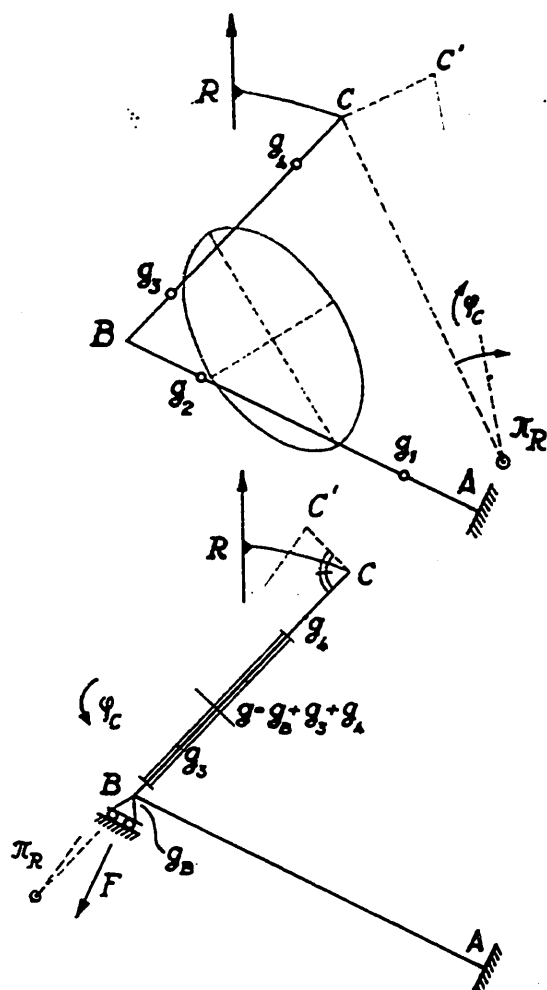


Fig. 14. — Para limitar la libertad de C, basta con impedir la única posibilidad de traslación de B.

tear el sistema de n ecuaciones de las n fuerzas F incógnitas y efectuar la superposición de los $n+1$ diagramas estudiados (1).

(1) En tanto que los métodos generales nos obligarían generalmente a sistemas con un número mucho más elevado de incógnitas, al tratar de determinar directamente las reacciones hiperestáticas de la estructura (métodos de Culmann, Bresse, Castigliano). Y también nos conduciría a sistemas más penosos de ecuaciones el llamado "método de las deformaciones", o método de los giros, en el que se toman como incógnitas los giros de nudo más los giros de barra.

Conclusiones acerca del método de Cross A.

Con lo acabado de recordar, no resulta temerario, ni siquiera expuesto, formular conclusiones sobre ese pretendido método de Cross A sin que sea necesario esperar a la aparición del anunciado segundo fascículo, pues proporciona el primero sobrados elementos de juicio para poder hacerlo.

Si nos hemos detenido en detallar las premisas elásticas y los procedimientos operatorios que permiten al método de los puntos fijos y a los de aproximaciones sucesivas acometer el cálculo de estructuras por reducción al estudio de estructuras de un sólo grado de movilidad, es porque, en esto y precisamente en esto, radica la idoneidad de dichos métodos para el cálculo de estructuras reticulares: determinada geométricamente en un estado de un sólo grado de movilidad cuál es la posición que han de pasar a ocupar todos y cada uno de los nudos, tan sólo resta averiguar cuáles deben ser, además, los giros de dichos nudos. Y esto se obtiene por la simple distribución de los llamados pares traslacionales. Una cualquiera de las ecuaciones de la estática nos informa después de cuál ha sido el valor de la fuerza F que, aplicada en uno cualquiera de los nudos, ha provocado esa deformación de la estructura.

Y también porque en la exposición que el señor López Rodríguez hace de la marcha a seguir en su Método de Cross A, falta toda indicación, indicio o vislumbre de que de algún modo vaya a hacer uso de tan especialísimo y eficaz recurso.

Es más, rotunda y reiteradamente manifiesta el Sr. López Rodríguez que renuncia a los apoyos y fuerzas ficticias, y que se valdrá sólo y exclusivamente de pares flectores auxiliares (1).

Ya todo esto se traslucía en anteriores publicaciones de dicho autor. De nuevo ruego al lector relea la resolución dada al problema que me planteara en 1953. Comprobará cómo en dicha resolución, y sin que al parecer viniese entonces a cuento, se le hacía notar lo estéril de las mil páginas del *Calcul des Constructions Hyperstatiques* del Sr. Rieger, que con

(1) Lo que no creemos es que tal decisión haya sido deliberada, ni que por un momento haya meditado en que, por ejemplo, en el pórtico de la fig. 13, Cross sabe resolver con un solo diagrama de distribución el problema de fuerza F aplicada en un nudo (o para decirlo con mayor rigor: con una distribución y una posterior regla de tres), mientras que el caso de acción de un par tiene ya que resolverlo en forma igual a la del caso general de sollicitación cualquiera, o sea: un diagrama de distribución en estructura inmovilizada, un estudio estático para determinación de esta fuerza F de inmovilización y una superposición con la distribución correspondiente a una fuerza $-F$.

Es decir, recurriendo a la postre a ese caso de fuerza o apoyo ficticios, único cuya resolución es directa.

Quitar al método de Cross este recurso es quitarle precisamente la herramienta que caracteriza a los métodos particulares de cálculo de estructuras. Y obligarse al empleo de otros recursos elásticos.

sus "momentos estáticos ficticios", no hace sino volver a los métodos generales. Comentario, y advertencia, de nuevo recogidas en mi artículo de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de mayo de 1954 (1). No hay más que repetir lo que allí decíamos: "De todos modos, lo que no podían lograr estos benévolos juicios, ni esta presentación como novedad, era el conseguir que pudiese prosperar como método general de análisis y cálculo de estructuras este método, destinado, por su naturaleza, a ser un método comprobatorio: utilizado como hace Rieger, no es sino una equiva-

(1) "Los Métodos directos de cálculo de estructuras", página 90.

lencia, poco cómoda, de los métodos generales de obtención de las reacciones (Culmann, Bresse, Castigliano) y, al igual que éstos, sólo en las estructuras con pequeño número de hiperestáticas puede, por tanto, resultar adecuado como herramienta de análisis."

Pues en esto precisamente viene a abocar, aun después de que el Sr. López Rodríguez repase sus conceptos de mecánica, racional y elástica, su presuntuoso Método de Cross *A*: suprimiéndole al de Cross todo lo que tiene de método específico de cálculo de estructuras.

¿Qué decir, pues, de tanta *Marcha Triunfal* y qué de tanta vana afirmación?: *Partúriunt montes, nascetur ridiculus mus*.