

# OTRO METODO ITERATIVO PARA EL CALCULO DE ESTRUCTURAS RETICULARES

Por JOSE LUIS BLANCO VILLORIA,  
Ingeniero de Caminos

*Se expone en este artículo un nuevo método iterativo para el cálculo de estructuras reticulares. Es paralelo al método de Kani, pero de mayor simplicidad, ya que sólo hay que desarrollar una columna de cálculos por nudo.*

I

Después de leer el artículo de los compañeros Florencio del Pozo y Arturo Cernuda en el número de la REVISTA de mayo último, en el que exponen con magistral claridad el método de Kani, me animé a lanzar este otro artículo.

Aunque reconocemos que el mérito de Cross con su método iterativo es indudable, pues además en él están inspirados todos éstos, también debemos reconocer que hoy queda eclipsado, por ejemplo, por el de Kani, y más aún por el que a continuación se expone.

Cualquiera que no se sumerja por completo en la rutina de la marcha de cálculo al aplicar el método de Cross, y recuerde al mismo tiempo los fundamentos de la distribución y propagación de momentos, o, por ejemplo, los fundamentos del método de Wilson y Maney (*Slope deflection*), que en definitiva son los mismos, deducirá fácilmente un nuevo método iterativo, rápido y sencillísimo, y quedará sin duda asombrado de no haber caído antes en la cuenta, así como de su sencillez y ventajas que le ponen a la cabeza de los métodos iterativos — por ejemplo, goza, lo mismo que el método de Kani, de la ventaja de eliminar automáticamente los "errores" que se cometen al efectuar la iteración, que muchas veces los cometeremos a propósito para llegar antes a la aproximación —.

Hace tiempo caí en esa cuenta y no me atreví a publicar el método como original al pensar que de seguro habría "descubierto el Mediterráneo", como efectivamente pude comprobar al leer el primer artículo sobre "Los métodos directos y los métodos de aproximaciones sucesivas de cálculo de estructuras", por Lorente de Nó en el número de la REVISTA de abril de 1953. Así, pues, el método que voy a exponer lleva el nombre de Kammüller, profesor de la Universidad de Karlsruhe. Ahora, al leer el nuevo artículo en el número de la REVISTA de mayo último, me doy cuenta que el método de Kammüller no está

muy divulgado: método que es paralelo al de Kani pero de mayor simplicidad.

Su fundamento es el siguiente:

El momento

$$M_{mn}^b = \hat{M}_{mn}^b - \hat{k}_{mn} \theta_m - \hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm} \theta_n \quad [1]$$

en el extremo  $m$  de la barra  $mn$  de la estructura (momento que la barra produce sobre el empotramiento elástico (\*)), es igual al momento  $\hat{M}_{mn}^b$  de empotramiento (de la barra sobre el empotramiento) menos el ángulo  $\theta_m$  girado por el nudo  $m$  (tomaremos el siguiente convenio de signos: ángulos y momentos positivos los que van en el sentido de las agujas del reloj), multiplicado por la rigidez  $\hat{k}_{mn}$  al giro de la barra  $mn$  (rigidez al giro en barra aislada y empotrada en el extremo opuesto) en el extremo  $m$ , menos el ángulo  $\theta_n$  girado por el nudo opuesto  $n$ , multiplicado por la rigidez al giro  $\hat{k}_{nm}$  y por el factor de transmisión  $\hat{t}_{nm}$  (también en barra aislada y empotrada en el extremo opuesto, lo cual lo indicamos con el "cero" encima).

En el caso de barra de sección constante, tenemos (\*\*):

$$\hat{k}_{mn} = \hat{k}_{nm} = \frac{4EI}{l} \quad \hat{t}_{mn} = \hat{t}_{nm} = \frac{1}{2}$$

y la [1] queda:

$$M_{mn}^b = \hat{M}_{mn}^b - \hat{k} \left( \theta_m + \frac{1}{2} \theta_n \right) \quad [1 \text{ bis}]$$

Si ahora sustituimos en [1] y en [1 bis] los momentos  $M_{mn}^b$ ,  $\hat{M}_{mn}^b$  por las reacciones, es decir, reacciones  $M_{mn}$ ,  $\hat{M}_{mn}$  que producen nudo y empo-

(\*) Creo que es más clara la exposición, considerando el efecto de la barra cargada sobre el nudo, que al contrario, pues parte desde la barra. Lo indicamos con el superíndice.

(\*\*) En el caso general para hallar los valores de los coeficientes elásticos, puede consultarse, por ejemplo, *Cálculo de estructuras reticulares*, de Fernández Casado.

tramiento ficticio respectivamente sobre la barra, nos quedan transformadas en:

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} + \hat{k}_{mn} \theta_m + \hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm} \theta_n \quad [2]$$

y para la sección constante:

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} + \hat{k} \left( \theta_m + \frac{1}{2} \theta_n \right) \quad [2 \text{ bis}]$$

Efectuemos la suma de los momentos  $M_{mn}$  considerando todas las barras que van al nudo  $m$ :

$$\sum_{(m)} M_{mn}^b = \hat{M}_m^b - \theta_m \sum_{(m)} \hat{k}_{mn} - \sum_{(m)} \hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm} \theta_n = -M \quad [3]$$

$$\sum M_{mn} = \hat{M}_m + \theta_m \sum_{(m)} \hat{k}_{mn} + \sum_{(m)} \hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm} \theta_n = +M \quad [3 \text{ bis}]$$

queriendo indicar con  $(m)$  que el valor  $m$  es fijo.

$\hat{M}_m = \sum_{(m)} \hat{M}_{mn}$  que Kani llama momento de sujeción del nudo.

El equilibrio del nudo exige que la expresión [3 bis] iguale al momento exterior  $M$  que esté aplicado al nudo (o que sea nula si dicho momento no existe).

Despejando  $\theta_m$ :

$$\theta_m = - \frac{\hat{M}_m - M}{\sum_{(m)} \hat{k}_{mn}} - \sum_{(m)} \frac{\hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm}}{\sum_{(m)} \hat{k}_{mn}} \theta_n \quad [4]$$

y para sección constante:

$$\theta_m = - \frac{\hat{M}_m - M}{\sum_{(m)} \hat{k}_{mn}} - \sum_{(m)} \frac{1}{2} \frac{\hat{k}_{mn}}{\sum_{(m)} \hat{k}_{mn}} \theta_n \quad [4 \text{ bis}]$$

En [4] (o en [4 bis]) tan sólo desconocemos los ángulos, siendo todo lo demás conocido y constante, pero los ángulos quedan hallados al iterar en esta expresión, que efectuaremos como si fuese un Cross, que sólo tiene una columna por nudo. Una vez hallados los ángulos, mediante [2] (o [2 bis]) determinamos los momentos hiperestáticos de la estructura.

La marcha se sintetiza con el esquema de la figura 1.<sup>a</sup>, en donde aparecen las siguientes constantes iniciales:

$\hat{M}_{mn}$  = momentos de empotramiento (incluso en  $s$ ):

$$\rho_{mn} = \frac{\hat{t}_{nm} \hat{k}_{nm}}{\sum_{(m)} \hat{k}_{mn}} = \frac{\hat{t}_{nm} R_{nm}}{\sum_{(m)} R_{mn}}$$

y para sección constante:

$$\rho_{mn} = \rho_{nm} = \frac{1}{2} \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}}$$

Los valores  $R$  son proporcionales a las rigideces a los giros (obsérvese la alteración intencionada de los subíndices que aparecen en la primera expresión).

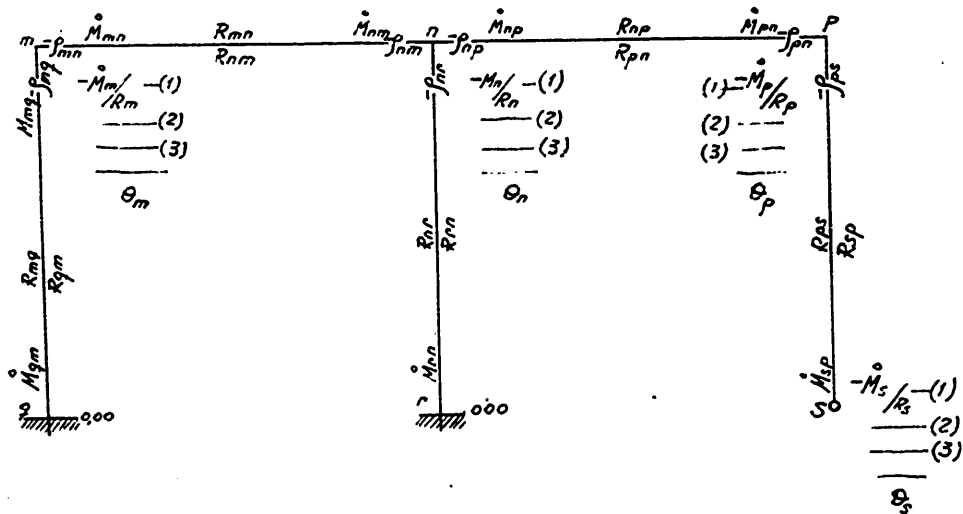


Figura 1.<sup>a</sup>

La primera aproximación son los valores  $-\frac{\overset{\circ}{M}_m}{R_m}$  (o  $-\frac{\overset{\circ}{M}_m - M}{R_m}$  si se aplica en el nudo un momento exterior  $M$ ). llamando  $R_m = \sum^{(m)} R_{mn}$ . A partir de estos valores empezaremos a dar vueltas a la estructura, de cualquier forma. Así, por ejemplo, (4)<sub>n</sub> es igual a

$$(1)_n + (-r_{nm})(3)_m + (-r_{np})(3)_p$$

expresión sintética de la [4] (o [4 bis]).

Como no importan los errores cometidos durante la iteración, la rapidez es muy grande (está indicada la regla de cálculo), frenando ésta algo, después de varias vueltas, si queremos más cifras exactas, que al principio son inútiles.

Vamos a calcular el mismo pórtico que aparece en el artículo de los señores del Pozo y Cernuda, con la misma sollicitación, pero articulando el apoyo derecho.

Tengamos en cuenta que una barra  $m-n$  articulada en su extremo  $n$  y sin sollicitaciones, el giro transmitido vale

$$\theta_n = -\frac{\overset{\circ}{i}_{mn} \overset{\circ}{k}_{mn}}{\overset{\circ}{k}_{nm}} \theta_m$$

y si la sección es constante:

$$\theta_n = -\frac{1}{2} \theta_m$$

Luego en nuestro ejemplo vamos transmitiendo al extremo articulado las mitades cambiadas de signo, de los ángulos obtenidos en el otro extremo.

De los extremos empotrados no hace falta preocuparse en la iteración.

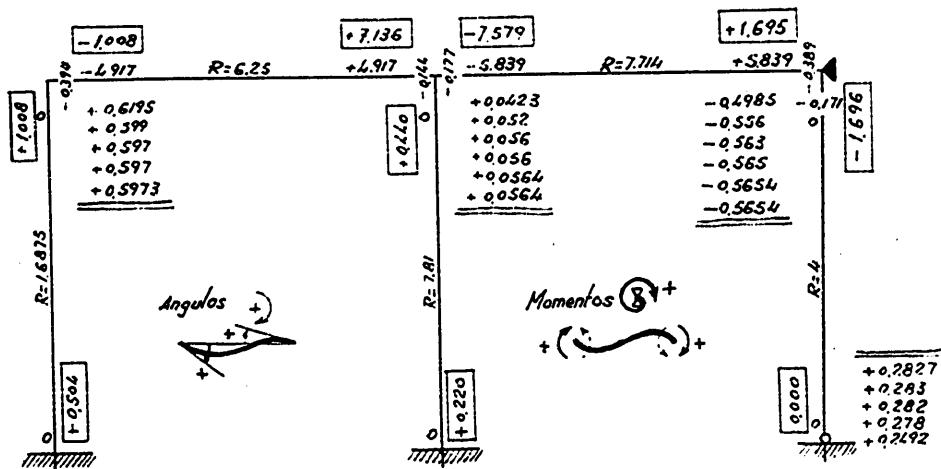


Figura 2.<sup>a</sup>

Para obtener los verdaderos valores de los ángulos tenemos que multiplicar los valores obtenidos por el valor común de las relaciones  $\frac{R_{mn}}{\overset{\circ}{k}_{mn}}$ ; para obtener sólo los momentos no hace falta preocuparse, pero en tal caso en las expresiones [2] y [2 bis] han de aparecer los valores proporcionales  $R_{mn}$  y  $R_{nm}$  en lugar de  $\overset{\circ}{k}_{mn}$  y  $\overset{\circ}{k}_{nm}$ .

Veamos ahora las simplificaciones en el caso de estructura simétrica.

Carga simétrica:

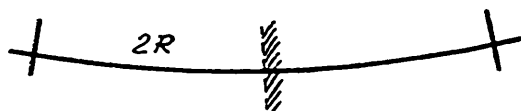


Figura 3.<sup>a</sup>

En todo punto del eje de simetría se ponen empotramientos ficticios, pues el ángulo girado en él es nulo, y asignamos a la barra dividida rigidez doble (el momento de empotramiento es el mismo, claro está).

Carga antisimétrica:



Figura 4.<sup>a</sup>

En todo punto del eje de simetría colocamos articulaciones ficticias, pues el momento en él es nulo; también hay que asignar rigidez doble a la barra dividida (el momento de empotramiento, el mismo).

Las mismas consideraciones hechas por los señores del Pozo y Cernuda en el caso de nudos traslacionales aplicando el método de Kani pueden ser hechas con el método de Kammüller.

Al producirse un desplazamiento relativo entre  $m$  y  $n$  extremos de la barra  $m n$ , sin que se produzcan nuevos giros de dichos nudos, aparece en  $m$  un nuevo momento  $M''_{m n}$ , con lo que tenemos:

$$M_{m n} = \overset{\circ}{M}_{m n} + \overset{\circ}{k}_{m n} \theta_m + \overset{\circ}{t}_{n m} \overset{\circ}{k}_{n m} \theta_n + M''_{m n} \quad [2 \text{ tri}]$$

En tal caso la [4] se transformará en:

$$\theta_m = - \frac{\overset{\circ}{M}_m - M + \sum_{(m)} M''_{m n}}{\sum_{(m)} \overset{\circ}{k}_{m n}} - \sum_{(m)} \frac{\overset{\circ}{t}_{n m} \overset{\circ}{k}_{n m}}{\sum_{(m)} \overset{\circ}{k}_{m n}} \theta_n \quad [4 \text{ tri}]$$

Concretándonos a una estructura de edificio como la indicada en la figura 7.<sup>a</sup> del artículo de los señores del Pozo y Cernuda, en la que en cada piso todos los pilares tienen la misma altura, la suma de esfuerzos cortantes en todos los pilares de altura  $h_r$ , del piso  $r$ , vale:

$$\sum_{(r)} Q_{m n} = Q_r = - \frac{1}{h_r} \sum_{(r)} \left[ \frac{3}{2} \overset{\circ}{k}_{m n} (\theta_m + \theta_n) + 2 M''_{m n} \right]$$

( $\sum$  indica suma extendida a todos los pilares del piso  $r$ ), y por otra parte:

$$Q_r = \sum_{i=1}^r H_i,$$

siendo  $H_i$  las fuerzas horizontales que actúan sobre la estructura por encima del piso  $r$ .

Despejando  $\sum_{(r)} M''_{m n}$ , tenemos:

$$\sum_{(r)} M''_{m n} = - \frac{3}{4} \left[ \frac{2 Q_r h_r}{3} + \sum_{(r)} \overset{\circ}{k}_{m n} (\theta_m + \theta_n) \right]$$

y repartiendo esta suma de momentos proporcionalmente a la rigidez relativa

$$\frac{R_{m n}}{\sum_{(r)} R_{m n}}$$

de cada pilar, obtenemos:

$$M''_{m n} = - \frac{3}{4} \frac{R_{m n}}{\sum_{(r)} R_{m n}} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} \overset{\circ}{k}_{m n} (\theta_m + \theta_n) \right] \quad [5]$$

llamando  $\bar{M}_r = \frac{2 Q_r h_r}{3}$  (nulo si no hay fuerzas horizontales  $H$ ).

Luego el proceso es el siguiente:

1.º Se da una vuelta o, mejor, varias, como en el caso de estructura intraslacional.

2.º Por pisos se hacen las sumas  $(\theta_m + \theta_n)$  para hallar los  $M''_{m n}$  por la fórmula [5].

3.º Terminadas las pasadas de los pisos, volvemos a dar vueltas a los nudos de la estructura pero partiendo de [4 tri], es decir, empezando por

$\frac{\overset{\circ}{M}_m + M''_{m n}}{R_m}$  (o  $\frac{\overset{\circ}{M}_m - M + M''_{m n}}{R_m}$  si existe el momento  $M$  exterior), llamando  $M''_m = \sum_{(m)} M''_{m n}$  (ver figura 1.<sup>a</sup>).

Y así sucesivamente hasta obtener aproximación de los ángulos  $\theta_m$ .

Por último, aplicamos la [2 tri].

III

Cuando una estructura está solicitada por cargas variables o móviles, debemos llegar a conocer su naturaleza elástica como se hace al seguir los métodos directos, es decir, determinar los puntos fijos o focos de influencia, factores de transmisión y rigideces al giro de los extremos de las barras, formando éstas parte integrante de la estructura. Y como sabemos es suficiente: o conocer distancias focales, o factores de transmisión, o rigideces de empotramiento elástico de los extremos de las barras, pues todos están relacionados entre sí.

Estos valores pueden determinarse *a posteriori* después de haber hecho unos "Kammüllers" aplicando un momento unidad en determinados nudos, por ejemplo, si es una malla abierta, aplicando el momento cada vez en un extremo de la estructura.

En el caso de mallas cerradas el problema de llegar a conocer la total naturaleza elástica se complica e incluso los métodos directos pierden aquí su esencia principal y se convierten en otros tantos métodos de tanteos y aproximaciones sucesivas. En estos casos debemos hallar las rigideces a los giros de los nudos, lo cual lo resuelve con rapidez el método expuesto. Sea una estructura con los nudos 1, 2, 3, ....  $m$  y

llamemos  $(i)_j$  al ángulo girado por el nudo  $i$  al aplicar un momento unidad en el  $j$ . Vamos efectuando "Kammüllers" aplicando un momento unidad cada vez en un nudo: tenemos el siguiente cuadro de ángulos:

$(1)_1$	$(2)_1$	$(3)_1$	. . . . .	$(m)_1$
$(1)_2$	$(2)_2$	$(3)_2$	. . . . .	$(m)_2$
$(1)_3$	$(2)_3$	$(3)_3$	. . . . .	$(m)_3$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$(1)_m$	$(2)_m$	$(3)_m$	. . . . .	$(m)_m$

como consecuencia de haber hecho  $m$  "Kammüllers". Parece de buenas a primeras que es laboriosísimo el proceso, pero no es así si tenemos en cuenta que los términos simétricos de la diagonal principal son iguales en virtud del teorema de Maxwell, es decir, cada nuevo "Kammüller" que calculemos va quedando más simplificado que el anterior, y utilizando el tanteo para los ángulos desconocidos se obtiene gran rapidez. Obtenemos así lo que pudiéramos llamar "cuadro de influencia de la estructura", en donde  $(i)_i$  es la flexibilidad al giro del nudo  $i$ .

