ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA VELOCIDAD MAXIMA ADMISIBLE EN UN TRAMO DE LINEA DE FERROCARRIL EN RELACION CON SU TRAZADO Y CON SU ESTADO DE CONSERVACION

Por MIGUEL ANGEL HACAR,
Ingeniero de Caminos.
Y NOTAS POR
ANTONIO DE CASTRO BRZEZICKI,
Doctor en Ciencias Exactas.

Analiza el autor, desde el punto de vista teórico, las fórmulas que se emplean para determinar la velocidad máxima admisible, citando importante bibliografía, y presenta al final las notas de su colaborador, que habrán de interesar a los versados en el tema.

Causas que limitan la velocidad. — Cuando se quiere determinar la velocidad máxima admisible en un cierto tramo de una línea hay que contar con las causas que pueden limitarla. De éstas, unas son dependientes de la construcción y del estado de la línea, otras, de los vehículos que por ella transitan. Se trata de garantizar la seguridad de la circulación (1).

Peralte máximo. — Es evidente que si, como es corriente, por una misma línea van a circular trenes lentos y rápidos, el peralte de las curvas no podrá ser tal que compense exactamente las fuerzas de inercia y de peso para la velocidad máxima. O sea, que el plano de la vía no puede ser entonces perpendicular a la resultante de ambas fuerzas. La razón es que en tal caso los vehículos de los trenes lentos (mercancías) correrían el peligro de volcar o, al menos, de cargar mucho el carril interior, desgastándolo y presionando excesivamente sobre las traviesas y el balasto (2).

Velocidades admisibles. — Podría llegarse a determinar teóricamente para cada curva la velocidad máxima admisible, de acuerdo con su trazado y estado de conservación (1); pero, aparte de que sería mucho exigir a los maquinistas, la aceleración de un tren, viene limitada por la potencia de las locomotoras (2). Aun disponiendo de potencia con exceso, las grandes aceleraciones están limitadas por la posibilidad de rotura de los ganchos de tracción.

Según lo expuesto, lo más claro y sencillo es asignar entre cada dos estaciones consecutivas una velocidad máxima aplicable a cada tipo de tren. Así se hace en nuestros *Itinerarios*.

Es evidente que dicha velocidad máxima debe ser tal que el tren pase con seguridad por el sitio de la vía en que su trazado y conservación es más deficiente.

---

(1) Es evidente que mejorando la calidad de una vía (con carril pesado, buenas traviesas, buen bateado, curvas de gran radio y transiciones largas) el material motor y móvil sufre esfuerzos menores. Pero mejorando también éste (en su distribución de pesos, tipos de suspensión, etc.) la vía está en mejores condiciones de resistencia y duración. Es, pues, esencial el estudio de las relaciones existentes entre los vehículos y la vía por la que han de circular.

A este respecto citaremos como muy interesantes y aconsejamos al lector por completos y claros, los artículos de Karl Pflanz en *Schweizerische Bauzeitung*, 1947, págs. 611 a 614 y 623 a 627, y en *Oesterreichische Bauzeitung*, 1949, páginas 42 a 45, 60 a 63 y 74 a 77.

La bibliografía alemana es muy copiosa. Además de los autores ya clásicos, como Vogel, Heumann, Dauner, Uebelacker, Schramm, etc., podemos citar como más recientes a C. Th. Müller, Eugen Czitary, W. Leven, Baumann y varios más.

(2) Las relaciones entre velocidades, peraltes y radios de curvatura pueden verse en el artículo "Charts Speed Determination of. Proper Curve Characteristics", en la revista *Engineering and Maintenance*, mayo 1949, págs. 482-483.

---

(1) El movimiento de una locomotora (esquematizada) sobre una vía con irregularidades tanto horizontales o en planta, como en alturas o alzado, es estudiado teóricamente por M. Julien e Y. Rocard en *La stabilité de route des locomotives*, Hermann et Cie., ed., París, 1935. En esta obra, y en una nota de R. Lévi que en ella figura, se estudian entre las interacciones de ruedas y carriles el paso gradual de rodadura a deslizamiento, estableciéndose el interesante concepto de pseudodeslizamiento.

(2) Supongamos un tren de $P = 500$ toneladas que circula por una curva de radio $R_1 = 324$ m. La velocidad máxima admisible en ella sería de $v_1 = 4\sqrt{324} = 72$ Km./hora. Si a una distancia $d = 2$ Km. de la salida de esta curva hubiese otra de radio $R_2 = 625$ m., la velocidad máxima admisible en ella sería de $v_2 = 4\sqrt{625} = 100$ Km./hora. Si el paso de v_1 a v_2 se hace con aceleración uniforme, emplearía un tiempo $t = d : [v_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)] = 0{,}0257$ horas y la aceleración en el paso hubiese sido $a = (v_2 - v_1) : t = 700$ kilómetros/hora². Sólo para acelerar las P toneladas se exigiría una fuerza en la locomotora de:

$$\frac{500 \times 1\,000}{9{,}81} \times \frac{700\,000}{3\,600 \times 3\,600} = 2\,760 \text{ Kg.}$$

actuando $0\,0257 \times 3\,600 = 92{,}4$ segundos en un recorrido de 2 000 m., lo cual exige una potencia de:

$$\frac{2\,760}{75} \times \frac{2\,000}{92{,}4} \simeq 800 \text{ hP.}$$

Velocidad máxima en función del radio de la curva. — Los tratados de explotación de ferrocarriles suelen citar la fórmula $V_{\text{máx}} = 4 \sqrt{R}$, en que R es el radio de la curva en metros y $V_{\text{máx}}$ la velocidad máxima en Km./hora. Aunque la deducción de la misma es matemáticamente correcta, es evidente que no tiene en cuenta ni el estado de la vía (tanto en planta como en alzado) ni el tipo (peso, longitud) del carril, ni el bateado de las traviesas, ni la cantidad y calidad del balasto.

Velocidad máxima en función de la variación de curvatura. — Resumir en una fórmula tantas variables, haciéndolas intervenir de una manera lógica sería un problema difícil. Pero, sin embargo, cuanto mejor es el estado de una vía menos variaciones de curvatura presenta, menos "garrotes" hacen los carriles. Ello ha dado lugar a que se dé hoy mayor importancia a la *variación* de la curvatura que a la curvatura misma.

Si en un diagrama representamos por abscisas puntos de un carril equidistantes cada $1 = 10$ m. y por ordenadas las flechas en milímetros que resulta en cada punto al tomarla sobre la cuerda que une sus adyacentes, obtenemos el llamado "diagrama de flechas" (1). Como la flecha, f, en cada punto es proporcional a la curvatura del mismo, el diagrama en cuestión nos medirá la variación de curvatura a lo largo del carril. La velocidad, lógicamente, debe estar en razón inversa de la variación de curvatura, o sea de Δf. Para una velocidad V la máxima variación o diferencia de dos flechas consecutivas no debe pasar de $\Delta f = 2\,500/V$ en cualquier punto del tramo.

Schramm (2) aconseja que $\Delta h = 10$ mm. como máximo, lo que quizás sea excesivo.

De acuerdo con esta fórmula resulta, por ejemplo, que en vías en que es frecuente encontrar diferencias de flechas de bastante más de 50 mm., no debiera pasarse de los 50 Km./hora de velocidad.

Claro que si la vía (carril y traviesas) y la infraestructura (balasto, explanación) son buenas, podrían admitirse mayores velocidades, sobre todo en vehículos ligeros (automotores). Pero generalmente ocurre que cuando los Δf son grandes, la estructura de la vía es muy deficiente, al menos en su conservación y revisión, por lo que las velocidades deben reducirse en ellas (3).

Curvas circulares y clotoides. — Vamos a estudiar el trazado que teóricamente resulta mejor, de acuerdo con lo indicado anteriormente.

Supongamos que entre dos puntos definidos, con sus tangentes respectivas también definidas, se quiere efectuar un trazado tal que la velocidad admisible (supuesta uniforme en dicho tramo) sea máxima. Si partimos de la fórmula (1) $V_{\text{máx}} = C_1 \sqrt{R}$ en que C_1 vale aproximadamente 4 y R es el radio menor del trozo (el del punto en que la curvatura es máxima), se puede probar (véase al final, Nota I) que el trazado se compone de un arco de círculo y de un trozo de recta. (Sin curva de acuerdo o transición alguna).

Si partimos, en cambio, de que la velocidad máxima está limitada por la máxima variación de curvatura, o sea que:

$$V_{\text{máx}} = \frac{C_2}{\left(\dfrac{d\,\dfrac{1}{R}}{d\,s}\right)_{\text{máx}}}$$

también puede demostrarse (véase Nota II) que el trazado mejor es una curva llamada espiral de Cornu, clotoide o radioide de arcos.

Para velocidades no muy elevadas, en que apenas son precisas las curvas de transición y sólo es necesario que el peralte no sobrepase determinada altura, la primera fórmula $V = 4 \sqrt{R}$ ha sido suficiente y con arreglo a ella se han venido limitando las velocidades máximas en las curvas. De acuerdo con ella, en las rectas ($R = \infty$) la velocidad puede ser tan grande como se desee (2).

---

(1) Ver J. Chapellet: *Méthodes de rectification du tracé des courbes de chemin de fer par correction des flèches*, *Eyrolles*, éd., 1938, o "Maintaining railroad curves with a string", en la revista *Railway Engineering and Maintenance* en varios artículos 1948 y 1949.

En el Tratado de Explotación de Ferrocarriles, de García Lomas, tomo I, págs. 392 a 401, se hace una síntesis del empleo del llamado "diagrama de flechas".

(2) Ver Schramm, *Der Gleisbogen*, pág. 149, Verlag Elsner. Berlín, 1943.

(3) Como se ha puesto de manifiesto en varios estudios y recientes Congresos de Ferrocarriles, tan importantes o más que las irregularidades en planta son las que existen en alzado. Pero suele haber una cierta relación de proporcionalidad entre ellas, ya que ambas irregularidades son debidas al mal estado de la vía (mal bateado, tornillos flojos, etcétera).

(1) La deducción de esta fórmula viene obligada al limitar la aceleración centrífuga no compensada a 0,6 m./seg.², que es la que corrientemente se da como máxima soportada con comodidad por los viajeros.

Véase el tratado citado de García Lomas, tomo I, ó el artículo de Pflanz a que antes hemos hecho referencia.

(2) Esto no es exacto, pues aun en rectas perfectamente establecidas aparecen movimientos perturbadores, el principal de los cuales es el llamado de lazo ("lacet", en francés), que se presenta no sólo en las locomotoras de vapor, ocasionado principalmente por el desequilibrio del trabajo de los émbolos de los cilindros, sino también en las locomotoras eléctricas.

Y. Rocard ha llegado a demostrar que "un chasis rígido simétrico aislado tiene un movimiento de lazo inestable a cualquier velocidad". En función del radio r de las ruedas, del ancho de vía, $2h$, y de la conicidad, c, de aquéllas, se deduce que el período espacial para un *eje* aislado es, a todas las velocidades:

$$X = 2\pi \sqrt{\frac{r\,h}{c}}.$$

Ejemplo: Para $r = 1{,}20$ m., $2h = 1{,}67$ m., $c = 1:20$,

$$X = 2\pi \sqrt{1.20 \times 0{,}835 \times 20} = 28{,}20 \text{ m}.$$

Para un chasis, la fórmula es algo más complicada. (Ver *La stabilité de route des locomotives*, 1.ª parte, 1935.)

En un tramo determinado, aun sin curvas de transición, la velocidad máxima venía definida por el radio de la curva que lo tuviese menor:

$$V_{máx} = 4 \sqrt{R_{mín}}.$$

Al aumentarse las velocidades y los pesos por eje y estudiarse mejor las fuerzas dinámicas de guiado, que se incrementan grandemente en los puntos angulosos o de variación brusca de curvatura, es cuando se ha podido apreciar la influencia extraordinaria de dicha variación, lo que ha entrañado que se establezcan longitudes mínimas en las transiciones y que se conceda gran importancia a la posición exacta de la vía en planta (y en alzado).

Tipos de rampa de peralte. — Si, como es costumbre a veces, se establece una rampa de peralte de pendiente uniforme, resulta el carril exterior con discontinuidad en alzado apareciendo un punto anguloso. Esto se evita, si el ángulo es pequeño, sencillamente redondeándolo un poco. Si es algo mayor, empleando peraltes tipo Klein, Schramm, etc., que además disminuyen la longitud de la parte peraltada, aunque a costa de que en la parte central de la curva de transición la variación del peralte sea mayor (1).

Analogía entre curvas con peralte y líneas elásticas. — Si se establece que el peralte en cada punto de una curva debe ser proporcional a la curvatura en el mismo, o sea que $z : h = \frac{1}{\rho} : \frac{1}{R}$ (h es el peralte máximo en el punto en que su curvatura $\frac{1}{R}$ también lo es; z y ρ son el peralte y el radio de curvatura en un punto cualquiera), como

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

y para curvaturas pequeñas, $y' \simeq 0$, por lo que $\rho \simeq \frac{1}{y''}$; sustituyendo queda:

$$z = h R y''.$$

Polsoni (2) establece una analogía entre esta fórmula y la ecuación diferencial ordinaria de las vigas. En efecto:

Si asimilamos z al momento flector de una viga con rigidez $E I = h R$, el valor de y'' es la derivada segunda de la línea elástica, y que en nuestro caso sería la ordenada de la transición. Haciendo distintas hipótesis de cargas de la viga y operando convenientemente sobre las constantes de integración pueden obtenerse diversas curvas de transición y leyes de variación de peraltes que en sus extremos cumplan condiciones dadas.

Estudio intrínseco de la curva. — Podrían también darse *a priori* las variaciones de curvatura y torsión del carril exterior (o de ambos) de una curva. Esto equivaldría a dar sus radios de curvatura ρ y de torsión τ en función del arco s, o sea las ecuaciones intrínsecas de la misma. Ya sabemos que el problema queda reducido a la integración de una ecuación diferencial de Ricatti que cumpliese determinadas condiciones (1).

Mejora del trazado de una vía ya establecida. — Generalmente, para mejorar una vía ya establecida no puede llegarse a establecer curvas que obedezcan a una cierta ecuación. Las limitaciones impuestas por multitud de circunstancias (construcciones próximas, puentes, trincheras difíciles de ampliar, túneles, etc.) impiden o reducen mucho el desplazamiento transversal de la vía en varios puntos. En tal caso, lo que procede hacer es estudiar una *curva de radio variable* que, no sobrepasando los desplazamientos admisibles, presente un diagrama de flechas lo más regular y simétrico posible y, sobre todo, que en él la variación de dos flechas consecutivas sea inferior al mínimo admisible de acuerdo con la velocidad máxima en el tramo (2).

Fuerzas de guiado y descarrilamiento. — Al estudio de las fuerzas de guiado, tanto estáticas como dinámicas, se le concede hoy gran importancia. En él se hace intervenir la *elasticidad transversal* de la vía, y para cada tipo de vehículo se determinan dichos esfuerzos, dependientes a su vez de los amortiguamientos horizontales del movimiento.

Parece llegarse a la conclusión de que en las fuerzas de guiado influye más la diferencia de flechas (o variación de curvatura de la vía) que el aumento de peso por eje.

---

(1) Véase, por ejemplo: A. Crespo: "Curvas de transición", *Ferrocarriles y Tranvías*, febrero, abril y junio 1945; o F. García González, "Curvas de transición en ferrocarriles", REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, enero y febrero 1946; o tomo I, capítulo XVIII, "La vía en curva", en el Tratado de Explotación de Ferrocarriles, de García Lomas.

Para que en el peralte de entrada en una curva las ruedas de un vehículo estén bien situadas y sin peligro de descarrilar, conviene que la rampa del mismo no sea superior a 2 milésimas. Por tanto, para el peralte de 150 mm., propio de curvas de radio muy pequeño, si la rampa de peralte es uniforme, deberá tener cada rama curva de transición una longitud no inferior a 75 m. Mejor aún sería reducir a una milésima dicha rampa.

(2) Ver Giovanni Polsoni: "Considerazioni sulle curve di racordo ferroviarie", en *Ingegneria Ferroviaria*, abril 1950, págs. 231 a 234.

(1) Véase cualquier tratado de Geometría diferencial, como el italiano de Bianchi, el inglés de Eisenhart o el alemán de Blaschke.

A. Caquot ("Le racordement parfait", *Revue Générale des Chemins de Fer*, enero 1949, págs. 1 a 8) ha propuesto como acuerdo más perfecto el empleo de curvas osculadoras a la alineación recta y al círculo con igual torsión que ellos en los contactos, pues así la normal principal efectúa idéntico giro con las consiguientes ventajas de comodidad y seguridad en el tráfico rápido, evitando oscilaciones transversales de los vehículos. Resulta así un perfil que no es rigurosamente antisimétrico, como los clásicos de Klein, Schramm, etcétera.

(2) En algún caso puede interesar hacer transiciones compuestas. Ver H. F. Hickerson: "A mathematical examination of spiraled compound curves", en *Proceedings Am. Soc. of Civil Engineers*, noviembre 1953, separata núm. 357.

La importancia que tiene el reducir las fuerzas de guiado es enorme, pues son ellas las que pueden determinar el descarrilamiento (1).

NOTA I.

Estudiaremos el problema que plantea la fórmula $V_m = c\sqrt{R}$; demostraremos que entre todas las curvas de pendiente monótona que pasan por dos puntos A y B y en ellos tienen tangentes fijas (de ángulo $< \pi$) (lo que corresponde en las líneas férreas al problema práctico de unir dos alineaciones rectilíneas), la que permite velocidad máxima está formada por un arco de circunferencia y eventual prolongación rectilínea de una de las alineaciones.

Tomemos como eje $O\,X$ la tangente a la curva en A (para fijar las ideas supondremos que A está más alejado que B del punto C de intersección de las tangentes en A y B), y sea φ el ángulo de una tangente cualquiera con $O\,X$.

Siendo

$$\int_{AB} d\,y = y_B$$

sea cualquiera la curva, entre las antes indicadas, que se tome, serán en particular iguales los valores de esta integral para una curva cualquiera y para la formada por un arco de circunferencia de radio a que pasa por B y un segmento rectilíneo tangente a ella que la una con A. Es decir [por ser $d\,y = R\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\,\varphi$]:

$$\int_{AB} R\,(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\;d\,\varphi = \int_{AB} a\,\mathrm{sen}\,\varphi\;d\,\varphi,$$

y, por tanto:

$$\int_{AB} \mathrm{sen}\,\varphi\,[R\,(\varphi) - a]\,d\,\varphi = 0.$$

Por las condiciones impuestas (ser $0 \leq \varphi < \pi$) el signo de sen φ no cambia. Por tanto, no siendo $R\,(\varphi) \equiv a$, y debiendo para que la integral sea nula cambiar el signo del integrando, tendrá que ser en algunos puntos $R\,(\varphi) < a$, esto es, la curva menos satisfactoria para nuestro objeto que la circunferencia.

NOTA II.

Demostraremos que entre todas las curvas de curvatura monótona de ecuación intrínseca $\dfrac{d\,\frac{1}{R}}{d\,s} = f\,(R)$ que pasan por dos puntos, A y B, en cada uno de ellos tienen respectivamente las mismas tangentes y curvaturas y éstas de igual signo, la que hace mínimo el máx. $\left|\dfrac{d\,\frac{1}{R}}{d\,s}\right|$ es la curva de ecuación $\dfrac{d\,\frac{1}{R}}{d\,s} = K$ (espirales de Cornu). (La constante K la determinan las condiciones en A y B.)

Tomemos, para fijar las ideas, como eje $O\,X$ la dirección de la tangente en A y sea φ el ángulo de la tangente a la curva con $O\,X$. Es evidente que a lo largo de una curva cualquiera, entre las antes indicadas, que pase por A y B es:

$$\int_{AB} d\,\varphi = \varphi_B = \text{cte.}$$

Pero siendo $d\,s = R\,d\,\varphi$, es:

$$d\,\varphi = \frac{d\,s}{R} = \frac{d\,\frac{1}{R}}{R\,f\,(R)}\;;$$

luego tomando la integral $\int_{AB} d\,\varphi$ a lo largo de la curva $f\,(R) \equiv k = \text{cte.}$ y a lo largo de otra cualquiera $f\,(R) \equiv f_1\,(R)$ su valor será el mismo; esto es, la diferencia de ambas será nula; es decir:

$$\int_{AB} \frac{1}{R}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{f_1\,(R)}\right] d\,\frac{1}{R} = 0.$$

---

(1) Para velocidades no muy elevadas es aceptable la teoría *estática* del descarrilamiento expuesta en las obras clásicas de Marié y otros. Los diagramas de Uebelacker ("Untersuchungen von der Bewegung von Lokomotiven mit Drehgestellen in Bahngrümmungen" Org. Fortschr. Eisenbahnwes, Jg., 1903), nos permiten determinar con facilidad la fuerza de guiado (horizontal) P en la rueda, y por tanto, el esfuerzo Y sobre el carril que, como sabemos, vale $Y = P - \mu\,Q$, en que Q es la carga vertical que actúa sobre la rueda, y μ el coeficiente de rozamiento de rueda con carril, que sólo con muy grosera aproximación puede considerarse constante y determinado.

Es indispensable, para utilizar dicho diagrama, conocer la posición del llamado *centro de rozamiento del vehículo.*

Si la *marcha es libre* (Freilauf), este centro se obtiene inmediatamente, pues es el pie de la perpendicular trazada desde el centro de la curva al eje longitudinal del vehículo.

Si la *marcha es forzada* o en lanza (Spiessgang), el método de Heumann, llamado también *de mínimo,* nos permite su determinación ("Das Verhalten von Eisenbahnfahrzeugen im Gleisbogen" y "Das Minimunverfahven der Bogenlaufuntersuchung un seine Anwendund auf Verschubachsen", de dicho autor, en la misma revista citada anteriormente, 1913, página 104 y siguientes, y 1941, pág. 209 y siguientes, respectivamente). Tanto en un caso como en otro, aparecen en él las fuerzas de guiado P, determinadas por ángulos.

La seguridad contra el descarrilamiento, calculada por el método estático, venía expresada por la relación $Y \leq \frac{1}{3}\,Q$. Medidas más recientes han probado que con $Y = Q$ no se presentaban descarrilamientos. Por eso se ha adoptado llamar a Q/Y ***coeficiente de seguridad de descarrilamiento.***

De aquí se sigue que, si no es $f_1(R) \equiv k$ (esto es, si la curva *no* es una espiral de Cornu) para que la integral anterior sea nula, deberá ser el integrando positivo en algunos arcos parciales y negativo en otros, es decir, habrá puntos en los que sea $| f_1(R) | > k$, esto es $\left| \frac{d \frac{1}{R}}{d s} \right| > k$, lo que demuestra que cualquier curva es menos satisfactoria para nuestro objeto que la espiral.

Las condiciones en los extremos que se presentan en la práctica son tan variadas (por gozar incluso de una cierta imprecisión dentro de ciertos límites) que no se pueden dar métodos generales para adaptar espirales a dos alineaciones cualesquiera. No obstante y dada la frecuencia de este caso, estudiaremos el problema de unir dos alineaciones por medio de dos arcos espirales de Cornu y segmentos rectilíneos (es evidente que con un solo arco el problema no tiene solución debido a que la espiral tiene un solo punto de curvatura nula).

Dados los puntos A y B y sus tangentes (la curvatura en ambos se supone nula) se considera la bisectriz de éstas y se prolonga en línea recta una de las alineaciones, de manera que el problema se simetrice respecto a esta bisectriz; es decir, que los extremos de las alineaciones y las tangentes en ellos queden simétricos. La curva que resuelve el problema, aunque es claro que no es una extremal en el sentido antes indicado, está compuesta de dos arcos de espiral de Cornu simétricos de centro en los extremos de las alineaciones y elegidos de modo que corten normalmente a la bisectriz; esta elección se reduce a la del parámetro k y es fácil de hacer gráficamente o si se dispone de una tabla numérica de la espiral.