

EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION Y EL METODO DE CROSS

Por JOSE LOPEZ RODRIGUEZ,
Ingeniero de Caminos.

Concluye en el presente artículo el trabajo del autor sobre el tema del epígrafe, que ha sido en varias ocasiones presentado en nuestras páginas.

11

La enjundia de la distribución Cross de los momentos flectores.

Hay en las páginas 52 y siguientes de mi folleto "El método de Cross en serio y de broma", unas *disquisiciones* en torno al concepto de rigidez y sus aledaños que, pese a su poca monta, acaso nos resulten aptas para el comentario sencillo y escaso de pretensiones que nos vamos a permitir hacer para comenzar, con la intención de entrar lo más cómodamente posible, y por el camino más llano, en la entraña de la originalísima distribución de los momentos flectores en una estructura reticular, que debemos al Prof. H. Cross.

Utilizaremos al efecto la figura 3.^a y efectuaremos el corto recorrido del fácil camino a seguir, yen-

do en todo momento del brazo del *principio de superposición*.

Fijémonos primeramente en la parte a) de la citada figura; vese en ella un conjunto de cinco barras concurrentes por uno de sus extremos en un punto (común, naturalmente, a todas ellas) y empotradas perfectamente en sus otros extremos. En dicho punto común de esas barras (que adrede no he bautizado con letra ninguna, para evitar complicar más la figura), y en su plano, actúa un par flector de momento M ; y vamos a estimar con el rigor debido, los efectos de la actuación del par de momento M en las barras del haz de que se trata.

No habiendo posibilidad de traslación del punto de aplicación del momento expresado, las cinco barras del haz en cuestión se encuentran en el caso b) de la figura 1.^a (véase el artículo precedente); y por tratarse de una estructura reticular, o de un *nudo* de ella, mejor dicho, todos los extremos de las barras,

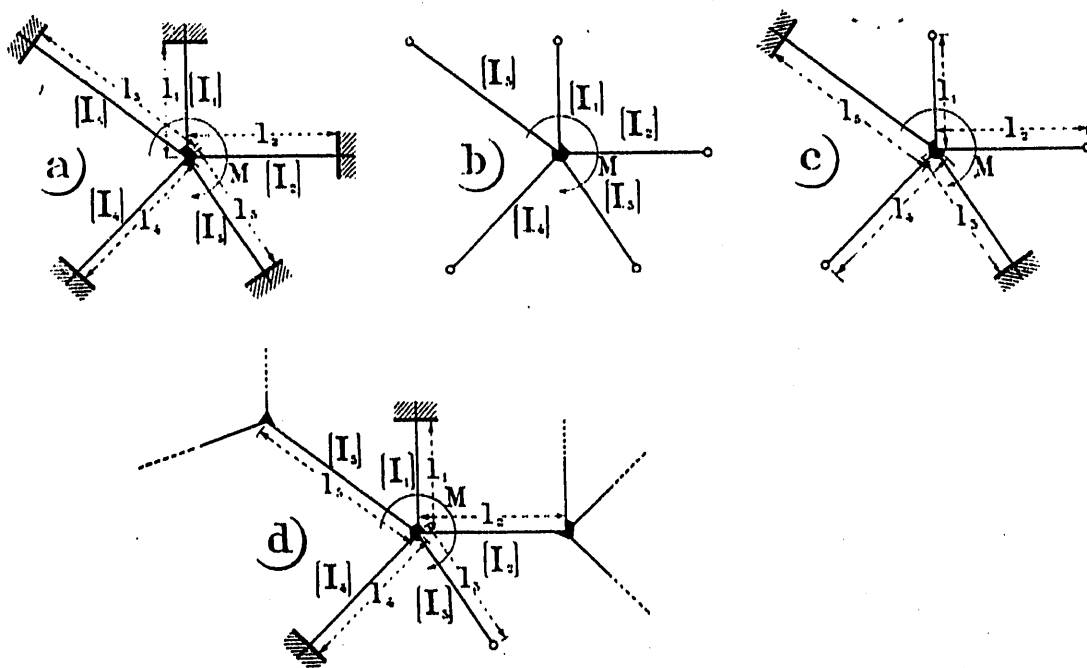


Figura 3.^a

en su punto común, *giran el mismo ángulo*, que tiene por valor el dado por la expresión [7], el tan conocido

$$\frac{m l}{4 E I} \quad [36]$$

Si suponemos conocidos los momentos flectores (m_1, m_2, m_3 , etc.) en cada una de nuestras barras en el punto en que concurren, originados por la actuación del par flector de momento M , la precitada igualdad del giro, por aplicación de la expresión [36], nos permite escribir esta serie de razones iguales:

$$\frac{m_1 l_1}{4 E I_1} = \frac{m_2 l_2}{4 E I_2} = \frac{m_3 l_3}{4 E I_3} = \frac{m_4 l_4}{4 E I_4} = \frac{m_5 l_5}{4 E I_5};$$

o esta otra sencillamente deducida de ella, que es su equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m_1}{E I_1}}{l_1} &= \frac{\frac{m_2}{E I_2}}{l_2} = \frac{\frac{m_3}{E I_3}}{l_3} = \frac{\frac{m_4}{E I_4}}{l_4} = \frac{\frac{m_5}{E I_5}}{l_5} = \\ &= \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{\sum_1^5 \frac{E I_n}{l_n}} = \frac{M}{\sum_{n=1}^{n=5} \frac{E I_n}{l_n}} \end{aligned}$$

No interesa la deducción del valor del ángulo de giro, pero sí los valores de los momentos m_n en cada una de las barras, fáciles de obtener por esta última serie de razones iguales, dado que, en general, ella nos dice que

$$m_n = \frac{\frac{E I_n}{l_n}}{\sum_{n=1}^{n=5} \frac{E I_n}{l_n}} \cdot M. \quad [37]$$

Sin darnos cuenta, nos encontramos hecha la distribución de un momento M entre las barras concurrentes en un nudo al que el par de tal momento flector se aplica, cuando se cumplen estas dos condiciones:

- Que el nudo *no pueda tener traslaciones*.
- Que las barras que concurren en él, *se encuentren en sus otros extremos perfectamente empotradas*.

Volvamos a nuestra figura 3.^a; fijémonos en su parte b). Ahora las barras que concurren en el nudo al que el par de momento M se aplica, en sus otros extremos, están articuladas. Tenemos el caso a) de la figura 1.^a (véase el artículo anterior), y de la expresión [3] se obtuvo, para el caso del vértice de

nuestro haz de barras o nudo de aplicación de M , este valor del giro:

$$\frac{m l}{3 E I} \quad [38]$$

Es ahora la serie de razones iguales la que sigue:

$$\frac{m_1 l_1}{3 E I_1} = \frac{m_2 l_2}{3 E I_2} = \frac{m_3 l_3}{3 E I_3} = \frac{m_4 l_4}{3 E I_4} = \frac{m_5 l_5}{3 E I_5};$$

pero multiplicándolas por 3 y dividiendo cada relación (sus dos términos, mejor dicho) por la longitud l_n de la barra a que corresponde, llegamos en definitiva a la misma expresión [37].

Esta expresión, en el caso b) de la figura 3.^a, nos da también la distribución del momento M , si se cumplen las condiciones gráficamente expresadas en dicha parte de la figura:

a) Que el nudo al que M se aplica no pueda tener traslaciones.

b) Que las barras concurrentes en él *tengan sus otros extremos totalmente articulados*.

En la figura 3.^a hay también el caso c), con barras articuladas, unas, y perfectamente empotradas, otras; en las primeras es el valor del ángulo de giro:

$$\frac{m l}{3 E I},$$

y en las perfectamente empotradas vale:

$$\frac{m l}{4 E I};$$

el ángulo de giro en el vértice del haz (o nudo de la estructura), que es el mismo en todas las barras, si suponemos conocida la distribución del momento flector M , nos permite escribir (véase la figura 3.^a) esta serie de razones iguales:

$$\frac{m_1 l_1}{3 E I_1} = \frac{m_2 l_2}{3 E I_2} = \frac{m_4 l_4}{3 E I_4} = \frac{m_3 l_3}{4 E I_3} = \frac{m_5 l_5}{4 E I_5};$$

de la que fácilmente se obtiene esta otra equivalente:

$$\frac{\frac{m_1}{E I_1}}{\frac{4}{3} l_1} = \frac{\frac{m_2}{E I_2}}{\frac{4}{3} l_2} = \frac{\frac{m_4}{E I_4}}{\frac{4}{3} l_4} = \frac{\frac{m_3}{E I_3}}{l_3} = \frac{\frac{m_5}{E I_5}}{l_5};$$

y ésta nos permite afirmar que cabe la aplicación de la expresión [37] al caso c) de la figura 3.^a, multiplicando por *cuatro tercios* las longitudes de las barras con articulación en el extremo opuesto al de aplicación del par flector a distribuir.

La distribución del par flector M en un nudo de una estructura reticular en el que no pueda haber traslaciones, no es tan sencilla, cuando, como en el caso d) de la figura 3.^a, no todas las barras concurrentes en él tienen articulación o perfecto empotramiento en los extremos opuestos.

Hay en la parte d) de nuestra figura 3.^a las barras de subíndices 1, 3 y 4, que, por tener articulación o empotramiento perfecto en sus extremos no comunes, permiten la aplicación de las expresiones [36] y [38]; pero las de subíndices 2 y 5, concurrentes a otros nudos, no se encuentran en el mismo caso. Usando término pasado de moda, esas barras están *semiempotradas* en sus extremos no comunes con las otras tres; y empleando designación corriente (tan incorrecta como la citada pasada), diremos que están en dichos puntos *elásticamente empotradas*. ¿Cuál es la ocurrencia original del Prof. Hardy Cross para poder efectuar la distribución de momentos en casos tales? ¿Cuál es el artificio fundamental, la *enjundia* de la distribución Cross de los momentos flectores?

Es sencillísima cosa, a la que quiero llegar paso a paso, pero dando antes marcha atrás. Volvamos a mi folleto y a su página 71; allí podrá enterarse el lector de una clasificación de los métodos de cálculo de estructuras en estos dos grupos:

Grupo J' : Métodos a base de *quita y pon*.

Grupo J'' : Métodos a base de *pon y quita*.

Clasificación que, si no fuera broma, merecería serlo; pero es, en cambio, una verdad como un templo mi afirmación (que el lector verá comprobada a lo largo de esta serie de modestos artículos) de que *el método de Cross pertenece por completo al segundo grupo*. Vamos a verlo en la distribución de momentos, primeramente, mediante los sencillos ejemplos objeto de la figura 5.^a; mas me place, antes de

entrar en ellos, dejar bien sentado y comprobado que la distribución Cross de los momentos flectores exige la condición *sine qua non* de que *no haya traslaciones* en los nudos de la estructura.

Nos lo va a decir la figura 4.^a; en su parte a) tenemos una viga de sección y momento de inercia (I) constantes sometida a la acción del par flector M en el punto o sección de la abscisa z . Ya en el anterior artículo quedó resuelto el caso del par flector actuando en el centro de la barra ($z = l$), objeto de nuestra figura 2.^a; y procediendo análogamente (omito el detalle de los sencillos cálculos, para no fatigar al lector más de lo debido) a lo detallado en dicho artículo, hemos hallado para dicha viga de longitud $2l$, empotrada en sus extremos, estos valores de las reacciones:

Momento flector en el extremo izquierdo:

$$m = \frac{3z - 2l}{2l} \cdot \frac{2l - z}{2l} \cdot M. \quad [39]$$

Reacción vertical en el extremo izquierdo:

$$R = -\frac{3}{4} \cdot \frac{z}{l} \cdot \frac{2l - z}{l} \cdot \frac{M}{l}. \quad [40]$$

Si en estas expresiones hacemos $z = l$, obtenemos:

$$\text{De la [39]. } m = \frac{M}{4};$$

$$\text{De la [40]. } R = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l};$$

que son precisamente los valores directamente obtenidos en el anterior artículo para el caso de actuación del par de momento flector M en el centro de la barra.

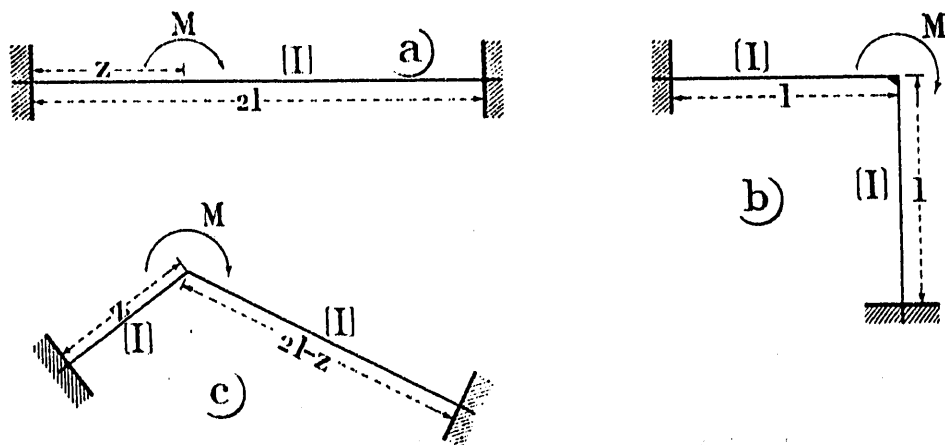


Figura 4.^a

Y es curioso observar que el momento m es máximo para $z = \frac{4}{3} l$, que nos da el valor:

$$m = \frac{M}{3},$$

por la expresión [39], y que la reacción vertical R es máxima para el $z = l$, que por la expresión [40] nos da:

$$R = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l}.$$

Fijémonos ahora en la parte b) de la figura 4.^a; actúa el par de momento flector M en un nudo en el que concurren dos barras de idénticas longitudes e inercia (I); la aplicación de la expresión [37] nos da para cada una de ellas:

$$m_1 = m_2 = \frac{\frac{EI}{l}}{\frac{EI}{l} + \frac{EI}{l}} M = \frac{M}{2}.$$

En la parte c) de dicha figura 4.^a, las dos barras concurrentes en el nudo de aplicación del par M , de igual momento de inercia en la sección para ambas, tienen longitudes diferentes (z , la izquierda, y $2l - z$, la derecha), y la aplicación de la expresión [37] nos da la siguiente distribución del par de momento flector M :

Para la barra izquierda:

$$m_1 = \frac{\frac{EI}{z}}{\frac{EI}{z} + \frac{EI}{2l-z}} M = \frac{2l-z}{2l} \cdot M. \quad [41]$$

Para la barra derecha:

$$m_2 = \frac{\frac{EI}{2l-z}}{\frac{EI}{z} + \frac{EI}{2l-z}} \cdot M = \frac{z}{2l} \cdot M, \quad [42]$$

que sumados nos dan el valor de M , y que para $z = l$ nos dan el valor

$$\frac{M}{2}$$

del caso precedente (parte b) de nuestra figura 4.^a.

Volvamos a la parte a) de ésta; consideremos que el punto de abscisa z puede ser vértice de un haz de dos barras que forman ángulo de 180° , en cuyo vértice se haya aplicado el par flector M ; teniendo en cuenta los valores de las expresiones [39] y [40],

tendremos estos dos del momento flector en el punto de abscisa z :

$$m_1 = m + Rz = \frac{3z-2l}{2l} \cdot \frac{2l-z}{2l} \cdot M - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{l} \cdot \frac{2l-z}{l} \cdot \frac{M}{l} z = -\left(4 - 8 \frac{z}{l} + 9 \frac{z^2}{l^2} - 3 \frac{z^3}{l^3}\right) \frac{M}{4}. \quad [43]$$

$$m_2 = m + Rz + M = m_1 + M = +\left(8 \frac{z}{l} - 9 \frac{z^2}{l^2} + 3 \frac{z^3}{l^3}\right) \frac{M}{4}. \quad [44]$$

Estas expresiones [43] y [44] no coinciden con las precedentes [41] y [42] y son bastante más complicadas; y ello es debido a que en el punto z hay flecha (hay *traslación del nudo* que hemos supuesto en dicha abscisa). El sencillo mecanismo de la distribución Cross de los momentos flectores *exige que no pueda haber traslaciones en los nudos* de la estructura.

Cuando se aplique M en el punto medio de la barra, cuando se tenga $z = l$, las cuatro expresiones indicadas dan el mismo resultado; y sucede así, porque es en tal caso la flecha nula y no existe, por ello, traslación del supuesto nudo. Tal valor cero de la flecha puede verse en nuestra figura 2.^a (núm. 2877 de nuestra Revista), en cuya parte c) figuran las ecuaciones de las elásticas de la barra, cuando el par flector de momento M actúa en el centro de la barra empotrada en sus extremos. Hágase en esas ecuaciones $z = l$ y veremos cómo resulta nulo el valor de la flecha (de las ordenadas y) en dicho punto medio.

Hecha la salvedad, pasamos a tratar de los ejercicios o distribuciones sencillas de momentos, objeto de la figura 5.^a, que presentan sobre los tratados hasta ahora la interesante novedad de que el par flector de momento M no actúa en un nudo, sino en un punto de una de las barras; y para mayor claridad o más completa exposición, haremos una aplicación previa de nuestra expresión [37] a dos *nudos singulares*, repitiendo algo expuesto ya años ha en mi folleto.

Son dichos nudos singulares, la articulación y el empotramiento perfecto, que bien podemos considerar como nudo común a dos barras, lo mismo el uno que la otra. La expresión [37], para el caso general de dos barras, da para una de ellas:

$$m_1 = \frac{\frac{I_1}{l_1}}{\frac{I_1}{l_1} + \frac{I_2}{l_2}} M = \frac{\frac{1}{l_1}}{\frac{1}{l_1} + \frac{I_2}{l_2 I_1}} M. \quad [45]$$

El caso del empotramiento perfecto, corresponde a la barra de características l_1 é I_1 , cuando la del subíndice 2 tiene una I_2 infinitamente grande; y en-

tonces, según la expresión [45], nos da $m_1 = 0$. El caso de la articulación, corresponde a la barra de características I_1 é I_1 cuando la del subíndice 2 tiene una I_2 infinitamente pequeña (prácticamente nula), y entonces nos da la expresión [45], que $m_1 = M$.

principio de superposición, como ya veremos, alcanzando sencillamente las más altas cimas del pleno convencimiento, a las que llegaremos sin la menor molestia, sin quebranto doctrinal alguno.

Resolvimos en el anterior artículo el ejercicio de

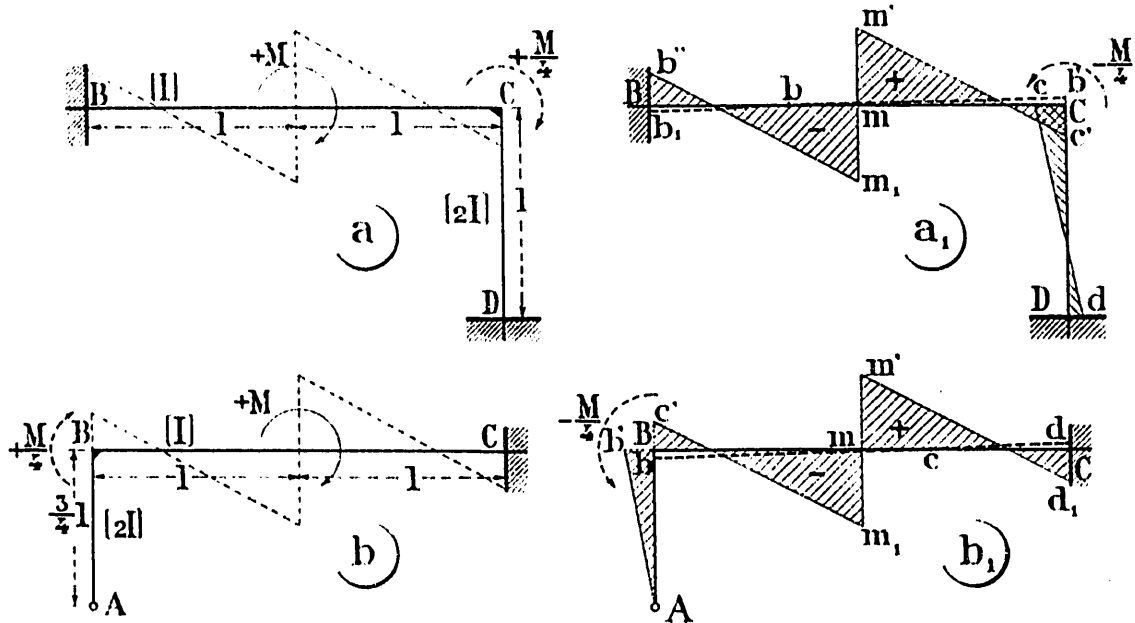


Figura 5.ª

Con tales elementos vamos a tratar el caso a) a_1) de la figura 5.ª. Trátase de dos barras de longitudes y momentos de inercia diferentes, como puede verse en la misma figura, y en el punto medio de la barra horizontal actúa un par flector de momento M . Esta barra horizontal está perfectamente empotrada en su extremo izquierdo, pero en el derecho ni está articulada ni perfectamente empotrada. Es el caso que anteriormente se dijo del *semiempotramiento* o del *empotramiento elástico*, dos designaciones a cual más deficiente, pero que habremos de emplear a falta de otras mejores, confiando en que no tardará algún *semigenio* en facilitarnos adecuada denominación, que muchos impacientemente esperamos como agua de mayo. Y... ¡descúbranse ustedes! aquí viene la ingeniosa ocurrencia del Prof. Hardy Cross: No está esa barra horizontal de que tratamos perfectamente empotrada en sus dos extremos, por no estarlo en su extremo derecho, ¿verdad?; pues ¡hagamos que lo esté, poniendo o haciendo actuar en dicho extremo (para quitarlo después) un par flector de momento adecuado! Es ni más ni menos que un *pon y quita* que vamos a detallar en lo que sigue y que está debidamente avalado o autorizado por el fundamental

una viga empotrada en sus extremos con longitud $2l$ y sometida en su punto medio a la acción de un par flector de momento M (véase la fig. 2.ª), idéntica, por consecuencia, a la barra horizontal de la parte a) a_1) de nuestra figura 5.ª. En la parte b) de la figura 2.ª representamos la variación de los momentos flectores en la barra perfectamente empotrada en sus extremos del caso antes estudiado, y que hemos reproducido en las líneas inclinadas de trazo de la parte a) de nuestra figura 5.ª. El momento flector en el extremo derecho, como vimos, tiene el valor (barra sobre nudo) $-\frac{M}{4}$; luego poniendo en el nudo un par flector (flecha con línea de trazos también) de momento $+\frac{M}{4}$, tendremos estas dos cosas:

a) La barra horizontal perfectamente empotrada en sus extremos.

b) El nudo común a las dos barras sometido a un par flector de momento nulo (al resultante de $+\frac{M}{4}$ y $-\frac{M}{4}$), por lo que no ha lugar a efectuar distribución alguna.

Vamos ahora a quitar el par flector adicionado;

vamos a deducir sus efectos o a hallar los debidos al par $-\frac{M}{4}$ actuando en el mismo nudo, lo que ha sido objeto de la parte a_1) de esta figura 5.^a, en la que hemos totalizado, además, como se explicará, para llegar a las superficies rayadas limitadas por la distribución o leyes de variación de los momentos flectores en nuestro ejercicio, representadas de líneas llenas.

Adviértese, por de pronto, cómo por el *pon y quita* (por el *pon* a secas, mejor dicho) el primer paso de la distribución Cross de los momentos flectores, nos ha facilitado el modo de reducir los problemas o cuestiones de barras *cargadas* (entendiendo por tales las sometidas a acciones en puntos o secciones diferentes de sus extremos) a más manejables o asequibles cuestiones de acciones en los nudos, como en el caso de que se trata acontece.

Fijémonos en la parte a_1) de nuestra figura 5.^a. Sólo actúa el par flector de momento $-\frac{M}{4}$ en el nudo común a las dos barras; el nudo no es susceptible de traslaciones, por lo que la aplicación de la expresión [37] nos pone inmediatamente al cabo de la calle, al darnos la distribución del indicado momento $-\frac{M}{4}$. La citada expresión nos da:

Para la barra horizontal:

$$-Cb' = m_h = \frac{\frac{2l}{l}}{\frac{l}{2l} + \frac{2l}{l}} \cdot \left(-\frac{M}{4}\right) = -\frac{M}{20}.$$

Para la barra vertical:

$$Cc = m_v = \frac{\frac{2l}{l}}{\frac{l}{2l} + \frac{2l}{l}} \cdot \left(-\frac{M}{4}\right) = -\frac{M}{5}.$$

Son éstas, acciones del nudo sobre las barras concurrentes en él. Las de las barras sobre el nudo tienen signos contrarios (es el principio fundamental básico en Mecánica y Resistencia de Materiales, referente a acciones y reacciones), lo que nos permite escribir:

$$-\frac{M}{4} - m_h - m_v = -\frac{M}{4} + \frac{M}{20} + \frac{M}{5} = 0;$$

por lo que el nudo está en equilibrio; que de tener valores los momentos que no verificaren la anterior suma, existiría momento en el nudo, motivo de giro diferente en las barras que en él concurren.

Recorriendo nuestra estructura en el sentido BCD , daremos los signos de los momentos (de igual modo que en la parte a) ya tratada), teniendo en cuenta los de los lados de las secciones que dejen el empotramiento B a su izquierda. Por ello, en la parte a_1) de la figura 5.^a es positivo e igual a $+\frac{M}{20}$ el momento (barra sobre nudo) representado por el segmento Cb' , mientras que es negativo y vale $-\frac{M}{5}$ el que representa el segmento Cc (acción del nudo sobre la barra vertical). Los puntos b' y c , juntamente con los b_1 y d , definen las rectas b_1b' y cd , que representan las leyes de variación de momentos en nuestras barras, originadas por la acción del par flector de momento $-\frac{M}{4}$. Los momentos flectores en B y en D se han tomado iguales a las mitades, con signos contrarios de los representados por Cb' y Cc ; es decir, que:

$$Bb_1 = -\frac{Cb'}{2} = -\frac{M}{40} \quad y \quad Dd = -\frac{Cc}{2} = +\frac{M}{10}$$

conforme a lo que ya vimos en el anterior artículo y representamos en las partes b) y c) de la figura 1.^a.

La recta b_1b' está marcada de trazos y representada con línea llena la cd , por lo que pasamos a explicar. Es que se ha representado con línea llena la distribución total de momentos, y a la parte correspondiente a la distribución del par $-\frac{M}{4}$ hemos sumado la de la parte a) de la figura, en la que, como se ve, son nulos los momentos en la barra vertical. Hemos sumado esos efectos, según demanda el *principio de superposición*, con lo que, al haberse tomado en consideración los del par $-\frac{M}{4}$ y del par $\frac{M}{4}$, restarán solamente los debidos al par M actuante en el punto medio de la barra horizontal. Veamos los valores de los segmentos que definen la línea llena (las líneas llenas, mejor dicho) que limitan las superficies rayadas de la parte a_1) de la figura 5.^a, sumas en la barra horizontal de los efectos señalados en la parte a) por las líneas de trazos con los debidos al par de momento $-\frac{M}{4}$ dados por la recta inclinada b_1b' .

En el empotramiento izquierdo de la barra horizontal vale el momento $+\frac{M}{4}$, según vimos en el primer artículo de esta serie (núm. 2877 de la RE-

VISTA); y como $B b_1$ se ha dicho que tiene por valor $-\frac{M}{40}$, deducimos para el momento representado por el segmento $B b''$:

$$B b'' = \frac{M}{4} - \frac{M}{40} = + \frac{9}{40} M;$$

y, análogamente, vale el segmento $C c'$:

$$C c' = -\frac{M}{4} + \frac{M}{20} = -\frac{M}{5} \dots \left(-\frac{M}{4} + C b'\right).$$

Calculemos ahora los segmentos $m m'$ y $m m_1$ de la parte a_1 de la figura 5.^a. En la parte a de la misma, en su punto medio, tiene el momento flector los dos valores $-\frac{M}{2}$ y $+\frac{M}{2}$, como sabemos; nos bastará, por ello, *sumarles* el valor de la ordenada de la recta $b_1 b'$ en el punto medio de la barra, que es:

$$\frac{B b_1 + C b'}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{M}{40} + \frac{M}{20}\right) = \frac{M}{80};$$

y así tendremos:

$$m m' = \frac{M}{2} + \frac{M}{80} = + \frac{41}{80} M$$

y

$$m m_1 = -\frac{M}{2} + \frac{M}{80} = -\frac{39}{80} M.$$

Por vía de comprobación vamos a deducir el esfuerzo tangencial en cada mitad de la barra, que es, evidentemente:

En la media barra de la izquierda:

$$(m m_1 - B b'') : l = \left(-\frac{39}{80} M - \frac{9}{40} M\right) : l = -\frac{57}{80} \cdot \frac{M}{l}.$$

En la media barra de la derecha:

$$(C c' - m m') : l = \left(-\frac{M}{5} - \frac{41}{80} M\right) : l = -\frac{57}{80} \cdot \frac{M}{l}.$$

Y así debe suceder, porque ambos son, en nuestro caso, el valor de la reacción vertical en B , que, naturalmente, no puede alterar la actuación del par flector de momento M en el centro, en el punto medio, de la barra horizontal de nuestro sencillo ejercicio.

No menos sencillo es el desarrollado en las partes b) y b_1) de la figura 5.^a; y me propongo, en los

renglones que voy a dedicarle, poner coto a la empalagosa sencillez, causante de mi frustrada colección de preludios de ensayos sobre "La Viga Viendeel y el método de Cross", años ha pasada a mejor vida, de la que sólo vino a *sobrevivir* mi conocido folleto (véase su página 13); lo cual no quita para que si algún lector (siempre que escribo es por estar en la creencia de que los tengo) descare cualquier aclaración o ampliación acerca del particular que fuere, me tenga dispuesto a atenderle como mejor se me ocurra en todo momento.

Se diferencia este ejercicio del acabado de tratar en que la barra vertical tiene articulación en su base y su longitud es *tres cuartas partes* de l ; como quedó al principio demostrado que podía aplicarse la expresión [37] en los casos de barras empotradas y articuladas concurrentes en un punto, multiplicando por *cuatro tercios* las longitudes de las articuladas, tenemos que, a los efectos de la distribución de momentos, se comporta nuestra barra vertical como la de la parte a) de la figura 5.^a, por ser su longitud, a los efectos de tal distribución:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} l = l.$$

Se *pone* en el nudo B , y después se *quita*, un par flector auxiliar de momento $+\frac{M}{4}$. En la parte

b) de la figura la adición del par $+\frac{M}{4}$ hace que la barra horizontal sometida a la acción de un par flector de momento $+M$ se comporte como perfectamente empotrada, no habiendo por ello giro en B ni momento a distribuir en tal nudo, y es nulo el momento en la barra vertical. Redúcese, pues, la ley de variación de momentos en esa parte b) de la figura a la representada por las inclinadas de trazos, que son las mismas dibujadas en la figura 2 (número 2877 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS); es lo que del *pon* sacamos en limpio.

Vamos al *quita*. En la parte b_1) de la figura 5.^a hemos distribuido el momento $-\frac{M}{4}$; y como anteriormente, ha correspondido la quinta parte a la barra horizontal y las cuatro quintas partes a la vertical y articulada en su base. Valen, por consecuencia:

$$B b = -\frac{1}{5} \cdot \frac{M}{4} = -\frac{M}{20} \quad \text{y} \quad B b' = \frac{4}{5} \cdot \frac{M}{4} = \frac{M}{5}$$

(la segunda con signo positivo, por haberse repre-

sentado acción de la barra vertical sobre el nudo).
Por consecuencia:

$$Cd = -\frac{Bb}{2} = +\frac{M}{40}; \quad Cd_1 = -\frac{M}{4} + \frac{M}{40} = -\frac{9}{40} M;$$

$$Bc' = \frac{M}{4} - \frac{M}{20} = \frac{5-1}{20} M = \frac{M}{5}.$$

La ordenada de la línea bcd , ahora negativa, vale:

$$\frac{Bb + Cd}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{M}{20} + \frac{M}{40} \right) = -\frac{M}{80},$$

por lo que:

$$m m' = \left(\frac{M}{2} - \frac{M}{80} \right) = +\frac{39}{80} M;$$

$$m_1 m = \left(-\frac{M}{2} - \frac{M}{80} \right) = -\frac{41}{80} M;$$

y estos valores del esfuerzo cortante:

En la mitad izquierda de la barra horizontal:

$$(m m_1 - Bc') : l = \left(-\frac{41}{80} M - \frac{M}{5} \right) : l = -\frac{57}{80} \cdot \frac{M}{l}.$$

En la mitad derecha de la barra horizontal:

$$(Cd_1 - m m') : l = \left(-\frac{9}{40} M - \frac{39}{80} M \right) : l = -\frac{57}{80} \cdot \frac{M}{l}.$$

La enjundia del método de Cross, lo mismo en el método *a medio hacer* que en la *acabada* distribución Cross de los momentos flectores, reside en lo del *pon y quita*. No hemos hecho hasta ahora más que entrar en la entraña del método; que penetrar en ella totalmente requiere el desarrollo de ejercicio un poco más complicado que los que llevamos revista-dos hasta ahora. La inclusión de ejercicio tal hubiera alargado demasiado el presente artículo, y he preferido que sea objeto de una segunda parte del mismo, de un artículo tercero, en el que se *tratará* un cálculo de viga de tres tramos por el método de Cross.

FE DE ERRATAS ADVERTIDAS EN EL ARTÍCULO DEL NÚMERO 2877 DE LA «REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS», CORRESPONDIENTE A ENERO DE 1955

Pág.	Col.	Línea	Donde figura	Debe decir
18	2. ^a	5. ^a	$y = \left(\frac{z^2}{2} - \text{etc.} \right)$	$y = \left(\frac{z^2}{2} - \text{etc.} \right)$
18	2. ^a	17. ^a	$\text{tg } \alpha_z = - (z - \text{etc.})$	$\text{tg } \alpha_z = - (2 - \text{etc.})$
19	1. ^a	34. ^o	$\frac{M l}{4 E I}$	$\frac{M l}{4 E I}$