

CONTRIBUCION AL CALCULO DE PRESAS DE CONTRAFUERTE DE ESPESOR VARIABLE

Por FEDERICO GODED,
Ingeniero de Caminos.

Se hace una exposición de distintos métodos de cálculo de presas de contrafuertes de espesor variable, que el autor comenta acertadamente. En la segunda parte, que dejamos para el número próximo, se trata de aplicación a obras en que ha intervenido el autor.

I

Ciñéndonos exclusivamente a la forma geométrica del contrafuerte, cabe hacer una división esencial en este tipo de presas; con contrafuerte de sección constante y con contrafuerte de sección variable. Cuando todas las dimensiones de una sección horizontal cualquiera se mantienen fijas al variar la altura, excepto la longitud de la sección, se dice que el contrafuerte es de sección constante, y variable, cuando una o más de las restantes dimensiones de la sección varían con la altura.

Cuando la altura de la presa es pequeña, no tiene apenas interés proyectar un contrafuerte variable. En cambio, esto llega a ser casi una necesidad para alturas grandes si se quiere llegar simultáneamente a una racional utilización del material y a una buena distribución de tensiones.

Tanto en un caso como en el otro, se suele admitir la hipótesis, a efectos de cálculo, de suponer un estado plano de tensiones. Así, y tomando como plano x, y el de simetría del contrafuerte, se admite que en todos los puntos del contrafuerte se verifica:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad [1]$$

En realidad, una presa de gravedad de planta recta está constituida por contrafuertes de espesor constante, que es la distancia entre juntas, y la hipótesis anterior sólo se realiza en uno de estos contrafuertes. Cuanto más nos apartemos de este contrafuerte ideal menos se realizará esta suposición. No obstante, cuando el contrafuerte es de sección constante puede admitirse esto sin grave error, salvo en la cabeza del mismo, región en la cual, especialmente cuando se adopta la forma denominada cabeza de diamante, una elemental intuición evidencia que las tres tensiones no pueden despreciarse.

Así pues, en contrafuertes de sección constante la hipótesis de suponer un estado de tensión bidimensional es admisible, al menos en las zonas alejadas de la cabeza, zonas en las que puede aplicarse razonablemente el principio de Saint-Venant.

Como consecuencia de esto, pueden emplearse en este tipo de contrafuertes los métodos de cálculo empleados en las presas de gravedad. Así pues, la solución de tensiones lineal, conocida entre nosotros como solución de Pigeaud:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_1 x + b_1 y, \\ \sigma_y &= a_2 x + b_2 y, \\ \tau_{xy} &= a_3 x + b_3 y, \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

proporciona, con las salvedades apuntadas, una imagen aproximada de la distribución de tensiones en el interior del contrafuerte, cuando la forma de éste es triangular (1).

Bastará, pues, operar con una presión ficticia igual a la real multiplicada por la relación existente entre la distancia entre ejes de contrafuertes y el espesor de los mismos.

Cuando la forma, en alzado, de éste se aparte sensiblemente de la triangular o las secciones horizontales se apartan también mucho de la forma rectangular, se puede adoptar también aquí el método de cálculo por juntas horizontales (2).

Una nueva causa de error se añade ahora, que es inherente a este método de cálculo, el cual se basa en utilizar únicamente las ecuaciones de equilibrio. Las deformaciones así obtenidas es sabido que no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad. No obstante esto, es un método muy empleado y utilizándolo se han proyectado presas muy importantes.

Tanto el primer método como el segundo aceptan la premisa de suponer una ley lineal para las σ_y (figura 1.^a) entre los dos paramentos. Esta hipótesis, como hizo notar el profesor Stucky (3), da resultados satisfactorios solamente en los dos casos extre-

(1) Ver, por ejemplo: REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, agosto 1945, Sres. Zabala y Fernández Casado.

(2) *Sallos de agua y presas de embalse*, de J. L. Gómez Navarro y J. J.-Aracil, 3.^a ed., t. II, pág. 2.303, y REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, año 1933, I. Martín Alonso, "Presa de contrafuertes", págs. 313, 335, 357 y 371.

(3) *Mesures et observations sur le barrage de la Dixence de la S. A. l'énergie de l'ouest Suisse*, por A. Stucky.

The diagram illustrates a dam cross-section with a trapezoidal shape. A coordinate system is established with the x -axis pointing horizontally to the right and the y -axis pointing vertically downwards. A square element is shown within the dam material. The stress components acting on this element are labeled as follows: σ_x (normal stress) acting horizontally on the vertical faces, σ_y (normal stress) acting vertically on the horizontal faces, and τ_{xy} (shear stress) acting tangentially on all four faces. At the base of the dam, a series of vertical arrows pointing downwards represent a uniformly distributed load.

229

Evidentemente, es prácticamente irrealizable con un contrafuerte de características geométricas tan irregulares tratar de encontrar una solución de tensiones exacta. Por ello se admite, como en los métodos de cálculo expuestos, las dos hipótesis:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \sigma_y = x f_1(y) + f_2(y). \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

Las dos funciones, f_1 y f_2 , se pueden obtener una vez fijadas las características geométricas de la sección, admitiendo la hipótesis plana de Navier, y que la ley lineal resultante para la σ_y es la obtenida por la conocida fórmula de la flexión compuesta:

$$\sigma_y = \frac{Mv}{I} \pm \frac{N}{\Omega}, \quad [4]$$

siendo aquí M el momento con respecto al centro de gravedad de la sección FB de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la parte de contrafuerte situada por encima de FB , y N , la componente vertical de dicha resultante.

Dada la complejidad que frecuentemente tienen las funciones f_1 y f_2 , conviene realizar el cálculo con valores numéricos para una serie de alturas, $y = y_n + n \Delta y_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). En general, se suele tomar $\Delta y_n = 5$ metros (1). Una vez conocidas las σ_y en los planos y_n , pueden hallarse las correspondientes a planos intermedios, suponiendo que estas tensiones siguen una ley lineal entre cada dos puntos de una misma vertical, A y D .

El admitir las hipótesis resumidas en [3] y [4] entraña diversos errores, que hemos procurado someramente analizar, pero como ésta es prácticamente la única forma de abordar el problema, es preciso aceptar el orden de aproximación así obtenido.

Por ello, conscientes del orden de aproximación grosero con el que estamos trabajando, trataremos, al hallar las τ_{xy} y σ_x , únicamente de no incrementar los errores, renunciando a utilizar métodos de cálculo muy depurados, lo que sería absurdo.

Por lo tanto, para la obtención de estas tensiones se utilizan únicamente las ecuaciones de equilibrio,

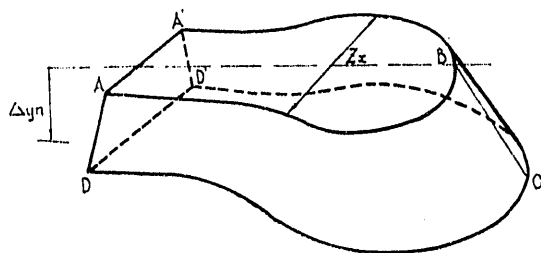


Figura 3.ª

(1) Este valor de Δy_n es el adoptado por nuestro competente compañero D. Alejandro del Campo, en el cálculo de la presa de Chandreja, y por el autor, en el cálculo de la presa de Prada.

pero en vez de estudiar el equilibrio de un paralelepípedo elemental (1), lo que complica innecesariamente el cálculo, consideraremos el equilibrio de un elemento como el $ABCD$ de la figura 2.ª. Este elemento es el dibujado en perspectiva en la figura 3.ª. Sobre el área A_0 , superior de este elemento, las σ_y , ya conocidas, tendrán una resultante de valor:

$$P_0 = \int_{x_A}^{x_B} \sigma_{y_n} Z_x dx, \quad [5]$$

siendo σ_{y_n} los valores que toma σ_y para $y = y_n$, y Z_x el ancho del contrafuerte en el punto en que se evalúa σ_y .

Análogamente, las σ_y ejercidas sobre el área $DD'C$, que llamaremos A_1 , tienen una resultante:

$$P_1 = \int_{x_D}^{x_C} \sigma_{y_{n+1}} Z_x dx. \quad [6]$$

Las restantes fuerzas verticales que actúan sobre el elemento son el peso, y la resultante T , de las tensiones τ_{xy} que actúan sobre el área $AA'D'D$. Esta última vale:

$$T = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \tau_{xy} \cdot Z \cdot dy = \tau_m Z_m \cdot \Delta y_n. \quad [7]$$

Siendo Z el ancho del contrafuerte en la sección $x = x_A$, y a la misma altura en que se evalúa τ_{xy} , τ_m la tensión tangencial media en $AA'D'D$ y:

$$Z_m = \frac{1}{2} (AA' + DD'). \quad [8]$$

Igualmente, el peso del elemento será:

$$\Delta = \frac{1}{2} (A_0 + A_1) \Delta y_n \times \pi = A_m \times \Delta y_n \times \pi. \quad [9]$$

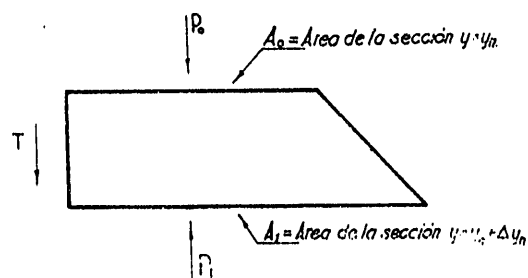


Figura 4.ª

Siendo π el peso específico del hormigón. La condición de equilibrio se expresará así:

$$T = P_1 - P_0 - \Delta. \quad [10]$$

Adoptando como sentido positivo de T el indicado en la figura 4.ª.

(1) Ver artículo antes citado de Martín Alonso.

Reemplazando en [10] las [7] y [9], resulta:

$$\tau_m Z_m \cdot \Delta y_n = P_1 - P_0 - \pi A_m \cdot \Delta y_n, \quad [11]$$

y de aquí despejamos τ_m :

$$\tau_m = \frac{1}{Z_m} \left[\frac{P_1 - P_0}{\Delta y_n} - \pi A_m \right] \quad [12]$$

cuando $\Delta y_n \rightarrow 0$ en el límite resulta:

$$\tau_A = \frac{1}{Z_A} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{y=y_n} - \pi A_0 \right]. \quad [13]$$

Siendo P y A_0 funciones de las dos variables x e y , para hallar las tensiones τ_{xy} por medio de la sencilla fórmula anterior, es conveniente encontrar las leyes de variación de P y A en las rectas $x = \text{constante}$. Como además conviene, para simplificar el trabajo, como ya dijimos, considerar la presa dividida por planos horizontales, nos vemos, pues, conducidos, por la dos razones antedichas, a considerar dividida la presa para facilidad de cálculo por una retícula como la indicada en la figura 5.^a.

La aproximación obtenida dependerá del tamaño de la retícula adoptada. Por las razones antes aducidas, parece suficiente que la distancia Δh entre verticales sea del mismo orden que Δy_n . En el cálculo del contrafuerte de San Sebastián de Pradorramis- quedo hemos tomado $\Delta h = 4$ metros y $\Delta y_n = 5$ metros.

Una vez obtenidos los valores de P para todos

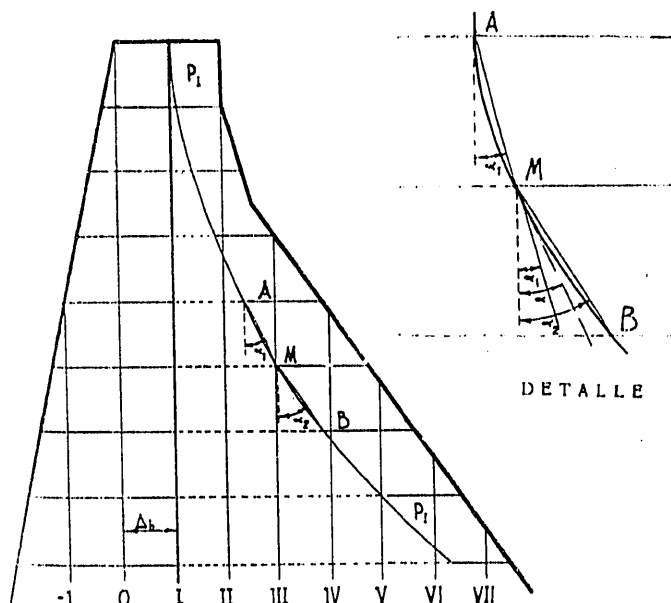


Figura 5.^a

los puntos de la retícula, para obtener el valor de $\frac{\partial P}{\partial y}$, conviene seguir el procedimiento siguiente. La superficie:

$$P = P(x, y); \quad [14]$$

conocida con aproximación suficiente por las ordenadas en todos los puntos mencionados, al ser

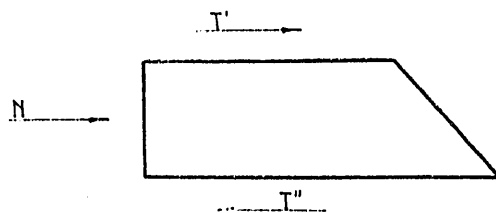


Figura 6.^a

cortada por los planos $x = \text{constante}$, produce curvas que al ser abatidas sobre el plano x, y tienen la forma general indicada en la figura 5.^a, en la cual se indica la curva correspondiente a una sección. La derivada $\frac{\partial P}{\partial y}$ en un punto M estará exactamente me-

didada por el valor de $\text{tg } \alpha$, pero para simplificar, y por las razones varias veces repetidas del orden de aproximación con que estamos trabajando, puede aceptarse:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \text{tg } \alpha = \text{tg } \frac{a_1 + a_2}{2}; \quad [15]$$

y reemplazando este valor en la fórmula [13], obtenemos τ_{xy} en el punto que se estudia.

También es preciso conocer la superficie:

$$A = A(x, y) \quad [16]$$

para hallar τ_{xy} , y ello se logra con aproximación suficiente, calculando las A como se hizo anteriormente con las P , únicamente en los puntos de la retícula.

Una vez halladas σ_y y τ_{xy} , las σ_x se obtienen de una manera enteramente análoga. Para ello basta considerar la acción de las fuerzas horizontales sobre el mismo elemento antes considerado (fig. 3.^a). Las τ_{xy} producirán sobre la cara superior del mismo una resultante:

$$T' = \int_{x_A}^{x_B} \tau_{1xy} Z_x dx, \quad [17]$$

siendo τ_{1xy} los valores que toma τ_{xy} en los mismos puntos en que se evalúa Z_x . Igualmente, sobre la cara inferior de las mismas tensiones originarán una resultante:

$$T'' = \int_{x_D}^{x_C} \tau_{2xy} Z_x dx. \quad [18]$$

Las σ_x que actúan sobre el plano vertical AA' DD' , tienen una resultante:

$$N = \sigma_{xm} Z_m \cdot \Delta y_n, \quad [19]$$

teniendo aquí Z_m y Δy_n los mismos significados ya expuestos.

La condición de equilibrio de las fuerzas hori-

Z_x en A , tendremos, al pasar al límite en la expresión anterior:

$$\sigma_A = \frac{1}{Z_A} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_n} \quad [22]$$

Para el cálculo de σ_A se puede utilizar la misma retícula anterior. La superficie:

$$T = T(x, y) \quad [23]$$

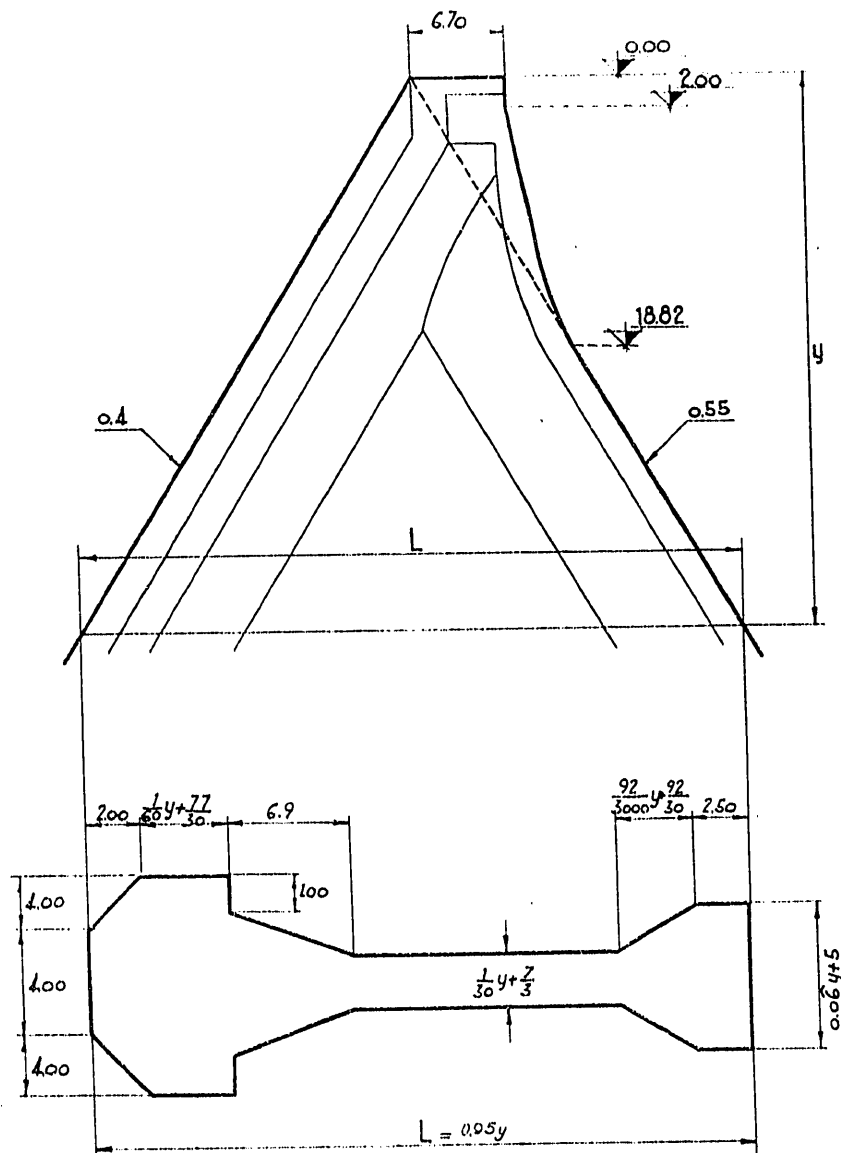


Figura 7.ª

zontales, adoptando como sentido positivo para las N , T' y T'' los indicados en la figura 6.ª, será:

$$N = T'' - T'; \quad [20]$$

o bien:

$$\sigma_{xm} Z_m = \frac{T'' - T'}{\Delta y_n}; \quad [21]$$

y llamando σ_A y Z_A a los valores que toman σ_x y

se conoce con aproximación suficiente hallando las ordenadas de la misma únicamente en los puntos de la retícula por medio de la fórmula [17], y una vez conocida se hallan las intersecciones de la superficie por los planos $x = \text{constante}$ (III, II, I, 0, I, II, ...) y se abaten sobre el plano x y las curvas obtenidas, deduciéndose las derivadas $\frac{\partial T}{\partial y}$ por el mismo procedimiento antes expuesto.

(Continuará.)