

APLICABILIDAD DEL METODO DE THIEM A LA DETERMINACION DE PERMEABILIDADES

Por ALBERTO BENITEZ,
Ingeniero de Caminos.

El autor expone sucintamente las modernas tendencias sobre el problema, poco conocidas aún en nuestro país, e incluye un interesante estudio original sobre el mismo, fruto de sus trabajos sobre el tema en Estados Unidos.

1. Introducción.

Uno de los problemas más importantes en el cálculo del caudal de una captación subterránea es el de la determinación de la permeabilidad del acuífero ¹ que contiene el sistema captante.

Como es sabido, hay métodos muy variados para determinar permeabilidades, que podemos clasificar en dos grandes grupos: métodos de laboratorio y métodos de determinación en el campo. Entre los primeros están el de determinación indirecta de la permeabilidad a través del estudio granulométrico de las partículas, con la aplicación de una de las muchas fórmulas propuestas (su misma abundancia predispone automáticamente a considerarlas con escepticismo), y el de determinación directa por medio de permeámetros de distintos tipos, en los cuales, midiendo el caudal y la carga hidrostática, se determina el coeficiente de permeabilidad en la fórmula de Darcy. Modernamente se tiene la tendencia de conceder un valor relativo a los resultados de estos métodos de laboratorio, por considerar, en primer lugar, que siempre la muestra de terreno ha de haber sufrido una perturbación más o menos intensa que puede influir mucho en su permeabilidad, y en segundo, y principalmente, porque lo que interesa en la práctica es una permeabilidad media eficaz del acuífero, y los valores obtenidos en una muestra, necesariamente de volumen muy reducido, no pueden representar, en modo alguno, esta permeabilidad media buscada.

Los métodos de determinación de la permeabilidad en el campo pueden dividirse en los que determinan la velocidad de las aguas subterráneas: introducción de colorantes o soluciones salinas en el terreno y detección colorimétrica, química o eléctrica de esos productos en otros puntos del acuífero. Estos ensayos, acompañados de la medición de la diferencia de cargas hidráulicas en los puntos conside-

rados dan de nuevo el coeficiente de permeabilidad de Darcy. El otro grupo de sistemas de determinación de la permeabilidad media en el campo, y el que se considera actualmente como el más eficaz y representativo, es el de empleo de ensayos de bombeo con sondeos de observación de la variación de los niveles freáticos durante el bombeo.

Dentro de la utilización de ensayos de bombeo con observaciones de nivel en sondeos de observación próximos cabe seguir dos procedimientos distintos en la determinación de la permeabilidad del acuífero: uno es el derivado de la fórmula cinemática de Theis; el otro es el método estático de Theim suponiendo alcanzado el equilibrio, que no es más que la aplicación de la fórmula de Dupuit para la determinación del coeficiente de permeabilidad.

Uno de los progresos más notables en el estudio de la hidráulica subterránea, desde los tiempos de Darcy, ha sido hecho por C. V. Theis, el cual, basándose en analogías de transmisión de calor a través de medios homogéneos, descubrió en 1935 la fórmula que expresa el descenso de nivel freático en un sondeo de observación en función del tiempo de duración del bombeo ¹. Posteriormente, C. E. Jacob obtuvo la misma fórmula basándose exclusivamente en conceptos hidráulicos ². La fórmula cinemática de Theis es la siguiente:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \int_{\frac{r^2 S}{4Tt}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad (1)$$

en la cual:

s = descenso de nivel freático en el pozo de observación, después de un tiempo, t , desde el principio del bombeo a partir de una posición de equilibrio;

¹ C. V. Theis: "The Relation between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground-Water Storage", *Trans. Am. Geophys. Union*, 1935, págs. 519-524.

² C. E. Jacob: "On the Flow of Water in an Elastic Artesian Aquifer", *Trans. Am. Geophys. Union*, 1940, páginas 574-586.

¹ Proponemos esta palabra, del latín "aqua" y "ferre", llevar, con el antecedente inglés "aquifer", para designar: "formación de permeabilidad relativamente grande, total o parcialmente saturada de agua", a falta de un término apropiado en nuestro idioma, en el que sólo existe como adjetivo.

Q = caudal bombeado del pozo de bombeo;
 T = transmisibilidad del acuífero; es decir, es el producto de su permeabilidad por su espesor saturado, $T = Pm$; este concepto de transmisibilidad (*transmissibility*), o coeficiente de transmisibilidad, ha sido también introducido por Theis recientemente y resulta de aplicación muy práctica en los estudios de hidrología subterránea;
 r = distancia horizontal del pozo de bombeo al sondeo de observación;
 S = coeficiente de almacenamiento, cantidad de agua que se puede extraer durante el bombeo de la unidad de volumen de acuífero saturado. Es equivalente a la porosidad, menos la retención específica, es decir, menos aquella cantidad de agua que queda en la formación después de haber extraído toda la posible mediante el bombeo;
 t = tiempo a partir del principio del bombeo, supuesto que éste comienza en un estado de equilibrio;

u = variable de integración $u = \frac{r^2 S}{4 T t}$.

Con esta fórmula y la determinación en el terreno de los valores de s , Q , r y t en un sistema homogéneo de unidades, el empleo de tablas de valores de la integral exponencial y el uso de un ingenioso artificio gráfico se pueden determinar la transmisibilidad T (y, por tanto, la permeabilidad P , habiendo conocido el espesor saturado m mediante los sondeos efectuados para el pozo de bombeo y el de observación) y también el coeficiente de almacenamiento S .

A pesar de la mayor sencillez aparente de este método, que sólo necesita de un pozo de observación, y de su exactitud en condiciones teóricas, las mediciones de tiempos y descensos tienen que hacerse con sistemas automáticos de medida y con gran cuidado. Por esta causa y por su mayor susceptibili-

dad a errores no controlables, la tendencia actual de los especialistas ¹ parece ser la de darle mayor valor práctico al método de Thiem.

2. El método de Thiem.

La primera aplicación práctica de la ley de Darcy ² fué hecha por Dupuit en 1863 ³ al caso de una isla circular con un pozo en su centro, con hipótesis demasiado alejadas, como vemos, de una realidad tangible. Aunque el proceso se derivaba directamente de los estudios de Darcy y Dupuit, fué Gunter Thiem el primero ⁴ que aplicó las fórmulas de sus predecesores a la determinación de la permeabilidad en el terreno, mediante ensayos de bombeo. Así, de la conocida fórmula que da el descenso del nivel freático en las proximidades de un pozo bombeado, con las hipótesis indicadas más adelante:

$$s_2 - s_1 = \frac{Q}{2\pi P m} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad [2]$$

sin más que ordenar en forma diferente e introducir el concepto de transmisibilidad, con la notación anterior y la de la figura 1.^a, se obtiene la fórmula usada por Thiem:

$$T = \frac{Q}{2\pi (s_2 - s_1)} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad [3]$$

siendo, como se ha dicho, $T = P m$.

¹ F. C. Mikels: Comunicación verbal.

² H. Darcy: *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Paris, 1856.

³ J. Dupuit: *Etudes théorétiques et pratiques sur le mouvements des eaux*. Paris, 1863.

⁴ G. Thiem: *Hydrologische Methoden*. J. M. Gebhardt. Leipzig, 1906, pág. 56.

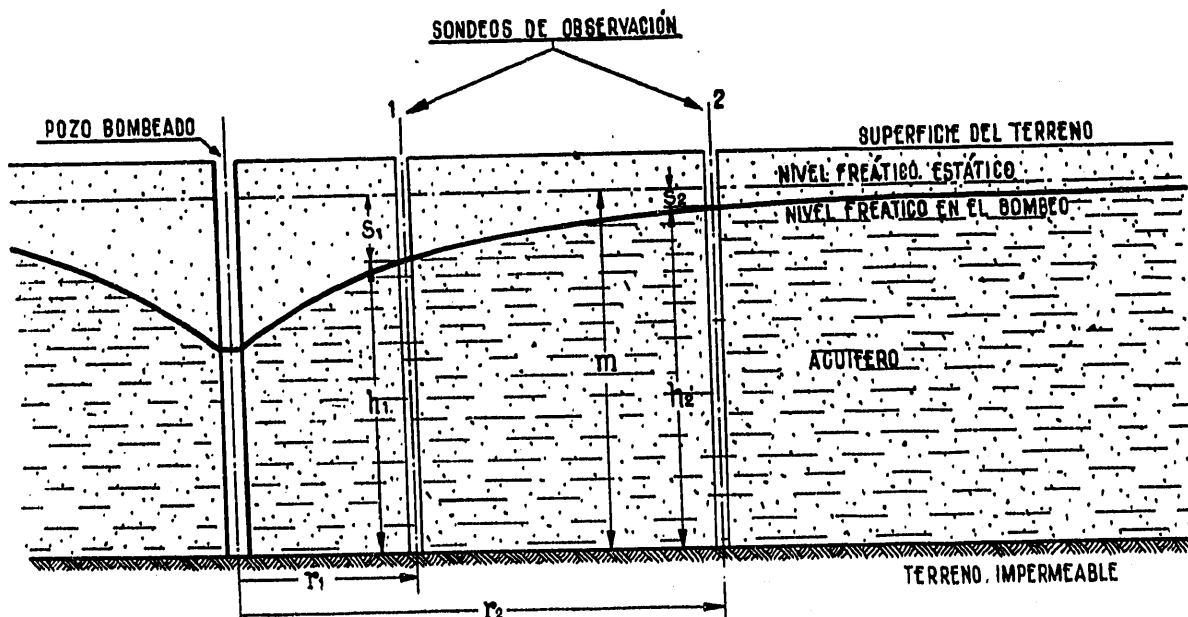


Fig. 1.^a — Esquema de un ensayo de bombeo.

En la cual, midiendo el caudal extraído, las distancias r_1 y r_2 y los descensos producidos s_1 y s_2 , se puede determinar T y, con el espesor m , conocer la permeabilidad P .

La fórmula anterior, de aspecto y aplicación tan sencillos, está basada en unas hipótesis ciertamente demasiado ideales, y el verdadero problema de su utilización en los casos prácticos reside en estimar y, a ser posible, acotar los errores producidos por esa desviación de las condiciones reales de las hipótesis de partida. Las causas de error producidas por las condiciones de contorno de los acuíferos reales, en el caso más elemental, son el objeto principal de este trabajo.

Las citadas hipótesis de partida para la deducción de la fórmula anterior son las siguientes:

1. El acuífero es homogéneo e isótropo en cuanto a su permeabilidad se refiere; de modo que su transmisibilidad es constante en todos los puntos, direcciones e instantes.
2. El acuífero se extiende indefinidamente en horizontal en todas direcciones.
3. El pozo de bombeo atraviesa completamente el acuífero, captando sus aguas en todo el espesor de éste, que se supone constante.
4. El bombeo ha continuado durante tanto tiempo como sea necesario para que se obtenga la situación de equilibrio en el momento de medir los descensos.
5. Las líneas de corriente son horizontales.
6. El régimen es laminar.

Estas mismas hipótesis, excepto la 4, naturalmente, se han tenido también presentes en la fórmula cinemática de Theis, anteriormente citada.

Para la aplicación del método de Thiem, por lo tanto, se dispondría de un pozo de bombeo y dos (preferiblemente tres, para tener comprobación y mayor seguridad) de observación, y todos ellos alineados — aunque teóricamente, y en las hipótesis antedichas, existe simetría axial y sólo intervienen las distancias al pozo de bombeo —, y después se bombearía hasta que se alcanzase el equilibrio o un estado suficiente próximo a él para que el error por esta causa fuera despreciable. Después llevaríamos las observaciones de los descensos obtenidos en los tres pozos a un papel semilogarítmico en función de las distancias al pozo de bombeo en la escala logarítmica, y los tres puntos obtenidos deberían estar en una línea recta cuya pendiente habría de ser el coeficiente $\frac{-Q}{2\pi T}$, del cual, conociendo Q , se puede obtener la transmisibilidad T .

Los errores producidos por las desviaciones de las condiciones prácticas a las hipótesis anteriores han sido considerados por distintos autores. Aquí sólo vamos a estudiar un caso elemental y únicamente en lo que se refiere a la limitación de los contornos del acuífero.

3. Condiciones de contorno.

En el caso real de que el acuífero no sea indefinido, y con las mismas hipótesis anteriores (excepto la 2, por lo tanto), la ecuación que regula el descenso en cada punto es la ecuación general de Laplace aplicada a un movimiento bidimensional en régimen permanente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad [4]$$

siendo h la carga hidráulica en el punto (x, y) .

El problema de la determinación de los descensos en cada punto sólo tiene, pues, una solución teórica en casos de contorno muy sencillos, como los que estudiamos a continuación, en los cuales puede emplearse con gran simplicidad el método de las imágenes introducido por Lord Kelvin en sus estudios de campos electrostáticos. En aquellos casos en que las condiciones del contorno no hagan posible la aplicación del método de las imágenes, puede abordarse el problema de la resolución de la ecuación de Laplace por analogías eléctricas, de membranas elásticas, o por métodos de aproximaciones sucesivas¹.

El gran poder depurador del terreno natural, en el que intervienen factores biológicos todavía no claramente definidos, así como la economía de una instalación de captación subterránea en comparación con una instalación de tratamiento de aguas superficiales, justifican la tendencia de los países avanzados hacia dar preferencia, siempre que sea posible, a utilizar sistemas de infiltración en las márgenes de ríos o lagos en vez de disponer tomas e instalaciones de depuración de sus aguas superficiales. Esto hace que se presente con gran frecuencia el caso de un acuífero cuya línea de recarga puede considerarse rectilínea, ya que, aunque en general la orilla del río o lago presente sinuosidades, la proximidad de la captación a su orilla permite asimilar el problema, con un error pequeño, al de recarga rectilínea.

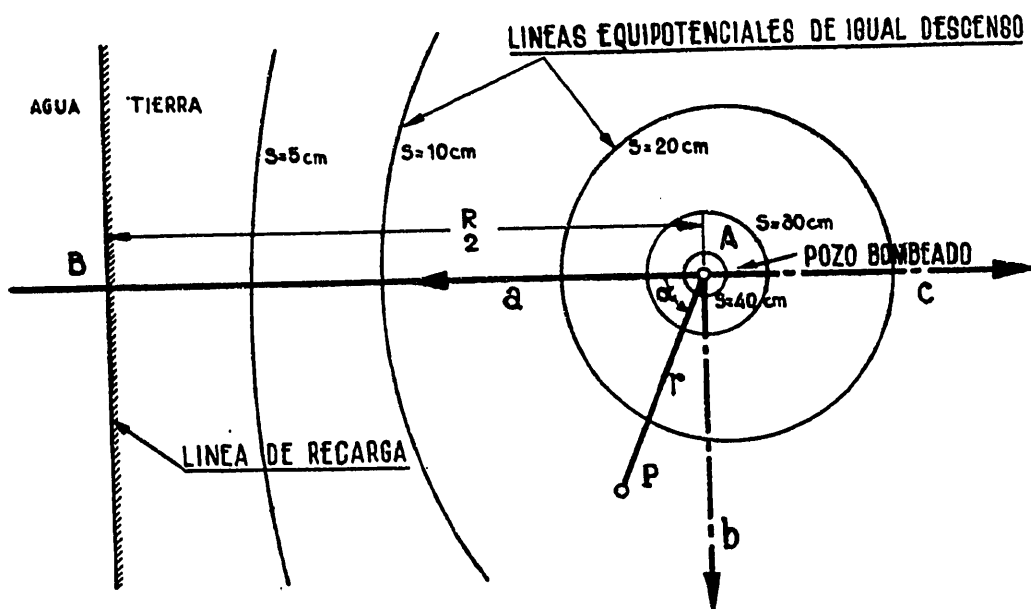
4. Acuífero semiindefinido con contorno rectilíneo².

I. Consideremos el caso teórico de la figura 2.^a, de bombeo de un pozo puntual, A , que atraviesa todo el acuífero. En las condiciones de equilibrio estático la superficie freática es horizontal. Bombeando con un cierto caudal, Q , llega un momento en que se crea un equilibrio dinámico y la superficie freática toma la forma definida por las curvas equipotenciales de la figura 2.^a.

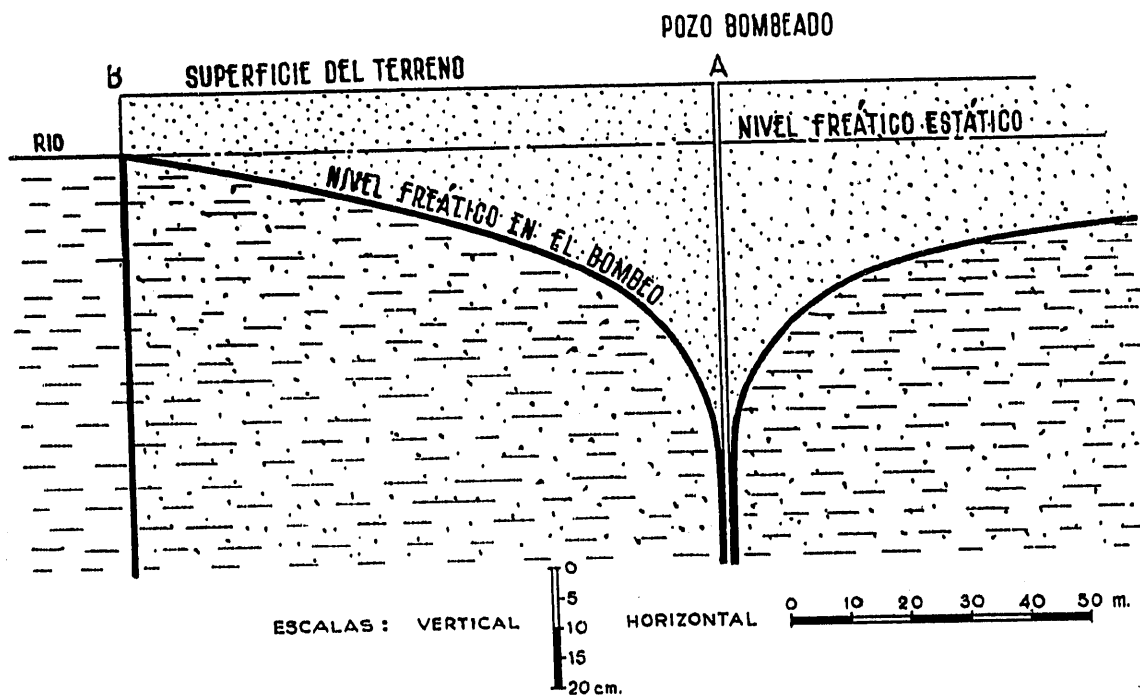
¹ R. V. Southwell: "Relaxation Methods in Theoretical Physics". Oxford Univ. Press. Londres, 1946.

² Empleamos estos términos referidos a un plano, a pesar de su impropiedad física, por estar dentro de la hipótesis de movimiento bidimensional.

PLANTA



SECCION VERTICAL A-B



ENSAYO DE BOMBEO: CAUDAL $Q=10 \text{ l/seg.}$ DISTANCIA $R=200 \text{ m.}$
 PERMEABILIDAD $P=0.159 \text{ cm/seg.}$ ESPESOR $m=10 \text{ m.}$

Fig. 2.ª -- Ejemplo de un ensayo de bombeo en un acuífero semiindefinido con recarga rectilínea.

El efecto de la recarga del río o lago, de acuerdo con el método de las imágenes, es equivalente al de un pozo imagen, A' , que produjera, supuesto el acuífero totalmente indefinido, un caudal negativo, $-Q$, es decir, al de un manantial puntual, A' , simétrico al pozo A respecto a la línea de recarga, dejando entrar en el acuífero el mismo caudal bombeado Q .

El descenso del nivel freático producido por los dos efectos superpuestos en un punto cualquiera, P , será la suma algebraica de los descensos producidos por el manantial y el pozo de bombeo.

Apliquemos la fórmula de Thiem al punto P , a distancias r y r' de A y de A' , y a otro punto M de la línea de recarga que diste r_0 tanto de A como de A' .

Debido al bombeo de A :

$$s_A - s_0 = \frac{Q}{2\pi T} (\ln r_0 - \ln r),$$

Debido a la recarga de A' :

$$s_0 - s_{A'} = \frac{Q}{2\pi T} (\ln r' - \ln r_0).$$

Sumando:

$$s_A - s_{A'} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r'}{r},$$

y llamando al primer miembro simplemente $s = s_A - s_{A'}$, que es el descenso real producido en el punto P :

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r'}{r}, \quad [5]$$

en donde para $r = r'$, correspondiente a la línea de recarga, es, efectivamente, $s = 0$.

Expresando r' en función de r y de la distancia $AA' = R$, y tomando sus cuadrados dentro del logaritmo, la ecuación anterior toma la forma:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}{r^2}, \quad [6]$$

que es la ecuación, en coordenadas cilíndricas, de la superficie freática engendrada por el bombeo, con las magnitudes indicadas en la figura 2.^a

Generalizando el método de determinación de la permeabilidad desarrollado por Thiem, que hemos apuntado antes, supongamos que se ejecuta una serie de sondeos de observación a lo largo de una línea arbitraria definida en el plano $s = 0$ por una ecuación cualquiera en coordenadas polares $f(r, \alpha) = 0$.

El incremento de descenso entre dos puntos contiguos $M(r, \alpha)$ y $N(r + dr, \alpha + d\alpha)$ de esta línea puede expresarse:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \alpha} d\alpha, \quad [7]$$

y determinando las derivadas parciales de la ecuación general anterior:

$$ds = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \left[\frac{r \cos \alpha - R}{r} dr + r \operatorname{sen} \alpha d\alpha \right]. \quad [8]$$

En la práctica se sigue la norma de efectuar los sondeos de observación alineados con el pozo de bombeo, ya que la intersección del plano definido por los sondeos de observación cortará a la superficie freática según la línea más característica de esta superficie.

Para las alineaciones hacia el río, paralela a él y alejándose de él, en la figura 2.^a, correspondientes a $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$ y $\alpha = 180^\circ$, obtenemos las curvas:

$$a) \quad s_a = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R-r}{r},$$

$$b) \quad s_b = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{R^2 + r^2}{r^2},$$

$$c) \quad s_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R+r}{r},$$

estudiadas por Raphael G. Kazmann¹ y representadas, para un caso particular, en la figura 3.^a, en un sistema semilogarítmico.

Como ya hemos indicado, el sistema operatorio seguido consiste en representar en papel semilogarítmico los descensos producidos por el bombeo cuando se ha alcanzado el equilibrio, en función del logaritmo de las distancias al pozo bombeado. En el caso ideal de acuífero indefinido, la línea así obtenida es una recta, y su pendiente, según la fórmula [2], puede expresarse:

$$\frac{ds}{d \ln r} = - \frac{Q}{2\pi T}. \quad [9]$$

En el caso de infiltración desde una masa de agua no se realiza esta condición y la gráfica descensos-distancias en papel semilogarítmico no es una recta en ninguna dirección.

En la práctica, y dentro de los márgenes de error de este tipo de ensayos, se asimila la curva de des-

¹ Véanse, por ejemplo: *Engineering Hydraulics*, editado por Hunter Rouse, John Wiley & Sons, Nueva York, 1949, o *Tratado de Hidráulica*, de P. Forchheimer, Editorial Labor, 1935.

¹ R. G. Kazmann: "The Induced Infiltration of River Water to Wells". *Trans. Am. Geo. Union*, vol. XXIX, números 1 y 6, 1948.

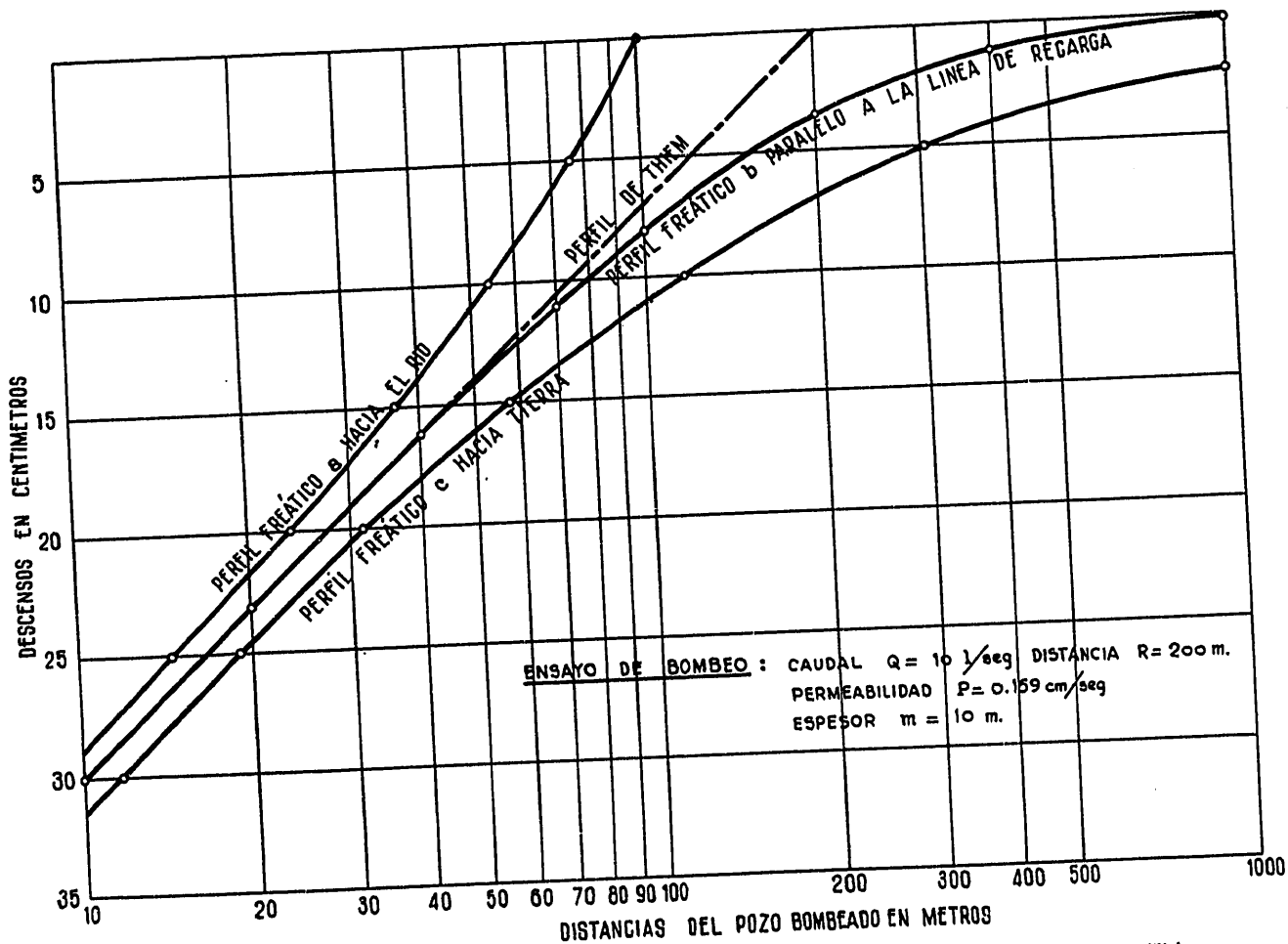


Fig. 3.ª — Representación semilogarítmica de los perfiles freáticos a, b y c de la figura 2.ª, y de la recta de Thiem correspondiente a un acuífero semiindefinido.

censos-distancias, en el sistema semilogarítmico, a una recta, y se opera con ella del modo descrito.

Para dar sentido analítico a esta asimilación aproximada, vamos a suponer que se toma la tangente a la curva en uno de sus puntos y que es a esta recta tangente a la que se aplica el método de Thiem anteriormente descrito, como si el acuífero fuera indefinido y la curva obtenida, descensos-distancias, fuera una recta realmente.

La pendiente de la tangente a la curva obtenida es:

$$\frac{ds}{d \ln r} = r \frac{ds}{dr} = - \frac{Q}{2\pi T_R} \cdot \frac{R(R - r \cos \alpha)}{R^2 - r^2 - 2Rr \cos \alpha} \quad [10]$$

siendo T_R la transmisibilidad real desconocida del acuífero. Ahora bien: al aplicar el método de Thiem a este caso, tomamos la pendiente de la recta tangente como la correspondiente al caso de acuífero indefinido y hacemos esa pendiente:

$$\frac{ds}{d \ln r} = - \frac{Q}{2\pi T} \quad [9]$$

de la fórmula de Thiem, siendo T la transmisibilidad que obtenemos utilizando este sistema. Igualando ambas pendientes [9] y [10], y simplificando, obtenemos:

$$\frac{T}{T_R} = \frac{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}{R(R - r \cos \alpha)}, \quad [11]$$

que nos da la relación entre la transmisibilidad obtenida T , según se ha descrito, mediante la aplicación del método de Thiem a una serie de sondeos alineados con el pozo bombeado, y la real, desconocida, del acuífero T_R .

Para ver la distribución de esta relación en el plano, hagamos $\frac{T}{T_R} = \lambda$, y la ecuación [11], con λ como parámetro, es la familia de círculos:

$$-\lambda R(R - r \cos \alpha) + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha = 0, \quad [12]$$

que pasada a coordenadas cartesianas rectangulares $\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$ se convierte en:

$$x^2 + y^2 - (2R - \lambda R)x + R^2 - \lambda R^2 = 0, \quad [13]$$

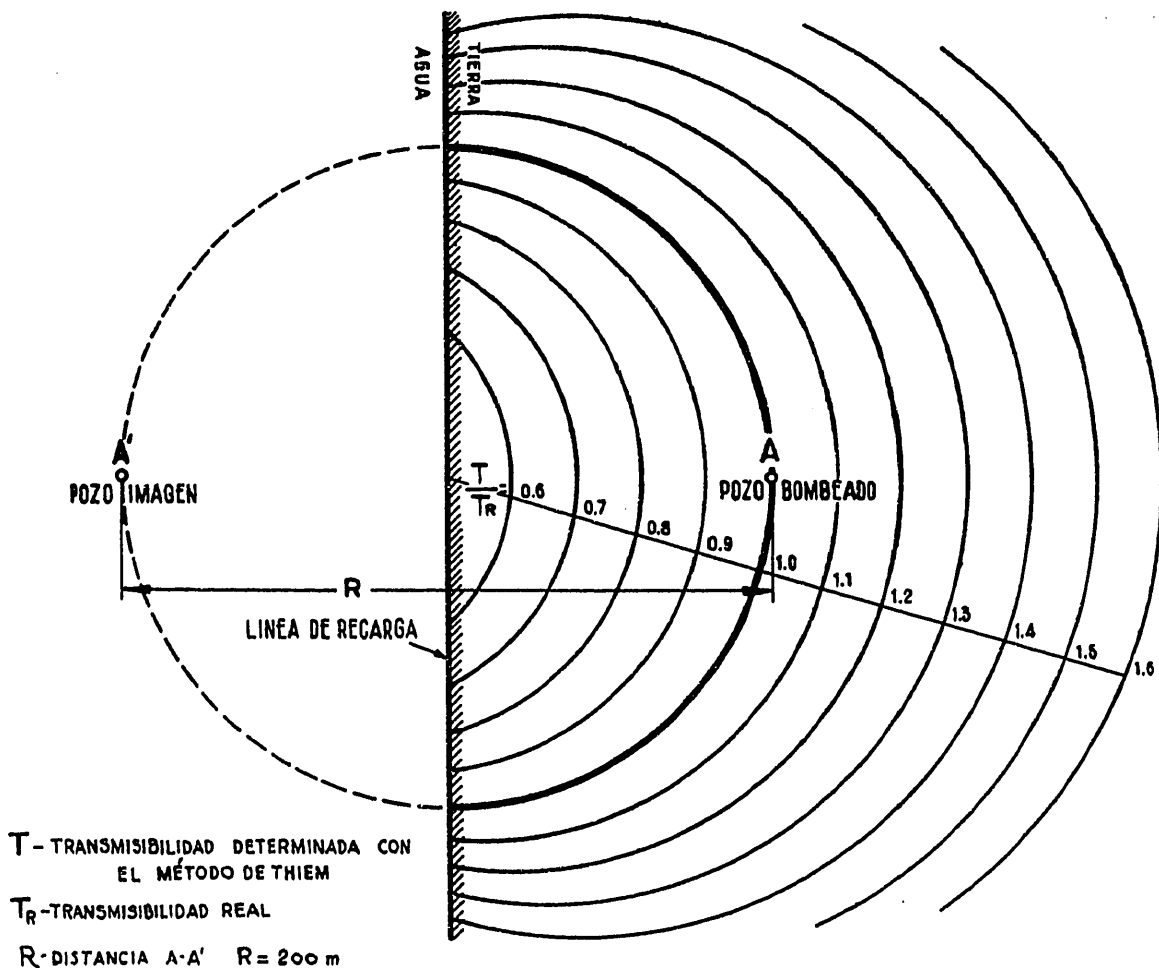


Fig. 4.ª — Distribución del error al aplicar el método de Thiem al caso de un acuífero semiindefinido con recarga rectilínea.

que son los círculos con centros:

$$x_0 = R \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right), \quad y_0 = 0,$$

y radios $\rho = \frac{\lambda}{2} R$ representados en la figura 4.ª.

De este estudio se deducen las siguientes consecuencias:

- a) El error cometido con el método es teóricamente independiente del caudal bombeado Q .
- b) De la observación de la figura se deduce que la línea recta de pozos de observación que da el error mínimo es la paralela a la línea de recarga, ya que ella constituye el segmento máximo comprendido entre dos círculos consecutivos.
- c) Para $\lambda = 1$ el error cometido es nulo; el lugar geométrico de los puntos en que esto ocurre es el círculo $R \cos \alpha - r = 0$, con A y A' como extremos de uno de sus diámetros; es decir, que en estos puntos la tangente a la curva freática semilogarítmica obtenida por intersección de la superficie [6]

con planos verticales pasando por el pozo bombeado A es paralela a la recta de Thiem en un acuífero indefinido de la misma transmisibilidad que el estudiado, con el mismo caudal bombeado Q .

d) A lo largo de la normal al río la variación de $\frac{T}{T_R}$ es lineal y se comete el mismo error relativo usando la alineación recta hacia el río o separándose de él.

II. Considerando el caso general de que los pozos de observación no estén en una línea recta, sino a lo largo de una curva cualquiera, dada por su ecuación en polares $f(r, \alpha) = 0$, la pendiente de la tangente a la curva obtenida descensos-distancias en papel semilogarítmico, se obtiene de la ecuación [8] puesta en la forma:

$$\frac{ds}{d \ln r} = r \frac{ds}{dr} = \frac{Q}{2\pi T_R} \frac{R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \left(r \cos \alpha - R + r^2 \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dr} \right),$$

que igualada, como antes, a la pendiente correspondiente a la recta de Thiem:

$$-\frac{Q}{2\pi T} = \frac{Q}{2\pi T_R} \frac{R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \left(r \cos \alpha - R + r^2 \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dr} \right),$$

y simplificando:

$$\frac{T_R}{T} = \frac{R}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \left(R - r \cos \alpha - r^2 \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dr} \right), \quad [14]$$

que nos dice que el error cometido no depende sólo del punto, sino también, como es lógico, de la dirección en que nos movemos, expresada por $\frac{d\alpha}{dr}$.

Si queremos saber a lo largo de qué curvas no se comete error alguno al aplicar el método, haremos $\frac{T_R}{T} = 1$, y entonces de [14] obtenemos la ecuación diferencial:

$$r - R \cos \alpha + Rr \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dr} = 0, \quad [15]$$

cuya solución es:

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha = (R + c)^2, \quad [16]$$

que corresponde a la familia de círculos con centros en A' y radio variable.

Esta solución es evidente por consideraciones geométricas, ya que a lo largo de uno de estos círculos con centro en A' la influencia del pozo imagen es constante en todos sus puntos, y al aplicar el método de Thiem se está en el caso del acuífero indefinido y la curva obtenida es también una recta.

