DETERMINACION DE SECCIONES CONJUGADAS, DE RADIO HIDRAULICO MAXIMO, EN CANALES DE SECCION TRAPECIAL

Por JUAN P. ALCARAZ PAVIA,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor una gráfica y una tabla, que deduce teóricamente, y que puede ser de utilidad para el estudio de canales en las condiciones que se especifican.

Se demuestra que entre todas las secciones trapeciales posibles con un calado determinado, h, y un talud cualquiera, β, entendiéndose por éste el valor de la tangente del ángulo del talud con la vertical; las de radio hidráulico máximo, son las formadas por las tres tangentes a un circulo de radio h con centro en el eje de simetria vertical de la sección y a una altura h sobre la solera, siendo la inferior horizontal y las otras dos formando con la vertical los ángulos con tangente $= \pm \beta$.

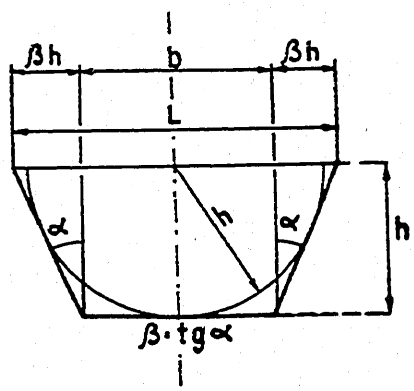

Figura 1.ª

La demostración puede verse, entre otros, en el libro *Saltos de agua y Presas de embalse*, de J. L. Gómez Navarro y J. J.-Aracil, 3.ª edición, págs. 434 y 435.

Las expresiones de los valores de la sección y perimetro mojado son:

$$S = \left[2\sqrt{1+\beta^2} - \beta\right] \times h^2 \quad \text{y} \quad p = 2 \times \left[2\sqrt{1+\beta^2} - \beta\right] \times h.$$

Partiendo de ellas, encontramos la conocida e importantísima propiedad de este grupo o familia de secciones, de que el radio hidráulico es independiente del valor que asignemos a β:

$$R = \frac{S}{p} = \frac{(2\sqrt{1+\beta^2} - \beta) \times h^2}{2(2\sqrt{1+\beta^2} - \beta) \times h} = \frac{h}{2}.$$

Partiendo de ésta, es nuestro propósito destacar la existencia de otra importante propiedad, que nos permitirá obtener, manteniendo los valores de sección mojada y radio hidráulico máximo para el valor de β que hayamos adoptado, así como el valor h fijado, otra sección de igual sección mojada, pero con distinto valor de β, para disponer de este modo de un par de secciones conjugadas, equivalentes desde el punto de vista hidráulico (ya que la velocidad media, si mantenemos uniforme la pendiente, será también invariable), las que podamos alternar indistintamente en las zonas de la traza del canal en que el terreno cambie de condiciones y sea conveniente cambiar de sección por lo que afecte a la estabilidad de los taludes.

Efectivamente: si para un valor determinado de h (valor que podemos considerar como parámetro), observamos la dependencia de S con β, vemos que, manteniéndose la invariabilidad del calado, radio hidráulico y velocidad media, la sección es variable con β (y también el perímetro y en la misma proporción para mantener la constancia del radio hidráulico).

Derivando S respecto a β, hallamos:

$$\frac{dS}{d} = \left[\frac{2\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} - 1\right] \times h^2,$$

expresión que tiene un valor nulo para

$$\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}};$$

o sea, prácticamente, para el valor

$$\beta = + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La derivada segunda:

$$\frac{d^2 S}{d\beta^2} = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2} \times (1+\beta^2)}$$

es > 0 para cualquier valor de β.

Luego el valor de S para

$$\beta = + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un mínimo y corresponde al caso de que los taludes formen un ángulo de 30° con la vertical $\beta = \mathrm{tg}\ 30°$, o sea, concretamente, al caso del semiexágono regular, el que formaría la sección trapecial ideal si el terreno fuera de consistencia uniforme y se adaptara a estos taludes.

En general, necesitaremos cambiar de talud para adaptarlo a las condiciones del terreno, y esto podemos hacerlo perdiendo algo en las condiciones de sección ideal mojada mínima, para el radio hidráulico $R = \frac{h}{2}$, correspondiente a la familia de secciones considerada, con la compensación de que podemos disponer de la sección conjugada, la que mantendrá invariable la velocidad media, y la escasa perturbación por cambio de sección será sólo debida a la readaptación a la nueva distribución de los filetes líquidos, pudiéndose aminorar las pérdidas de carga mediante el empleo de un tramo de transición, tramo del que, fijadas sus dimensiones en función de β_1 y β_2, pudiera experimentarse para varios tipos en modelo reducido, deduciendo una ley aproximada de variación de las pérdidas de carga para todos los valores.

Si representamos la ley de variación de

$$\frac{S}{h^2} = 2\sqrt{1+\beta^2} - \beta$$

(una hipérbola), los taludes conjugados que originan las dos secciones conjugadas son las dos raíces de esta ecuación, y si partimos del valor $\beta_1 = 0$, la sección será $S = 2h^2$, resultando la ecuación de la forma $3\beta^2 - 4\beta = 0$; sus raíces son:

$$\beta_1 = 0; \qquad \beta_2 = \frac{4}{3};$$

con lo que vemos que el talud conjugado con el vertical es el $\beta_2 = \frac{4}{3}$.

En los demás casos las dos raíces conjugadas (si prescindimos de los valores iniciales de β_1, negativos o en desplome, los que únicamente tendrían aplicación en algún caso de canal en túnel) estarán comprendidas entre estos límites y habrá una raíz doble,

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

en el valor mínimo de la sección.

Acompañamos tabulación y representación gráfica de la función para hallar rápidamente, en la práctica, el valor β_2 conjugado del β_1 con que entremos; pero su determinación es bien sencilla, pues sólo consiste en dar el valor β_1 y hallar el valor numérico de la sección mojada, el que, igualado a la función, nos proporciona una ecuación de segundo grado que, dividida por el cero o binomio que contiene la raíz β_1, nos da como cociente el cero que contiene la raíz conjugada β_2.

Habíamos dicho que las secciones, a medida que se acercaban a la forma regular del semiexágono, eran más ideales, y vemos que, manteniéndose el radio hidráulico pendiente y, por lo tanto, la velocidad, el caudal, al disminuir la sección, disminuye. Existe, por lo tanto, una aparente paradoja, cuya aclaración es bien sencilla, como habrá comprobado ya el lector.

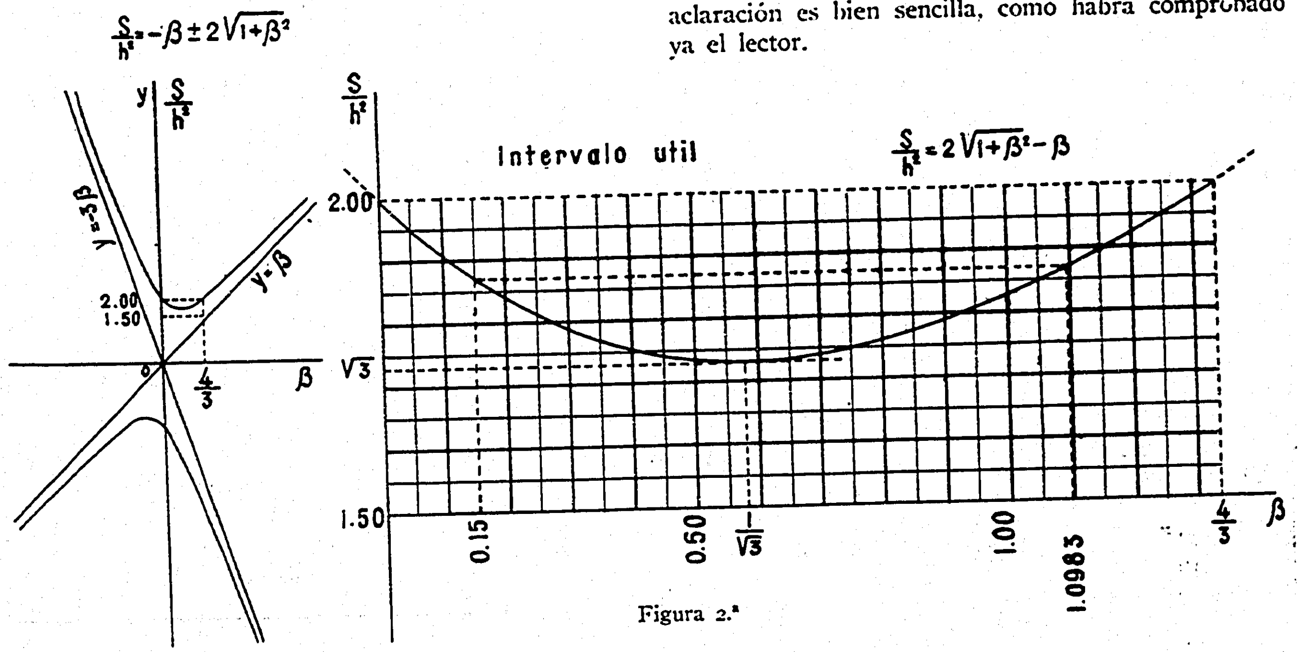

Figura 2.ª

β_1	$S=\left[2\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right]\times h^2$	Valor conjugado β_2
0	$2\times h^2=2{,}0000\times h^2$	$\frac{4}{3}=\frac{13{,}333}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2\sqrt{101}-1}{10}\times h^2=1{,}9100\times h^2$	$\frac{4\sqrt{101}-5}{30}=\frac{11{,}733}{10}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{2\sqrt{104}-2}{10}\times h^2=1{,}8396\times h^2$	$\frac{4\sqrt{104}-10}{30}=\frac{10{,}264}{10}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{2\sqrt{109}-3}{10}\times h^2=1{,}7881\times h^2$	$\frac{4\sqrt{109}-15}{30}=\frac{8{,}920}{10}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{2\sqrt{116}-4}{10}\times h^2=1{,}7541\times h^2$	$\frac{4\sqrt{116}-20}{30}=\frac{7{,}694}{10}$
$\frac{5}{10}$	$\frac{2\sqrt{125}-5}{10}\times h^2=1{,}7361\times h^2$	$\frac{4\sqrt{125}-25}{30}=\frac{6{,}574}{10}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5{,}778}{10}$	$\sqrt{3}\times h^2=1{,}7321\times h^2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5{,}778}{10}$
$\frac{6}{10}$	$\frac{2\sqrt{136}-6}{10}\times h^2=1{,}7324\times h^2$	$\frac{4\sqrt{136}-30}{30}=\frac{5{,}549}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{2\sqrt{149}-7}{10}\times h^2=1{,}7413\times h^2$	$\frac{4\sqrt{149}-35}{30}=\frac{4{,}609}{10}$
$\frac{8}{10}$	$\frac{2\sqrt{164}-8}{10}\times h^2=1{,}7612\times h^2$	$\frac{4\sqrt{164}-40}{30}=\frac{3{,}742}{10}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{2\sqrt{181}-9}{10}\times h^2=1{,}7907\times h^2$	$\frac{4\sqrt{181}-45}{30}=\frac{2{,}938}{10}$
$\frac{10}{10}=1$	$\frac{2\sqrt{200}-10}{10}\times h^2=1{,}8284\times h^2$	$\frac{4\sqrt{200}-50}{30}=\frac{2{,}189}{10}$
$\frac{11}{10}$	$\frac{2\times\sqrt{221}-11}{10}\times h^2=1{,}8732\times h^2$	$\frac{4\sqrt{221}-55}{30}=\frac{1{,}488}{10}$
$\frac{12}{10}$	$\frac{2\times\sqrt{244}-12}{10}\times h^2=1{,}9241\times h^2$	$\frac{4\sqrt{244}-60}{30}=\frac{0{,}827}{10}$
$\frac{13}{10}$	$\frac{2\times\sqrt{269}-13}{10}\times h^2=1{,}9802\times h^2$	$\frac{4\sqrt{269}-65}{30}=\frac{0{,}202}{10}$
$\frac{4}{3}=\frac{13{,}333}{10}$	$2\times h^2=2{,}0000\times h^2$	0
$\frac{15}{10}$	$\frac{2\times\sqrt{325}-15}{10}\times h^2=2{,}1056\times h^2$	Negativo.

Evidentemente, para restablecer el caudal habrá que incrementar la sección, pero no en la proporción de la merma de la misma, ya que actúa otro elemento, acelerador, el aumento del radio hidráulico, que será ahora:

$$R_1 = R + \Delta R = \frac{h + \Delta h}{2},$$

el cual incrementará la velocidad y, por lo tanto, para obtener el caudal fijado bastará con un incremento de sección menor que la proporcional, supliendo el resto el aumento de velocidad.

Al restablecer la sección necesaria en las secciones mínimas, el aumento del radio hidráulico es más sensible y, por lo tanto, se obtiene el caudal fijado con menor aumento de sección, y de ahí la ventaja de la sección semiexagonal regular.

El valor definitivo de h para un caudal Q, una pendiente i, un coeficiente de rozamiento γ y un valor de β_1 (o su conjugado), se obtiene de la ecuación que expresa Q en función de estos datos y de h:

$$Q = \frac{87 \times \sqrt{i}}{2\left(\sqrt{\frac{h}{2}} + \gamma\right)} \times \left(2\sqrt{1+\beta^2} - \beta\right) \times h^3,$$

o sea de una ecuación de sexto grado que, puesta bajo la forma

$$\sqrt{\frac{h}{2}} + \gamma = K \times h^3,$$

siendo K el coeficiente numérico que resulte, es de fácil resolución al representar gráficamente las dos funciones correspondientes a cada uno de los miembros de la ecuación en las proximidades del punto de cruce que corresponde al valor de la raíz útil.

Los demás valores de la sección son:

Velocidad media:

$$V = \frac{87\,h}{2\left(\sqrt{\frac{h}{2}} + \gamma\right)} \times \sqrt{i}\,.$$

Ancho en la solera:

$$b = 2\left(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\right) h.$$

Ancho en la superficie:

$$L = 2\sqrt{1+\beta^2} \times h.$$

La amplitud entre los valores extremos

$$\beta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{4}{3},$$

estimamos es suficiente en la práctica, ya que no es corriente proyectar con valores de β superiores a $\beta = 1$, por lo que, partiendo (si la obra es de relativa importancia) de ensayos de los distintos suelos de las zonas más extensas por donde se sitúe la traza del canal, podremos fijar el valor más eficaz para β_1, o para β_2, según los casos, y para las zonas en las que los ensayos acusen la necesidad de un talud más abierto que el fijado para β_2, puede siempre volverse al conjugado β_1 con muros de sostenimiento, solución en la que el mayor coste del muro quedará, en general, compensado con el menor en revestimiento y volumen de excavación respecto a la solución con

$$\beta > \frac{4}{3}.$$

Para fijar ideas, calculamos una sección de canal de este tipo y hallamos la conjugada del valor β_1 con que entramos:

Los datos son:

$$Q = 30 \text{ m.}^3\text{/seg.}; \quad \begin{pmatrix} i = 0{,}0004 \\ \sqrt{i} = 0{,}02 \end{pmatrix}; \quad \gamma = 0{,}36;$$

$$\beta_1 = 0{,}15.$$

La ecuación en h es, después de simplificada:

$$\sqrt{\frac{h}{2}} + 0{,}36 = 0{,}0543 \times h^3,$$

y su raíz útil, $h = 3{,}09$ m.

Hallaremos los valores numéricos de todas las expresiones en β_1 y β_2, para lo que calculamos previamente β_2.

Para ello tenemos:

$$2 \times \sqrt{1{,}0225} - 0{,}15 = 2\sqrt{1+\beta^2} - \beta.$$

Despejando $2\sqrt{1+\beta^2}$ y elevando al cuadrado, obtenemos la ecuación:

$$3\beta^2 - 2\left(2\sqrt{1{,}0225} - 0{,}15\right)\beta + \left(0{,}60\sqrt{1{,}0225} - 1{,}1125\right) = 0.$$

Si dividimos el primer miembro por el cero $(\beta - 0{,}15)$, correspondiente a la raíz conocida, el cociente es:

$$3\beta - \left(4\sqrt{1{,}0225} - 0{,}75\right),$$

el que, igualado a cero, nos da la raíz conjugada:

$$\beta_2 = 1{,}0983 \sim 1{,}1.$$

La interpolación en la tabla nos da:

$$\beta_2 = \frac{1{,}1733 + 1{,}0264}{2} = 1{,}0998.$$

Los valores restantes para cada caso β_1 ó β_2, son:

$\beta_1 = 0{,}15$		$\beta_2 \simeq 1{,}1$	
$\sqrt{1+\beta^2} = 1{,}0112;\quad 2\sqrt{1+\beta^2} - \beta = 1{,}8724;\quad \sqrt{\frac{h}{2}}$	$= 1{,}243$	$\sqrt{1+\beta^2} = 1{,}4866;\quad 2\sqrt{1+\beta^2} - \beta = 1{,}8732;\quad \sqrt{\frac{h}{2}}$	$= 1{,}243$
$b = 2\,(1{,}0112 - 0{,}15) \times 3{,}09$	$= 5{,}322$ m.	$b = 2\,(1{,}4866 - 1{,}1000) \times 3{,}09$	$= 2{,}389$ m.
$L = 2 \times 1{,}0112 \times 3{,}09$	$= 6{,}249$ m.	$L = 2 \times 1{,}4866 \times 3{,}09$	$= 9{,}187$ m.
$S = \frac{5{,}384 + 6{,}249}{2} \times 3{,}09$	$= 17{,}877$ m.^{2}	$S = \frac{2{,}389 + 9{,}187}{2} \times 3{,}09$	$= 17{,}884$ m.^{2}
$S = 1{,}8724 \times \overline{3{,}09}^2$	$= 17{,}878$ m.^{2}	$S = 1{,}8732 \times \overline{3{,}09}^2$	$= 17{,}885$ m.^{2}
$P = 2 \times 1{,}8724 \times 3{,}09$	$= 11{,}571$ m.	$P = 2 \times 1{,}8732$	$= 11{,}576$ m.
$R = \frac{S}{P} = \frac{17{,}878}{11{,}571}$	$= 1{,}545$	$R = \frac{S}{P} = \frac{17{,}885}{11{,}576}$	$= 1{,}545$
$R = \frac{h}{2} = \frac{3{,}09}{2}$	$= 1{,}545$	$R = \frac{h}{2} = \frac{3{,}09}{2}$	$= 1{,}545$
$V = \frac{87 \times 3{,}09}{2\,(1{,}243 + 0{,}36)} \times 0{,}02 = \frac{2{,}668}{1{,}603}$	$= 1{,}677$ m./seg.	$V = \frac{87 \times 3{,}09}{2\,(1{,}243 + 0{,}36)} \times 0{,}02 = \frac{2{,}668}{1{,}603}$	$= 1{,}677$ m./seg.
$Q = \frac{87 \times 0{,}02}{2 \times (1{,}243 + 0{,}36)} \times 1{,}8724 \times \overline{3{,}09}^3$	$= 29{,}982$ m.^{3}/seg.	$Q = \frac{87 \times 0{,}02}{2\,(1{,}243 + 0{,}36)} \times 1{,}8732 \times \overline{3{,}09}^3$	$= 29{,}994$ m.^{3}/seg.
$Q = V \times S = 1{,}677 \times 17{,}878$	$= 29{,}981$ m.^{3}/seg.	$Q = V \times S = 1{,}677 \times 17{,}884$	$= 29{,}991$ m.^{2}/seg.

Las pequeñas diferencias son, naturalmente, debidas a despreciar cifras decimales.