

EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION Y EL METODO DE CROSS

Por JOSE LOPEZ RODRIGUEZ,

Ingeniero de Caminos

Levée el autor a tratar el tema del epígrafe, según ofreció en sus artículos publicados en nuestra Revista en el año 1953 y a instancias de un distinguido Profesor de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de La Habana, según refiere el mismo en los primeros párrafos.

I

Ejercicios preparatorios.

Debo a los lectores de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS la resolución de un par de problemitas de cálculo de estructuras reticulares, mediante el que hace algún tiempo se me ocurrió llamar el método de Cross A; por lo menos, la del que figura detallado en la página 342 de nuestra citada publicación, del año 1953, que lo es de una estructura de dos grados de libertad.

Sin grandes deseos de saldar tal deuda, en verdad, me ha decidido o estimulado a ello el extraño sucedido que paso a contar: va para tres meses, recibí atenta carta de un distinguido colega americano, o iberoamericano, por mejor decir, en la que me pedía "el envío de la obra B-9" cuando fuese publicada.

¿Quién es esa obra B-9? Saben de ella los que poseen *mi librito*, que es la designación abreviada de mi folleto sobre "El método de Cross en serio y de broma", entre los que se cuenta el distinguido Profesor de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de La Habana, que me ha honrado con tal encargo; que en la página 12 del susodicho folleto, formando parte de la *Bibliografía* que lleva en vanguardia, se puede ver esta referencia:

9. LÓPEZ RODRÍGUEZ (José J.): "La viga Vierendeel y el método de Cross" (Preludios de ensayos críticos). *En preparación*.

Empareja el gran honor de la petición de este B-9, por tan relevante colega, con mi confusión y perplejidad ante la imposibilidad de complacerle. Hace un par de años desistí de la publicación de la aludida tanda de preludios, porque me hastió el empalagoso tono de elementalidad que puse al desarrollarlos; y las dispersas notas reunidas y pendientes de ordenar, pasaron a la historia (léase cesto de los papeles) en su mayoría. He tenido que recurrir por ello al cajón de los recuerdos, para hacer la breve selección de ellos que animará este artículo y los que habrán de seguirle, con la que es mi pretensión complacer a medias al Profesor de La Habana y cansar

del todo a los amables lectores de la REVISTA con la resolución del problemita mencionado, matando dos pájaros de un tiro. Uno y otros quedarán satisfechos hasta la saciedad, de que obré muy bien al decidir no publicar el B-9.

El tiempo en el que puse más calor en la preparación de "La viga Vierendeel y el método de Cross", fué precisamente el invierno de 1949-50; y en aquel entonces, yo estaba por el aprovechamiento integral de la conocida expresión de la elástica de la pieza prismática o barra recta de sección e inercia constantes, de esta su ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{m_z}{EI}. \quad [1]$$

Nada extraño tiene el que, aparte la consideración de algún caso general, prodigara las aplicaciones de esta expresión [1] a copiosa multitud de casitos particulares. De ellos, me he limitado a escoger los más precisos para la finalidad de estos artículos, que son los reunidos en la figura 1.ª, que paso a desarrollar.

En la parte a) de esta figura tenemos una barra articulada en sus extremos, *o* (origen de coordenadas) y *e*, sometida a la acción de un par flector, $+M$ en *o*. Este par flector implica unas reacciones, *R*, en los extremos de la barra, cuyo valor se obtiene sencillamente tomando momentos flectores respecto a los indicados extremos.

Tomamos momentos respecto a *o* y así tenemos:

$$M - Rl = 0;$$

de donde resulta que:

$$R = \frac{M}{l};$$

y si tomáramos momentos relativamente a *e*, resultaría:

$$M - Rl = 0;$$

de donde:

$$R = \frac{M}{l}.$$

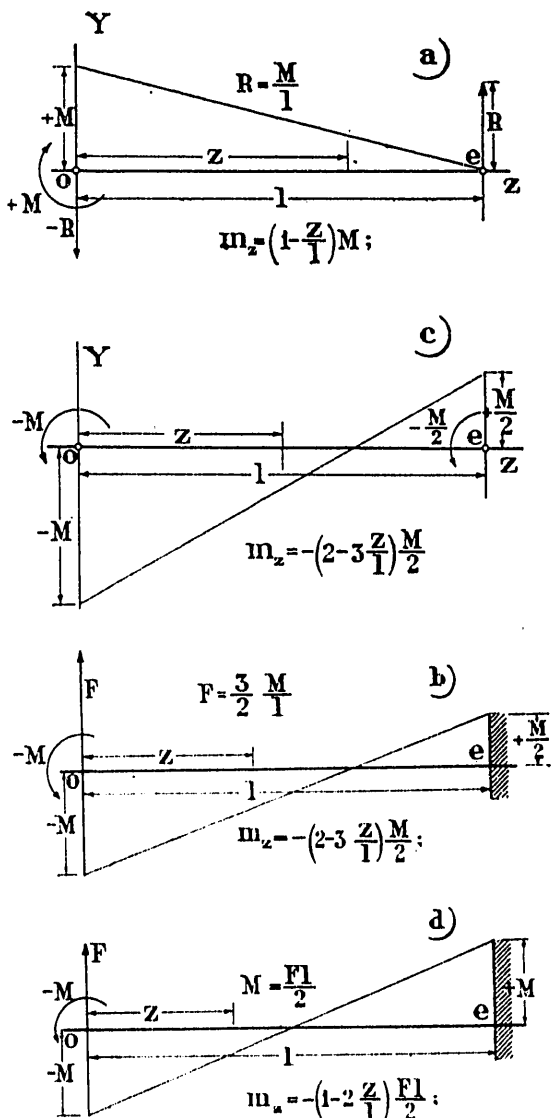


Figura 1.ª

Es éste el valor de R expresado en la parte a) de la figura 1.ª, que nos permite hallar los valores del momento flector en los distintos puntos de nuestra barra por la siguiente expresión:

$$m_z = M - Rz = M - \frac{M}{l}z = \left(1 - \frac{z}{l}\right)M. \quad [2]$$

Conocido este valor de m_z , podemos hacer aplicación de la anterior expresión [1], teniendo ésta de la ecuación diferencial de la elástica correspondiente al caso de la parte a) de la figura 1.ª:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left(1 - \frac{z}{l}\right) \frac{M}{EI}.$$

Una primera integración nos da, sencillamente,

este valor de las tangentes en cada punto a la elástica que buscamos:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{dy}{dz} = \left(z - \frac{z^2}{2l} + C_1\right) \frac{M}{EI};$$

y volviendo a integrar, obtenemos que:

$$y = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6l} + C_1z + C_2\right) \frac{M}{EI}.$$

Las constantes de estas integraciones se obtienen fácilmente, teniendo en cuenta que los valores de la ordenada y son cero para los de las abscisas $z = 0$ y $z = 1$, lo que nos da este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ \frac{1}{3}l + C_1 &= 0, \end{aligned}$$

del que deducimos que:

$$C_1 = -\frac{1}{3}l \quad \text{y} \quad C_2 = 0.$$

Sustituídos estos valores en los precedentes de la tangente a la elástica o $\frac{dy}{dz}$ y de la ordenada y obtenemos los que siguen:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = -\left(z - 6\frac{z}{l} + 3\frac{z^2}{l^2}\right) \cdot \frac{Ml}{6EI}. \quad [3]$$

$$y = -\frac{z}{l} \left(2 - 3\frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2}\right) \cdot \frac{Ml^2}{6EI}. \quad [4]$$

La tangente a esta elástica en el origen ($z = 0$), tiene el valor $-\frac{Ml}{3EI}$, según nos dice la expresión [3], la cual nos da para la tangente, en el extremo e (o para $z = 1$), el $+\frac{Ml}{6EI}$; que es como decir que el giro en o es doble y de signo contrario que el giro en e .

La relación del par flector $+M$ al valor del giro en o , es decir:

$$M : \frac{Ml}{3EI} = 3 \frac{EI}{l} \quad [5]$$

merece recordarse para más adelante.

Veamos ahora el caso b) de la figura 1.ª. Trátase de una viga recta empotrada en e , en cuyo extremo libre, o , actúan un par flector de momento $-M$ y una fuerza F , cuyo valor es, como en la misma parte de la figura se expresa,

$$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l}.$$

Por ello tenemos este valor del momento flector en la sección correspondiente a la abscisa z :

$$m_z = -M + Fz = -M + \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l} z = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2} \quad [6]$$

Tales valores dan, para el momento en $z = 0$ y $z = 1$, $-M$ y $+\frac{M}{2}$, respectivamente, representados en la figura también.

Las expresiones [1] y [6] dan ésta de la elástica del caso que tratamos:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2EI}$$

Las dos integraciones sucesivas permiten obtener los valores de la tangente y de la ordenada de la elástica que siguen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_z &= \frac{dy}{dz} = - \left(2z - \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{l} + C_1 \right) \cdot \frac{M}{2EI}; \\ y &= - \left(z^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{l} + C_1 z + C_2 \right) \cdot \frac{M}{2EI}; \end{aligned}$$

pero dado el empotramiento perfecto en e , tienen que ser cero los valores de la ordenada y de la tangente para $z = 1$, lo que permite calcular sencillamente las constantes C_1 y C_2 , que valen:

$$C_1 = -\frac{l}{2}; \quad C_2 = 0;$$

y sustituidas estas constantes en las expresiones precedentes, tenemos, en nuestro caso b) de la figura 1.ª o para su elástica:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \left(1 - 4 \frac{z}{l} + 3 \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{Ml}{4EI}; \quad [7]$$

$$y = \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 \cdot \frac{Ml^2}{4EI}. \quad [8]$$

Estas expresiones del caso b) de la figura 1.ª tienen cosas de interés; las dos nos dan valor cero para $z = 1$ (como la perfección del empotramiento en e demanda). Y aisladamente, la [8], para $z = 0$, da valor nulo también a la flecha o traslación del extremo libre, mientras que la [7] da para valor absoluto del giro en el mismo extremo (hágase en dicha expresión [7] $z = 0$) el siguiente:

$$\frac{Ml}{4EI}$$

Tiene importancia en la distribución Cross de los

momentos flectores la relación del momento M a este giro, que es:

$$M : \frac{Ml}{4EI} = \frac{4EI}{l},$$

a la que suelen los tratadistas dar la denominación de *rigidez* (así, a secas). No tuvo la misma suerte, no mereció designación especial la:

$$\frac{3EI}{l},$$

de nuestra anterior expresión [5].

Pasamos a tratar el interesantísimo caso c) de nuestra figura 1.ª; es el de una barra articulada en sus extremos, en los que está sometida a las acciones (casi estuve por llamarlas reacciones) de dos pares flectores, cuyos valores (los de sus momentos) son: $-M$ en el 0 y $+\frac{M}{2}$ en el extremo e .

La ley de variación de los momentos flectores es, justamente, la misma de la anterior expresión [6]:

$$m_z = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2};$$

y si la derivamos respecto a z , tenemos el mismo valor F del esfuerzo cortante del caso b):

$$\frac{dm_z}{dz} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l} = F.$$

La ecuación diferencial de la elástica también es ahora la

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2EI}.$$

Hacemos la primera integración, que nos da:

$$\frac{dy}{dz} = - \left(2z - \frac{3}{2} \cdot \frac{z^2}{l} + C_1 \right) \frac{M}{2EI} = \operatorname{tg} \alpha_z,$$

y volviendo a integrar ésta, obtenemos:

$$y = - \left(z^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{l} + C_1 z + C_2 \right) \frac{M}{2EI};$$

que son los mismos valores de la tangente y de la ordenada del caso b), a reserva de los de las constantes de las integraciones efectuadas, que pasamos a deducir: ahora, las condiciones para su obtención son las de que para $z = 0$ y $z = 1$ ha de ser nula la ordenada y . Condiciones de las que resultan:

$$C_1 = -\frac{l}{2} \quad \text{y} \quad C_2 = 0,$$

exactamente iguales a las del caso b); por lo que las elásticas son las mismas en los dos casos. No repe-

timos por ello las anteriores expresiones [7] y [8] de la tangente a estas elásticas y de su ordenada. No olvidemos en lo que sigue (ello es el pormenor más relevante de la ingeniosa distribución de momentos flectores del Prof. Hardy Cross, como oportunamente veremos), que *se comportan idénticamente* la viga empotrada en un extremo y libre en el otro, de nuestro caso *b*), y la viga articulada en ambos extremos, de nuestro caso *c*), cuando están sometidas a las acciones representadas en la figura 1.^a.

Para terminar con ésta, consideremos ahora el caso *d*) de la misma, que es el de una viga empotrada en *c* con su otro extremo *o*. O, libre, sometida a una fuerza *F* y a un par flector — *M* que actúan en el extremo libre, teniendo el momento el valor:

$$M = \frac{F l}{2}.$$

En este caso, la ley lineal de variación de los momentos flectores es la dada por:

$$m_z = \frac{F l}{2} + F z = - \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right) \cdot \frac{F l}{2}, \quad [9]$$

y la ecuación diferencial de la elástica.

$$\frac{d^2 y}{d z^2} = - \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right) \frac{F l}{2 E I}. \quad [10]$$

Integrada ésta, resulta este valor de la tangente a la elástica del caso *d*):

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{d y}{d z} = - \left(z - \frac{z^2}{l} + C_1 \right) \frac{F l}{2 E I},$$

que vuelta a integrar, nos da para la ordenada:

$$y = - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3 l} + C_1 z + C_2 \right) \frac{F l}{2 E I}.$$

Las constantes de las integraciones se hallan fácilmente, dado que el perfecto empotramiento en *c* de la barra exige que en las dos expresiones que se acaban de obtener sean los valores cero, para $z = 1$, lo que da los valores $C_1 = 0$ y $C_2 = - \frac{l^2}{6}$, que sustituidos, nos llevan a estos resultados:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = - \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \frac{F l^2}{2 E I}; \quad [11]$$

$$y = \left(1 - 3 \frac{z^2}{l^2} + 2 \frac{z^3}{l^3} \right) \frac{F l^3}{12 E I}. \quad [12]$$

La expresión [11] nos dice que la tangente a la elástica de este caso, en el extremo libre, es nula, por lo que también lo es el giro; y la [12] da para

valor de la flecha o traslación en el origen de coordenadas ($z = 0$), el siguiente:

$$\frac{F l^3}{12 E I}; \quad [13]$$

o sea, que la variación de los momentos flectores conforme a la ley lineal de la expresión [9], origina una traslación sin giro en el extremo libre de la barra.

Antes de pasar a otro ejercicio de elásticas, vamos a hacer corroboraciones del principio de superposición a base de los ejercicios tratados en lo que antecede.

Supongamos primeramente la barra articulada en los extremos de los casos *a*) y *c*) de la figura 1.^a, sometida a la suma de las variaciones de los momentos flectores, dadas por las expresiones [2] y [6]; será evidentemente la variación de momentos flectores a que, en definitiva, estará la barra sometida, la

$$m_z = \left(1 - \frac{z}{l} \right) M - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2} = - \frac{z}{l} \cdot \frac{M}{2}; \quad [14]$$

y de ésta, operando como precedentemente se ha hecho, obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = - \left(1 - 3 \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{M l}{12 E I}; \quad [15]$$

$$y = - \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{M l^2}{12 E I}. \quad [16]$$

Son estas expresiones [15] y [16] las de la tangente a la elástica correspondiente a la variación conforme a la [14] de los momentos flectores y de la ordenada de la misma curva, y de la [15] obtenemos que el giro en el extremo *c* ($z = 1$) tiene el valor:

$$+ \frac{M l}{6 E I},$$

que es el mismo que da la expresión [3] para $z = 1$. Lo que debía suceder, puesto que en el caso *c*), con la variación de momentos [6], el giro en *c* es nulo, como vimos.

Análogamente, vamos a proceder con la barra empotrada en *c* de los casos tratados en las partes *b*) y *d*) de la figura 1.^a, pero pondremos el momento flector del caso *b*) (expresión [6]), en función de *F*, teniendo en cuenta que en dicho caso *b*) es el valor de *F*:

$$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l},$$

que nos da para *M* el

$$M = \frac{2}{3} F l,$$

que, sustituido en la expresión [6], la convierte en la siguiente:

$$m_z = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{2} = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{Fl}{3}. \quad [17]$$

Pues bien: sometida la barra empotrada a las acciones representadas en los casos *b*) y *d*) de la figura 1.^a, el momento flector en cada punto vendrá dado por la suma de las expresiones [17] (la que se acaba de obtener) y [9], siendo su valor:

$$m_z = - \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{Fl}{3} - \left(1 - 2 \frac{z}{l} \right) \frac{Fl}{2} = - \left(7 - 12 \frac{z}{l} \right) \frac{Fl}{6}. \quad [18]$$

Conforme a la expresión [1], la ecuación diferencial de la *elástica* (yo no digo *deformada*) para la variación lineal de momentos flectores acabada de hallar es:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \left(7 - 12 \frac{z}{l} \right) \frac{Fl}{6EI}.$$

Integrada ésta, tendremos la expresión de la tangente a dicha línea para cada *z*, que es:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{dy}{dz} = - \left(7z - 6 \frac{z^2}{l} + C_1 \right) \frac{Fl}{6EI}.$$

Y volviendo a integrar, deduciremos para valor de sus ordenadas:

$$y = - \left(7 \frac{z^2}{2} - 2 \frac{z^3}{l} + C_1 z + C_2 \right) \frac{Fl}{6EI}.$$

Los valores de las constantes los obtendremos teniendo en cuenta que en el extremo empotrado, *c*, de nuestra barra, han de ser cero los valores de la tangente y de la ordenada *y*, lo que nos da el sistema:

$$\begin{aligned} C_1 + l &= 0; \\ C_1 l + C_2 &= - \frac{3}{2} l^2, \end{aligned}$$

del que fácilmente deducimos los valores:

$$\begin{aligned} C_1 &= -l; \\ C_2 &= -\frac{l^2}{2}; \end{aligned}$$

que sustituidos en las expresiones de $\frac{dy}{dz}$ y de *y*, acabadas de obtener, nos dan los siguientes:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \left(1 - 7 \frac{z}{l} + 6 \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{Fl^2}{6EI}; \quad [19]$$

$$y = \left(1 + 2 \frac{z}{l} - 7 \frac{z^2}{l^2} + 4 \frac{z^3}{l^3} \right) \frac{Fl^3}{12EI}. \quad [20]$$

Meditemos sobre estas expresiones, [19] y [20],

que corresponden a la barra empotrada en *c*, sometida al conjunto de las acciones detalladas en los casos *b*) y *d*) de la figura 1.^a: la expresión [20], para *z* = 0, nos da para la ordenada (flecha o traslación del extremo libre de nuestra barra) el valor

$$\frac{Fl^3}{12EI}.$$

Coincide este valor con el [13] anteriormente hallado, deducido de la expresión [12], que no es idéntica a la [20]; pero el principio de superposición se cumple, porque en el caso *b*) de nuestra figura 1.^a, la traslación es nula, según nos dice su *elástica* [8].

De la expresión [19] obtenemos este valor del giro en el extremo libre de la barra (*z* = 0):

$$\frac{Fl^2}{6EI};$$

que, poniendo *l* en función de *M*, es:

$$\frac{Fl^2}{6EI} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l} \cdot \frac{l^2}{6EI} = \frac{Ml}{4EI}. \quad [21]$$

Este valor del giro es idéntico al obtenido anteriormente de la expresión [7] para el caso *b*) de la figura 1.^a, aunque no sean idénticas las expresiones [7] y [19] que nos han dado el mismo resultado; pero el principio de superposición de los efectos se cumple evidentemente, por cuanto en el caso *d*) de la figura 1.^a es nulo el giro para *z* = 0, según nos dice la expresión [11].

Ha podido observarse en lo que va dicho que los signos de los giros y de las tangentes a las elásticas son contrarios; por ejemplo, en el caso *a*) de la figura 1.^a la tangente a la elástica en *o* (valor para *z* = 0 de la expresión [3]) es negativa, mientras que es el giro positivo si se toma como tal el signo del momento flector. En el nonnato libro intitulado *La viga Vierendeel y el método de Cross* intenté proponer la adopción, para los momentos flectores, del sentido positivo de éstos, contrarios al del movimiento de las agujas del reloj. Y se me ocurrió al efecto la *invención* sietemesina del signógrafo, creación infantil que el lector puede ver en el *chaleco de mi librito*, en el ángulo NO. de la portada de *La viga Vierendeel...*, etc., en tal *chaleco* reproducida como elemento decorativo.

Contiene tal portada el índice de materias que dicho frustrado libro iba a estudiar y en él puede leerse: "El signógrafo y la barra empotrada en un extremo", "Elásticas", "La barra de momento de inercia variable", "La médula del método de Cross", "Artificios de la práctica del método de Cross", "Mi viga Vierendeel", etc...

Trataré de exponer la distribución de momentos flectores del Prof. Cross en el artículo siguiente; mas para terminar el presente, voy a hacer una aplicación más de la ecuación diferencial de la elástica [1], resolviendo el ejemplo que en la explicación del método de Cross utilizaré al efecto.

Es dicho ejercicio, el del cálculo de las reacciones y elástica de una barra recta empotrada en sus extremos (la de la fig. 2.^a), de longitud $2l$ y momento de inercia constante I , sometida a la acción de un par flector de momento M en la sección media ($z = l$) de la misma.

Si suponemos conocidos el momento de empotramiento m y la reacción vertical R , para $z = 0$ (en el

caso de la expresión [24], que en éste, por razón del empotramiento en 0, las constantes de integración han de ser cero. Por ello tenemos que:

$$\frac{dy}{dz} = \left(m z + R \frac{z^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{EI}; \quad [26]$$

$$y = \left(m \frac{z^2}{2} + R \frac{z^3}{6} \right) \cdot \frac{1}{EI}. \quad [27]$$

Pasamos a calcular la elástica de la expresión [25]; la integración primera nos da:

$$\frac{dy}{dz} = \left(m z + R \frac{z^2}{2} + M z \right) \frac{1}{EI} + C_1, \quad [28]$$

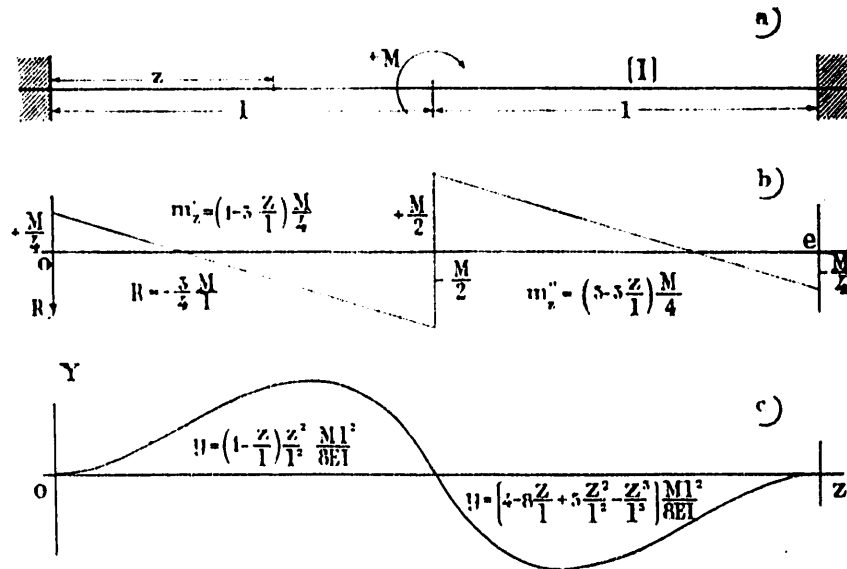


Figura 2.^a

empotramiento izquierdo) los momentos flectores vendrán dados:

$$\text{Por } m'_z = m + Rz; \quad (\text{para } 0 < z < l); \quad [22]$$

$$\text{Por } m''_z = m + Rz + M; \quad (\text{para } l < z < 2l); \quad [23]$$

lo que obligará, por razón de comodidad operatoria, a emplear dos veces la expresión [1] de la ecuación diferencial de la elástica, que será:

En la mitad izquierda de la barra:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{m'_z}{EI} = (m + Rz) \frac{1}{EI}. \quad [24]$$

En la mitad derecha de la barra:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{m''_z}{EI} = (m + Rz + M) \frac{1}{EI}. \quad [25]$$

Podemos escribir directamente los valores de la tangente de la elástica y de sus ordenadas para el

y volviendo a integrar, se tiene:

$$y = \left(m \frac{z^2}{2} + R \frac{z^3}{6} + M \frac{z^2}{2} \right) \frac{1}{EI} + C_1 z + C_2 \quad [29]$$

Calculemos las constantes de estas integraciones: para $z = 1$ tienen que ser iguales los resultados que den la expresión [26] y la [28], por una parte, y las [27] y [29], por otra. Ello nos da:

$$\frac{M l}{EI} + C_1 = 0;$$

$$\frac{M l^2}{2 EI} + C_1 l + C_2 = 0;$$

de donde resultan estos valores de las constantes:

$$C_1 = -\frac{M l}{EI} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{M l^2}{2 EI},$$

que sustituidos en las expresiones [28] y [29] de

la elástica de la mitad derecha de la barra que consideramos, las convierten en las siguientes:

$$\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha_z = \left(mz + \frac{Rz^2}{2} + Mz - Ml \right) \frac{1}{EI}; \quad [30]$$

$$y = \left(\frac{mz^2}{2} + R \cdot \frac{z^3}{6} + M \frac{z^2}{2} - Mlz + M \frac{l^2}{2} \right) \frac{1}{EI}. \quad [31]$$

Las expresiones [26] y [27], que corresponden a la elástica de la mitad izquierda de la barra, lo mismo que las [30] y [31], que pertenecen a la elástica de la mitad derecha de la misma, están en función de las reacciones m y R del empotramiento izquierdo, que supusimos conocidas; pero vamos a hacer su deducción, que es sumamente sencilla, teniendo en cuenta que, si se hace $z = z'l$ (abscisa del empotramiento derecho), en las expresiones [30] y [31] serán cero, lo mismo la $\operatorname{tg} \alpha_z$ que la ordenada y . Efectuándolo así se tiene el sistema:

$$m + lR = -\frac{M}{2};$$

$$2m + \frac{4}{3}lR = -\frac{M}{2},$$

del que deducimos fácilmente que:

$$m = \frac{M}{4} \quad \text{y} \quad R = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l},$$

cuya sustitución en las expresiones [26], [27], [30] y [31] nos da:

Para la elástica de la mitad izquierda de la barra:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{dy}{dz} = \frac{z}{l} \left(2 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{Ml}{8EI}; \quad [32]$$

$$y = \left(1 - \frac{z}{l} \right) \frac{z^2}{l^2} \cdot \frac{Ml^2}{8EI}. \quad [33]$$

Para la elástica de la mitad derecha de la barra:

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{dy}{dz} = - \left(8 - 10 \frac{z}{l} + 3 \frac{z^2}{l^2} \right) \frac{Ml}{8EI}; \quad [34]$$

$$y = \left(4 - 8 \frac{z}{l} + 5 \frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{l^3} \right) \frac{Ml^2}{8EI}. \quad [35]$$

Los valores hallados de las m y R sustituidos en las expresiones [22] y [23], nos han dado estas leyes lineales de variación de los momentos flectores:

Mitad izquierda de la barra:

$$m'_z = \left(1 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{4}.$$

Mitad derecha de la barra:

$$m''_z = \left(5 - 3 \frac{z}{l} \right) \frac{M}{4},$$

que nos dan las dos el mismo valor del esfuerzo cortante o reacción R :

$$\frac{d.m'_z}{dz} = \frac{d.m''_z}{dz} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l} = R.$$

Se han representado esas leyes lineales de variación de los momentos flectores en la parte b) de la figura 2.^a, a la que he añadido una parte, c), para tener siquiera una representación gráfica de una elástica, en este trabajito que tantas expresiones analíticas de elásticas contiene.

Sólo he necesitado calcular la elástica de la mitad izquierda de la barra, por lo que paso a detallar: si en las expresiones [33] y [35] hacemos $z = l$ (abscisa del punto medio de la barra), obtenemos para la ordenada el mismo valor cero; si en las expresiones [32] y [34] hacemos $z = l$, obtenemos el mismo valor de la tangente en una y otra elástica:

$$\operatorname{tg} \alpha_l = -\frac{Ml}{8EI}.$$

Finalmente, si tomamos el origen de coordenadas en el empotramiento de la derecha, las nuevas abscisas serán $z' = 2l - z$; y haciendo en la expresión [33] $z = 2l - z'$, se obtiene:

$$y = - \left(4 - 8 \frac{z'}{l} + 5 \frac{z'^2}{l^2} - \frac{z'^3}{l^3} \right) \frac{Ml^2}{8EI};$$

que es la misma elástica de la expresión [35], pero con ordenadas negativas; todo lo cual, corroborado por la representación gráfica objeto de la parte c) de la figura 2.^a, acredita que el punto medio de la barra, o sea el de abscisa $z = l$, es, en el caso estudiado, un centro de simetría.

Una observación, para terminar: en el caso b) de la figura 1.^a teníamos como causa actuante un par flector de momento negativo, $-M$; si en vez de M hubiera sido la mitad su valor, la elástica de la expresión [8] hubiérase convertido en la

$$y = \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 \cdot \frac{Ml^2}{8EI};$$

y si hubiéramos puesto en el extremo c) (caso b) de la figura 1.^a) el origen de coordenadas, las nuevas abscisas z' serían $z' = l - z$; por lo que, haciendo en la última expresión $z = l - z'$, tendríamos:

$$y = \left(1 - \frac{z'}{l} \right) \frac{z'^2}{l^2} \cdot \frac{Ml^2}{8EI},$$

que es la expresión [33] precedente; cosa que el lector habrá podido comprobar a la simple vista de la figura 2.^a, sin necesidad de tanto documentado *circunloquio*.

Iba a poner el punto final, pero se me ha ocurrido dar lectura a las cuartillas y he encontrado una omisión lamentable. La mayúscula E , tan prodigada en el producto EI , se me pasó decir lo que significaba. Es, ni más ni menos, el coeficiente de elasticidad longitudinal, lo que yo he querido que dicha mayúscula represente, y creo que el lector habrá adivinado fácilmente mi intención y subsanado el desaguisado, perdonándome tal *lapsus*, que no ha sido de los *calami*, por cierto.