

CALCULO DE UNA RED HIDRAULICA POR MEDIO DEL PRINCIPIO DEL MINIMO ESFUERZO

Por EDUARDO GRUNER, Ingeniero Consultor. Basilea (Suiza)

Y

GUSTAVO WUESTEMANN, Ingeniero E. P. F. Basilea (Suiza).

Se complace la REVISTA en publicar el presente artículo de los Sres. Gruner y Wuestemann sobre un importante tema de Hidráulica. Los Sres. Gruner, hijos del ilustre Doctor que fué tan conocido y admirado por los Ingenieros españoles de la especialidad, continúan brillantemente la tradición heredada. De ello es muestra excelente el trabajo en que D. Eduardo Gruner y el Sr. Wuestemann presentan un estudio sobre la aplicación del principio fundamental del mínimo esfuerzo al cálculo de caudales en una cámara de equilibrio con estrangulamiento, alimentada por varias conducciones. El método está explicado por un ejemplo numérico, y la validez de este principio se demuestra en un caso sencillo.

Enunciación general del problema.

En el cálculo de una red hidráulica, por ejemplo una red de conducciones de distribución, se trata, en general, de determinar el régimen de corriente en el interior de la red, partiendo de las condiciones en los límites, presiones o caudales, como datos.

Para mejor fijar las ideas, nos referiremos a un caso práctico. Imaginemos que en la red (fig. 8) compuesta de conductos simples la rugosidad de los tubos y el caudal Q , entrando por el punto A y saliendo por el punto B , son conocidos. Si nos limitamos a fijar las condiciones de continuidad sin tener en cuenta las condiciones dinámicas, existe *a priori* todo un conjunto de regímenes de corrientes, por así decirlo, "geométricamente" posibles. Llamémoslas "configuraciones", traduciendo así la expresión "flow pattern" adoptada por la literatura americana.

Se puede introducir la noción "grado de libertad geométrica" en analogía con la dinámica de los sistemas sólidos en Mecánica. En nuestro ejemplo este grado es *dos*, y Q_1 y q pueden ser considerados como "coordenadas", determinantes de una configuración cualquiera dentro del espacio constituido por el conjunto de las posibles.

Volviendo al problema general, se trata, pues, de formular las condiciones dinámicas, fijando en el conjunto de configuraciones la que se establece como estado de corriente real, o dicho de otra forma, una vez el problema determinado, no hay más que una sola configuración que satisfaga también a las condiciones dinámicas. Podemos también partir del conjunto de configuraciones que únicamente satisfagan las condiciones dinámicas y determinar aquella que cumple también las condiciones de continuidad.

Para muchos casos, por ejemplo redes de conducción con nudos simples, el problema está resuelto (1). En él convendrá adoptar el método de aproximaciones sucesivas conocido en inglés por "relaxation" (2).

Se determinará un modelo cercano al estado real de la corriente por un cálculo simple aproximado. Recordaremos las leyes de Kirchhoff para las redes eléctricas que aplicadas a la Hidráulica se expresan en la forma siguiente:

1.^a Condición de continuidad: La suma de caudales que se reúnen en un nudo de la red es nulo.

2.^a Condición dinámica: La suma de las pérdidas de carga a lo largo de un circuito cerrado es nula.

Según la naturaleza de las condiciones en los límites, utilizaremos una u otra de ellas para corregir sucesivamente el modelo.

Es evidente que para problemas de este género el presente estudio no podrá aportar una importante contribución. Las redes de nudos simples, es decir, sin discontinuidades complicadas en las uniones, se calculan generalmente por el método esbozado anteriormente.

Es diferente cuando se trata de redes con complicadas discontinuidades, donde la formulación de las condiciones dinámicas bajo la forma de pérdidas de cargas resulta difícil, si no imposible. En estos casos conviene arrancar del principio del mínimo esfuerzo. La ventaja de este método reside en el hecho de que, siendo un principio de variación, el régimen entero está caracterizado por una sola magnitud: la energía del caudal total.

La aplicación de este método se indicará en un ejemplo del régimen de caudales en una cámara de equilibrio con estrangulamiento, alimentada por varias conducciones.

Previamente conviene recordar por algunas observaciones generales el papel que desempeña el principio del mínimo esfuerzo en la evolución de la Física y muy particularmente en Hidráulica.

Para las referencias históricas, nos hemos basado en las notas contenidas en el libro del Sr. Charles Jaeger (3).

El principio del mínimo esfuerzo.

1. *Aplicación física.* — Es un dato universal de la Física que los fenómenos de la naturaleza se desarrollan según el principio del mínimo esfuerzo.

Este principio, según las condiciones dadas, se traduce en dos consecuencias:

1.^a Cuando el recorrido está determinado, el fenómeno se desarrolla de modo que se produzca un efecto máximo.

2.^a Cuando el recorrido es libre, la decisión es tomada por aquél entre los disponibles (en nuestro caso, el conjunto de configuraciones), para el cual el fenómeno se desarrolla con el mínimo esfuerzo.

Esta ley la encontramos en todos los campos de la Física, algunas veces en forma implícita.

Leonardo de Vinci (1452-1519) ya enunció el principio, escribiendo "Ogni azione di natura è fatta per la più breve via ch'è possibile" (3).

Pierre de Fermat (1608-1665) definió el recorrido de un rayo de luz entre dos puntos dados como aquél entre todos los geoméricamente posibles, para el cual es mínimo el tiempo necesario para realizarlo.

K. F. Gauss (1777-1855) estableció el principio fundamental del mínimo esfuerzo en Física.

2. *Aplicación a la Hidráulica.* — Belanger (4) calculó el caudal sobre un vertedero de pared gruesa horizontal, admitiendo que sea igual al máximo posible para una posición dada de la línea de energía. Si designamos el caudal por Q y el espesor de la lámina de agua sobre el vertedero por h , el principio de Belanger se expresa por $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$ para caudales aproximados al que se establece en la realidad (figura 1.^a).

Boussinesq (5), generalizando el principio de Belanger, calculó el caudal sobre un vertedero en pared delgada. En su "Essai sur la théorie des eaux courantes" introduce la noción del "principio de estabilidad en Hidráulica" como generalización del principio de Belanger.

Böss (6) demostró en 1919 que en un canal abierto la transición del régimen lento al rápido se efectúa

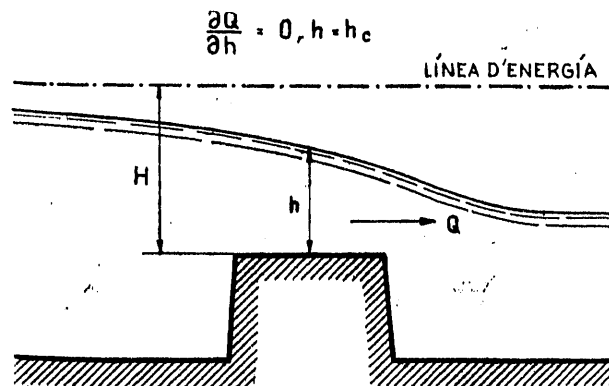


Figura 1.^a

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 0, h = h_c$$

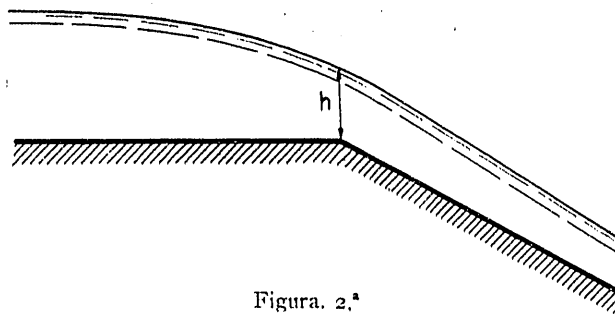


Figura 2.^a

pasando por una altura crítica, para la cual, admitiendo que el caudal sea dado, la línea de energía ocupa una posición mínima. Designando por H la altura de la línea de energía, este principio se expresa en la forma siguiente:

$$\frac{\delta H}{\delta h} = 0.$$

Fawer (7) ha estudiado la presa vertedero. Calculó el caudal por medio de la construcción de Prasil, partiendo de diferentes hipótesis para el contorno superior de la lámina vertiente, y demostró que la construcción que da el máximo caudal corresponde a los resultados obtenidos en la realidad.

Acabamos de exponer de una manera general cómo la noción de "altura crítica" en el vertido en canales abiertos se ha desarrollado en Hidráulica. No obstante, no hemos hecho una exposición completa de su desarrollo. Se trataba de hacer resaltar que la introducción de la altura crítica era, sin duda, debida al reconocimiento de la validez general del principio del mínimo esfuerzo.

La Hidráulica moderna se esfuerza en reconocer las fuentes fundamentales de los fenómenos de observación, y, desde este punto de vista, el principio del mínimo esfuerzo como principio de variación, constituye un medio poderoso de investigación. Los estudios en este sentido se encuentran en franco progreso. Recordamos a este efecto los trabajos recientes de L. Escande (8) y Ch. Jaeger (9).

Enunciación del principio para las redes hidráulicas.

Pasamos ahora al caso que a continuación vamos a tratar, el cálculo del régimen de corriente en una red de conducciones, partiendo de las condiciones en los límites, como datos.

Para este caso, el principio se expresa como sigue:

En el conjunto de configuraciones, es decir, estados de corriente que satisfacen las condiciones en los límites y las condiciones de continuidad en el interior de la red, el régimen que se establecerá en la

$\frac{Q_a}{Q_t}$ = Relación entre el caudal lateral y el caudal total.

f_d = Sección de la conducción principal, es decir, sección del cuello del venturi.

f_a = Sección de la conducción lateral, es decir, sección mínima de la vena líquida que pasa a través del estrangulamiento.

v_t, v_a, v_d = Velocidades en las conducciones.

h_a = Pérdida de carga para el caudal lateral Q_a .

h_d = Pérdida de carga para el caudal Q_d en la conducción principal.

Los coeficientes ζ_a, ζ_d no dependen más que del coeficiente $\frac{Q_a}{Q_t}$, y han sido determinados en el Laboratorio de Munich (10).

$$\left. \begin{aligned} h_a &= \zeta_a \cdot \frac{v_t^2}{2g} \\ h_d &= \zeta_d \cdot \frac{v_t^2}{2g} \end{aligned} \right\}$$

Toma lateral. — Se tiene como fórmula para la pérdida de potencia:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} (\zeta_a Q_a Q_t^2 + \zeta_d Q_d Q_t^2) + Q_a^3 \frac{\gamma}{f_a^2 2g}$$

El segundo término representa la pérdida debida a la altura dinámica en la cámara de equilibrio, después de pasar el estrangulamiento, mientras que el primer término representa la pérdida de potencia en el venturi propiamente dicho.

Con la notación de 3, 2:

$$Q_a = q;$$

$$Q_t = Q + q; \quad \frac{Q_a}{Q_t} = \frac{q}{q + Q};$$

$$Q_d = Q;$$

y poniendo $k = \frac{q}{Q}$ obtenemos:

$$\Delta N'' = \left[\frac{\gamma}{f_d^2 2g} \{ \zeta_a k (1+k)^2 + \zeta_d (1+k)^2 \} + k^3 \frac{\gamma}{f_a^2 2g} \right] Q^3 = \beta Q^3;$$

En las consideraciones siguientes intervienen también las derivadas de $\Delta N''$ respecto al caudal lateral q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta N''}{\partial q} &= \frac{\partial \beta}{\partial q} \cdot Q^3; \quad \frac{\partial \beta}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{1}{Q}; \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot Q^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial k} &= [\zeta_a' k + \zeta_a] (1+k)^2 + 2k(1+k) \{ + \\ &+ \zeta_a' + 2\zeta_d(1+k) \} \frac{\gamma}{f_d^2 2g} + 3k^2 \frac{\gamma}{f_a^2 2g}; \end{aligned}$$

en donde el índice ' significa $\frac{\partial}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)}$;

$$\frac{\partial^2 \Delta N''}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} \cdot Q;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} &= \left[\zeta_a (4+6k) + 2\zeta_a' \left(1 + \frac{k}{1+k} \right) + \right. \\ &+ \zeta_a'' \frac{k}{(1+k)} + 2\zeta_d + 2\zeta_d' \frac{1}{(1+k)} + \\ &+ \left. \zeta_d'' \frac{1}{(1+k)^2} \right] \frac{\gamma}{f_d^2 2g} + 6k \frac{\gamma}{f_a^2 2g}; \end{aligned}$$

en donde el índice '' significa $\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)^2}$.

Aducción lateral:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [\zeta_a Q_a Q_t^2 + \zeta_d Q_d Q_t^2].$$

Con las ideas de 3-2:

$$Q_a = -q;$$

$$Q_t = Q; \quad \frac{Q_a}{Q_t} = -\frac{q}{Q};$$

$$Q_d = Q + q,$$

y poniendo $k = \frac{q}{Q}$, se obtiene:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta_a k + \zeta_d (1+k)] Q^3 = \beta Q^3;$$

$$\frac{\partial \Delta N''}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} Q^2;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta_a' k - \zeta_a + \zeta_d' (1+k) + \zeta_d];$$

en donde el índice ' significa $\frac{\partial}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)}$;

$$\frac{\partial^2 \Delta N''}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} Q;$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta_a'' k - 2\zeta_a' + \zeta_d'' (1+k) + 2\zeta_d'];$$

para la que el índice '' significa $\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)^2}$.

Las dimensiones de los venturis son las siguientes:

Conducciones números 1, 2, 3:

$$f_d = 45 \text{ m.}^2 f_a = 0,7 \cdot 31 = 21,7 \text{ m.}^2.$$

N. B. — Los estrangulamientos propiamente dichos tienen una sección de 31 m.^2 . La contracción de la vena se considera con un coeficiente de 0,7.

Conducciones números 4, 5:

$$f_d = 22,5 \text{ m.}^2 f_a = 0,7 \cdot 15,5 = 10,9 \text{ m.}^2.$$

ξ_a y ξ_d tienen los valores siguientes (ver referencia (9), página 436).

$\frac{Q_a}{Q}$	TOMA LATERAL		ADUCCION LATERAL	
	ξ_d	ξ_a	ξ_d	ξ_a
0	0,05	0,95	0,04	— 1,03
0,1	— 0,05	0,91	0,11	— 0,70
0,2	— 0,08	0,88	0,18	— 0,40
0,3	— 0,07	0,88	0,24	— 0,15
0,4	— 0,05	0,89	0,30	0,09
0,5	0	0,92	0,35	0,29

obteniéndose la ξ'_a , ξ''_a , ξ'_d , ξ''_d por diferenciación numérica en diferencias finitas.

Estos valores sirven para determinar $\beta_4 = \beta_5 = \beta$ para las conducciones números 4 y 5 que están representadas, así como sus derivadas con respecto a k en el diagrama (fig. 6.^a).

Las secciones respectivas de las conducciones números 4 y 5, son la mitad de las de las conducciones números 1, 2 y 3, y, en consecuencia, la relación de las β es de $(1/2)^2 = 1/4$, o sea

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\beta}{4}, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial k_1} = \frac{\partial \beta_2}{\partial k_2} = \frac{\partial \beta_3}{\partial k_3} = \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_4},$$

etcétera.

La sustitución de los venturis con estrangulamiento por tubos con aducción o toma lateral, es sólo una aproximación. Debe esperarse que los valores de β difieran algo de los reales.

Esto, sin embargo, dentro de este estudio, no tiene importancia. Se trata sólo de probar el método. Desde este punto de vista nada significa si el diagrama (fig. 6.^a) ha sido efectivamente determinado por ensayos en modelos reducidos o por medio de alguna aproximación.

3-4. Ecuaciones que determinan el régimen hidráulico. — El principio del mínimo esfuerzo, para el caso que consideramos, se expresa como sigue:

En el conjunto de los modelos — es decir, regímenes hidráulicos que satisfacen únicamente las condiciones de continuidad — el estado que se establecerá en la realidad será aquel por el cual la pérdida de potencia total entre A y B, o sea N_{A-B} , es un mínimo.

Considerando N_{A-B} como función de los caudales laterales desconocidos, $N_{A-B} = N_{A-B}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$, esta condición se expresa por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_3} = 0, \\ \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_4} = 0, \end{aligned} \quad [1]$$

que con las condiciones de continuidad:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 0, \quad [2]$$

permiten determinar de forma definida los valores de q_1 a q_5 .

En nuestro ejemplo, donde N_{A-B} no puede ser expresado como polinomio de q_1 a q_5 , es decir, donde las derivadas de N_{A-B} respecto a los valores de q no pueden ser representados en función analítica de estos últimos, la solución de las ecuaciones se efectúa por el método antes citado de relajación.

Obtenemos para N_{A-B} la fórmula:

$$\begin{aligned} N_{A-B} = & \alpha_1 (Q_1 + q_1)^3 + \frac{\beta}{4} Q_1^3; \\ & + \alpha_2 (Q_2 + q_2)^3 + \frac{\beta}{4} Q_2^3; \\ & + \alpha_3 (Q_3 + q_3)^3 + \frac{\beta}{4} Q_3^3; \\ & + \alpha_4 (Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)^3 + \alpha_4 (Q_4 + q_4)^3 + \beta Q_4^3; \\ & + \alpha_5 (Q_5 + q_5)^3 + \beta Q_5^3; \end{aligned}$$

y las derivadas parciales con respecto a q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_1} = & 3 \alpha_1 (Q_1 + q_1)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} Q_1^3; \\ & - 3 \alpha_5 (Q_5 + q_5)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial q_5} Q_5^3 - 3 \alpha_4 (Q_4 + Q_5 + \\ & + q_4 + q_5)^2 = 0. \end{aligned}$$

Recordando la relación

$$\frac{\partial \beta}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{1}{Q}$$

realidad es aquel por el cual la *pérdida de potencia* del caudal total que atraviesa la red es mínima.

A continuación expondremos la aplicación práctica por medio de un ejemplo.

Los túneles de toma se continúan en forma de conducciones forzadas, cada una de las cuales se comunica con la cámara de equilibrio por medio de un estrangulamiento.

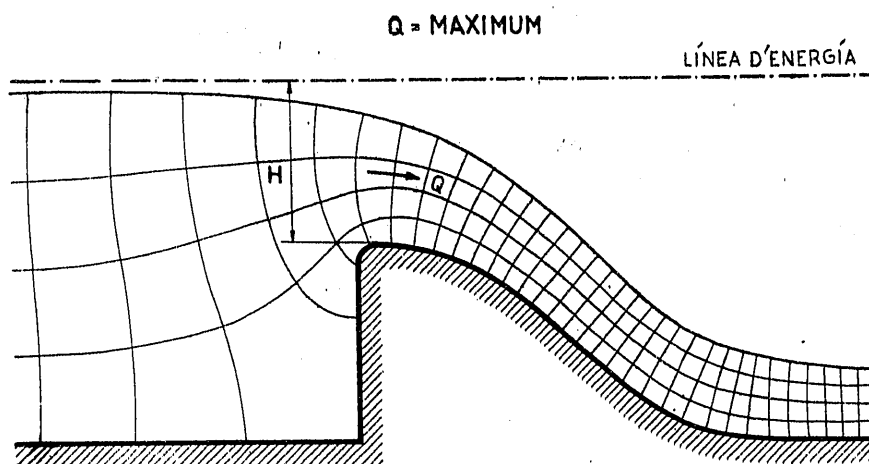


Figura 3.ª

Régimen de caudales en una cámara de equilibrio.

1. *Descripción de la obra.* — Se trata de una central hidráulica con pequeña altura de salto. La toma se hace de un embalse por túneles que llevan el caudal a las turbinas. Dada la longitud de estos túneles, se sitúa una cámara de equilibrio aguas arriba de la central.

Las conducciones convergen por ambos lados hacia los estrangulamientos, alcanzando su sección mínima inmediatamente debajo de éstos. Forman así una especie de "Venturis" con aberturas en la parte más estrecha (cuello), situada en las proximidades de los estrangulamientos. Los tres primeros túneles alimentan cada uno una turbina. El cuarto se bifurca antes de la cámara de equilibrio y alimenta dos turbinas.

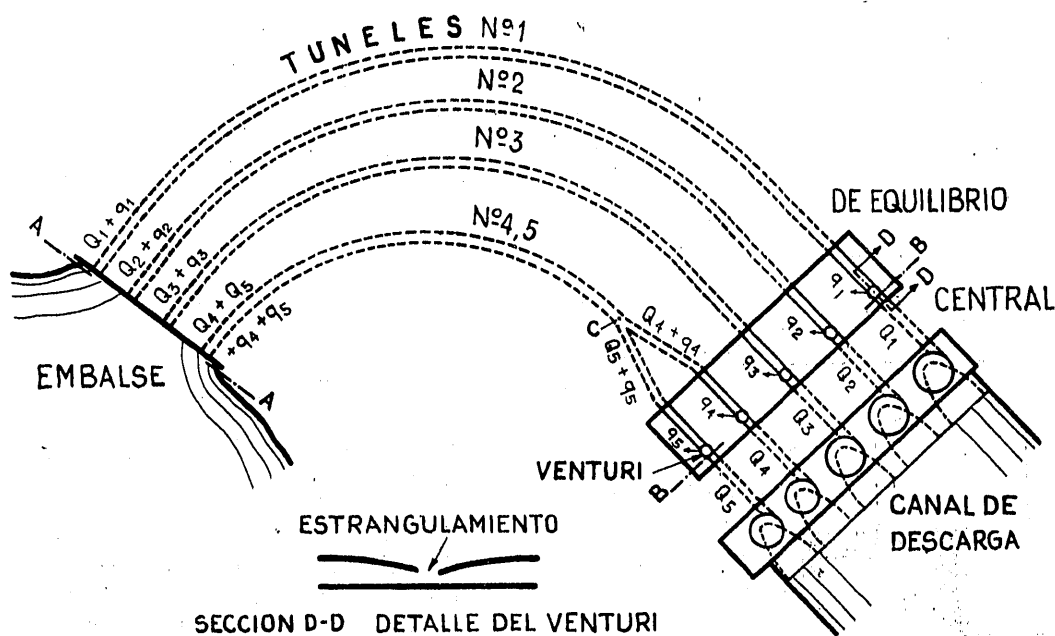


Fig. 4.ª — Plano esquemático de la obra.

Las rugosidades de las conducciones y los caudales de alimentación de las turbinas son conocidos.

Los caudales que atraviesan los cuatro túneles y el régimen de caudales en la cámara de equilibrio han de determinarse.

2. Definición de los símbolos adoptados:

A = Sección inmediatamente antes de la entrada a los túneles.

B = Sección inmediatamente detrás de los estrangulamientos.

C = Punto de bifurcación de las conducciones números 4 y 5.

Q_1 = Caudal de la turbina número 1.

Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5 = Caudales de las turbinas núm. 2 a 5.

q_1 = Caudal a través del estrangulamiento de la conducción número 1, tomado con signo positivo cuando el movimiento tiene lugar desde el interior de la conducción hacia la cámara de equilibrio.

q_2, q_3, q_4 y q_5 = Idem para las conducciones núm. 2 a 5.

α_1 = Coeficiente en la fórmula para la pérdida de potencia en la conducción número 1, desde A hasta la inmediatamente delante del estrangulamiento:

$$\Delta N'_1 = \alpha_1 (Q_1 + q_1)^3.$$

$\alpha_2 \alpha_3$ = Idem para los conductos 2 y 3.

α_{45} = Coeficiente en la fórmula para la pérdida de potencia en la conducción número 4-5 de A hasta C :

$$\Delta N'_1 = \alpha_{45} (Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)^3.$$

α_4 = Coeficiente en la fórmula para la pérdida de potencia en la conducción número 4, desde C hasta inmediatamente delante del estrangulamiento:

$$\Delta N'_4 = \alpha_4 (Q_4 + q_4)^3.$$

α_5 = Idem para la conducción número 5.

β_1 = Coeficiente en la fórmula para la pérdida de potencia en el venturi número 1, $\Delta N''_1 = \beta_1 Q_1^3$.

$\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Idem para los venturis de las conducciones número 2 a 5.

N_{A-B} = Pérdida de potencia total entre los perfiles A y B , es decir, déficit de energía del caudal total $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$ a la llegada al perfil B , con relación al perfil A :

$$N_{A-B} = \Sigma (N' + N''), \text{ dimensión m./seg.}$$

Hipótesis referentes a las pérdidas de carga.

Túneles y conducciones. — La pérdida de potencia en una conducción es igual a la pérdida de carga multiplicada por el caudal y por el peso específico del agua.

La pérdida de carga es igual a la suma de las pérdidas por frotamiento, mas las pérdidas locales, siendo ambas proporcionales al cuadrado del caudal. En consecuencia, la pérdida de carga es proporcional al cuadrado del caudal, y de este modo, la pérdida de potencia proporcional al cubo de este último.

De ello se deduce que los factores α son constantes, cualesquiera que sean los caudales Q y q .

Omitimos el detalle de los cálculos numéricos. Nos limitaremos a dar los resultados:

$$\alpha_1 = 9,10 \cdot 10^{-6} \text{ Tn./seg.}^2 \text{ m}^{-8}$$

$$\alpha_{45} = 5,80 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_2 = 9,50 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_4 = 9,54 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_3 = 7,88 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_5 = 9,54 \cdot 10^{-6}$$

Venturis. — Para valorar las pérdidas efectivas en los venturis sería necesario construir un modelo y determinar las pérdidas para diferentes valores de

$$\frac{Q_a}{Q} \text{ (fig. 5.ª).}$$

Que sepamos, no existe nada escrito sobre el resultado de experiencias semejantes, y por tanto hemos recurrido a los resultados obtenidos en el Laboratorio de Munich (10) para conducciones con aducción o toma lateral en ángulo recto.

Designaremos por:

Q_t = El caudal total.

Q_a = El caudal en la conducción lateral.

Q_d = El caudal en la conducción principal.

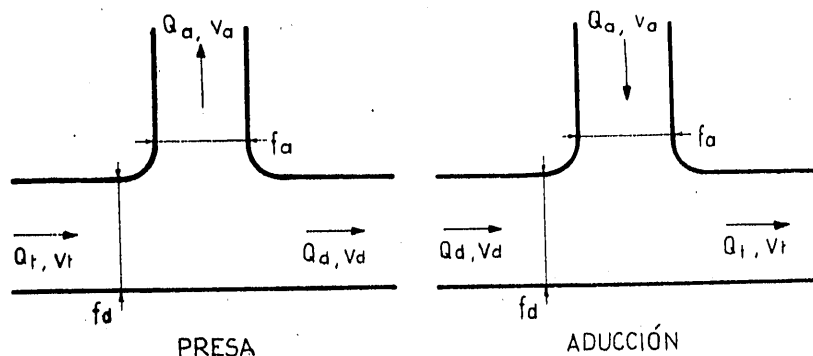


Fig. 5.ª — Conducciones con aducción o toma lateral en ángulo recto, en sustitución de los venturis.

$\frac{Q_a}{Q_t}$ = Relación entre el caudal lateral y el caudal total.

f_d = Sección de la conducción principal, es decir, sección del cuello del venturi.

f_a = Sección de la conducción lateral, es decir, sección mínima de la vena líquida que pasa a través del estrangulamiento.

v_t, v_a, v_d = Velocidades en las conducciones.

h_a = Pérdida de carga para el caudal lateral Q_a .

h_d = Pérdida de carga para el caudal Q_d en la conducción principal.

Los coeficientes ζ_a, ζ_d no dependen más que del coeficiente $\frac{Q_a}{Q_t}$, y han sido determinados en el Laboratorio de Munich (10).

$$\left. \begin{aligned} h_a &= \zeta_a \cdot \frac{v_t^2}{2g} \\ h_d &= \zeta_d \cdot \frac{v_t^2}{2g} \end{aligned} \right\}$$

Toma lateral. — Se tiene como fórmula para la pérdida de potencia:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} (\zeta_a Q_a Q_t^2 + \zeta_d Q_d Q_t^2) + Q_a^3 \frac{\gamma}{f_a^2 2g}$$

El segundo término representa la pérdida debida a la altura dinámica en la cámara de equilibrio, después de pasar el estrangulamiento, mientras que el primer término representa la pérdida de potencia en el venturi propiamente dicho.

Con la notación de 3, 2:

$$Q_a = q;$$

$$Q_t = Q + q; \quad \frac{Q_a}{Q_t} = \frac{q}{q + Q};$$

$$Q_d = Q;$$

y poniendo $k = \frac{q}{Q}$ obtenemos:

$$\Delta N'' = \left[\frac{\gamma}{f_d^2 2g} \{ \zeta_a k (1 + k)^2 + \zeta_d (1 + k)^2 \} + k^3 \frac{\gamma}{f_a^2 2g} \right] Q^3 = \beta Q^3;$$

En las consideraciones siguientes intervienen también las derivadas de $\Delta N''$ respecto al caudal lateral q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta N''}{\partial q} &= \frac{\partial \beta}{\partial q} \cdot Q^3; & \frac{\partial \beta}{\partial q} &= \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{1}{Q}; \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot Q^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial k} &= [\zeta'_a k + \zeta_a \{ (1 + k)^2 + 2k(1 + k) \} + \\ &+ \zeta'_a + 2\zeta_d (1 + k)] \frac{\gamma}{f_d^2 2g} + 3k^2 \frac{\gamma}{f_a^2 2g}; \end{aligned}$$

en donde el índice ' significa $\frac{\partial}{\partial \left(\frac{q}{q + Q} \right)}$;

$$\frac{\partial^2 \Delta N''}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} \cdot Q;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} &= \left[\zeta_a (4 + 6k) + 2\zeta'_a \left(1 + \frac{k}{1 + k} \right) + \right. \\ &+ \zeta''_a \frac{k}{(1 + k)} + 2\zeta_d + 2\zeta'_d \frac{1}{(1 + k)} + \\ &+ \left. \zeta''_d \frac{1}{(1 + k)^2} \right] \frac{\gamma}{f_d^2 2g} + 6k \frac{\gamma}{f_a^2 2g}; \end{aligned}$$

en donde el índice " significa $\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{q}{q + Q} \right)^2}$.

Aducción lateral:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [\zeta_a Q_a Q_t^2 + \zeta_d Q_d Q_t^2].$$

Con las ideas de 3-2:

$$Q_a = -q;$$

$$Q_t = Q; \quad \frac{Q_a}{Q_t} = -\frac{q}{Q};$$

$$Q_d = Q + q,$$

y poniendo $k = \frac{q}{Q}$, se obtiene:

$$\Delta N'' = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta_a k + \zeta_d (1 + k)] Q^3 = \beta Q^3;$$

$$\frac{\partial \Delta N''}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} Q^2;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta'_a k - \zeta_a + \zeta'_d (1 + k) + \zeta_d];$$

en donde el índice ' significa $\frac{\partial}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)}$;

$$\frac{\partial^2 \Delta N''}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} Q;$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = \frac{\gamma}{f_d^2 2g} [-\zeta''_a k - 2\zeta'_a + \zeta''_d (1 + k) + 2\zeta'_d];$$

para la que el índice " significa $\frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{q}{Q} \right)^2}$.

Las dimensiones de los venturis son las siguientes:

Conducciones números 1, 2, 3:

$$f_d = 45 \text{ m.}^2 f_a = 0,7 \cdot 31 = 21,7 \text{ m.}^2.$$

N. B. — Los estrangulamientos propiamente dichos tienen una sección de 31 m.². La contracción de la vena se considera con un coeficiente de 0,7.

Conducciones números 4, 5:

$$f_d = 22,5 \text{ m.}^2 f_a = 0,7 \cdot 15,5 = 10,9 \text{ m.}^2.$$

ξ_a y ξ_d tienen los valores siguientes (ver referencia (9), página 436).

$\frac{Q_a}{Q}$	TOMA LATERAL		ADUCCION LATERAL	
	ξ_d	ξ_a	ξ_d	ξ_a
0	0,05	0,95	0,04	— 1,03
0,1	— 0,05	0,91	0,11	— 0,70
0,2	— 0,08	0,88	0,18	— 0,40
0,3	— 0,07	0,88	0,24	— 0,15
0,4	— 0,05	0,89	0,30	0,09
0,5	0	0,92	0,35	0,29

obteniéndose la ξ'_a , ξ''_a , ξ'_d , ξ''_d por diferenciación numérica en diferencias finitas.

Estos valores sirven para determinar $\beta_4 = \beta_5 = \beta$ para las conducciones números 4 y 5 que están representadas, así como sus derivadas con respecto a k en el diagrama (fig. 6.^a).

Las secciones respectivas de las conducciones números 4 y 5, son la mitad de las de las conducciones números 1, 2 y 3, y, en consecuencia, la relación de las β es de $(1/2)^2 = 1/4$, o sea

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{\beta}{4}, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial k_1} = \frac{\partial \beta_2}{\partial k_2} = \frac{\partial \beta_3}{\partial k_3} = \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_4},$$

etcétera.

La sustitución de los venturis con estrangulamiento por tubos con aducción o toma lateral, es sólo una aproximación. Debe esperarse que los valores de β difieran algo de los reales.

Esto, sin embargo, dentro de este estudio, no tiene importancia. Se trata sólo de probar el método. Desde este punto de vista nada significa si el diagrama (fig. 6.^a) ha sido efectivamente determinado por ensayos en modelos reducidos o por medio de alguna aproximación.

3-4. Ecuaciones que determinan el régimen hidráulico. — El principio del mínimo esfuerzo, para el caso que consideramos, se expresa como sigue:

En el conjunto de los modelos — es decir, regímenes hidráulicos que satisfacen únicamente las condiciones de continuidad — el estado que se establecerá en la realidad será aquel por el cual la pérdida de potencia total entre A y B, o sea N_{A-B} , es un mínimo.

Considerando N_{A-B} como función de los caudales laterales desconocidos, $N_{A-B} = N_{A-B}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$, esta condición se expresa por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_3} = 0, \\ \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_4} = 0, \end{aligned} \quad [1]$$

que con las condiciones de continuidad:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 0, \quad [2]$$

permiten determinar de forma definida los valores de q_1 a q_5 .

En nuestro ejemplo, donde N_{A-B} no puede ser expresado como polinomio de q_1 a q_5 , es decir, donde las derivadas de N_{A-B} respecto a los valores de q no pueden ser representados en función analítica de estos últimos, la solución de las ecuaciones se efectúa por el método antes citado de relajación.

Obtenemos para N_{A-B} la fórmula:

$$\begin{aligned} N_{A-B} = & \alpha_1 (Q_1 + q_1)^3 + \frac{\beta}{4} Q_1^3; \\ & + \alpha_2 (Q_2 + q_2)^3 + \frac{\beta}{4} Q_2^3; \\ & + \alpha_3 (Q_3 + q_3)^3 + \frac{\beta}{4} Q_3^3; \\ & + \alpha_4 (Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)^3 + \alpha_4 (Q_4 + q_4)^3 + \beta Q_4^3; \\ & + \alpha_5 (Q_5 + q_5)^3 + \beta Q_5^3; \end{aligned}$$

y las derivadas parciales con respecto a q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{A-B}}{\partial q_1} = & 3 \alpha_1 (Q_1 + q_1)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} Q_1^3; \\ & - 3 \alpha_5 (Q_5 + q_5)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial q_5} Q_5^3 - 3 \alpha_4 (Q_4 + Q_5 + \\ & + q_4 + q_5)^2 = 0. \end{aligned}$$

Recordando la relación

$$\frac{\partial \beta}{\partial q} = \frac{\partial \beta}{\partial k} \cdot \frac{1}{Q}$$

se obtendrá:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{AB}}{\partial q_1} &= 3\alpha_1(Q_1 + q_1)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_1} Q_1^2; \\ &- 3\alpha_5(Q_5 + q_5)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial k_5} Q_5^2 - 3\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + \\ &\quad + q_4 + q_5)^2 = 0; \\ \frac{\partial N_{AB}}{\partial q_2} &= 3\alpha_2(Q_2 + q_2)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_2} Q_2^2; \\ &- 3\alpha_5(Q_5 + q_5)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial k_5} Q_5^2 - 3\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + \\ &\quad + q_4 + q_5)^2 = 0; \quad [1'] \\ \frac{\partial N_{AB}}{\partial q_3} &= 3\alpha_3(Q_3 + q_3)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_3} Q_3^2; \\ &- 3\alpha_5(Q_5 + q_5)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial k_5} Q_5^2 - 3\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + \\ &\quad + q_4 + q_5)^2 = 0; \\ \frac{\partial N_{AB}}{\partial q_4} &= 3\alpha_4(Q_4 + q_4)^2 - 3\alpha_5(Q_5 + q_5)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial \beta}{\partial k_4} Q_4^2 - \frac{\partial \beta}{\partial k_5} Q_5^2 = 0. \quad [1']\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema siguiente de ecuaciones para las incógnitas q_1 a q_5 :

$$\begin{aligned}&3\alpha_1(Q_1 + q_1)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_1} Q_1^2; \\ &= 3\alpha_2(Q_2 + q_2)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_2} Q_2^2; \\ &= 3\alpha_3(Q_3 + q_3)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_3} Q_3^2; \quad [4] \\ &= 3\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)^2 + 3\alpha_4(Q_4 + q_4)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial k_4} Q_4^2; \\ &= 3\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)^2 + 3\alpha_5(Q_5 + q_5)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial k_5} Q_5^2,\end{aligned}$$

juntamente con la ecuación de continuidad:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 0. \quad [2]$$

3-5. *Procedimiento práctico para resolver las ecuaciones.* — Designemos por z el valor de las expresiones [4], o sea:

$$z = 3\alpha_1(Q_1 + q_1)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \beta}{\partial k_1} Q_1^2. \quad [4']$$

En primera aproximación, suponemos $z = z'$. Entonces se calculan los valores correspondientes de q que resultan de las ecuaciones [4]. El valor estimado z' no coincidirá, generalmente, con el real, y la ecuación de continuidad [2] no se satisfará, o sea:

$$q'_1 + q'_2 + q'_3 + q'_4 + q'_5 = q' \neq 0.$$

Se trata, pues, de corregir z' , de modo que esta suma sea igual a cero. Para la valoración de las correcciones, determinamos la relación entre una variación dz de z y las variaciones correspondientes dq de las q .

Por diferenciación de [4'] se llega a:

$$\begin{aligned}dz &= 6\alpha_1(Q_1 + q_1)dq_1 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_1^2} Q_1^2 dq_1; \\ &= 6\alpha_2(Q_2 + q_2)dq_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_2^2} Q_2^2 dq_2; \\ &= 6\alpha_3(Q_3 + q_3)dq_3 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_3^2} Q_3^2 dq_3; \quad [5] \\ &= 6\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)(dq_4 + dq_5) + 6\alpha_4(Q_4 + \\ &\quad + q_4)dq_4 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_4^2} Q_4^2 dq_4; \\ &= 6\alpha_{45}(Q_4 + Q_5 + q_4 + q_5)(dq_4 + dq_5) + 6\alpha_5(Q_5 + \\ &\quad + q_5)dq_5 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_5^2} Q_5^2 dq_5;\end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned}dq_1 &= \frac{1}{6\alpha_1(Q_1 + q_1) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_1^2} Q_1} dz; \quad [5'] \\ &= r_1 dz; \\ dq_2 &= r_2 dz; \quad dq_3 = r_3 dz; \quad dq_4 = r_4 dz; \quad dq_5 = r_5 dz.\end{aligned}$$

Y, por fin, las correcciones dq :

$$\begin{aligned}dq_1 &= - \frac{\sum q'}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5} \cdot r_1, \\ dq_2 &= - \frac{\sum q'}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5} \cdot r_2, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Asimismo se obtienen los valores corregidos de los caudales laterales:

$$q''_1 = q'_1 + dq_1, \quad q''_2 = q'_2 + dq_2, \text{ etc.}$$

Se comprueba que los q'' satisfacen a la condición [2] de continuidad.

Si el grado de exactitud fijado lo exige, el procedimiento podrá ser aplicado una segunda vez.

3-6. *Cálculo numérico.* — Los caudales de las turbinas son los siguientes:

$$\begin{aligned}Q_1 &= 180 \text{ m}^3/\text{seg.} & Q_4 &= 96 \text{ m}^3/\text{seg.} \\ Q_2 &= 192 \text{ m}^3/\text{seg.} & Q_5 &= 30 \text{ m}^3/\text{seg.} \\ Q_3 &= 192 \text{ m}^3/\text{seg.}\end{aligned}$$

Tenemos nuevamente los valores α dados en el párrafo 3-3:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 9,10 \cdot 10^{-6} \text{ Tn./seg.}^2 \text{ m.}^{-8} & \alpha_{45} &= 5,80 \cdot 10^{-6} \\ \alpha_2 &= 8,50 \cdot 10^{-6} & \alpha_4 &= 9,54 \cdot 10^{-6} \\ \alpha_3 &= 7,88 \cdot 10^{-6} & \alpha_5 &= 9,54 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Los valores de β se representan en el diagrama (figura 6.a).

En primera aproximación z se supone igual a $z' = 0,87 \text{ Tn./m.}^2$.

Las q' resultan de las ecuaciones [4'] por medio de ensayos sucesivos.

Conducción núm. 1: $q'_1 = -10 \text{ m.}^3/\text{seg.}$:

$$k'_1 = \frac{q'_1}{Q_1} = -\frac{10}{180} = -0,056;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = 10 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = 360 \cdot 10^{-6} \text{ (ver fig. 6);}$$

$$3 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10^{-6} (180 - 10)^2 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 180^2 = 0,87 = z'.$$

Conducción núm. 2: $q'_2 = -14$:

$$k'_2 = -\frac{14}{192} = -0,073;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = 6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = 420 \cdot 10^{-6};$$

$$3 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 10^{-6} (192 - 14)^2 + \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 192^2 = 0,87 = z'.$$

Conducción núm. 3: $q'_3 = -11$:

$$q'_3 = -11;$$

$$k'_3 = -\frac{11}{192} = -0,057;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = 10 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = 360 \cdot 10^{-6};$$

$$3 \cdot 7 \cdot 88 \cdot 10^{-6} (192 - 11)^2 + \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 192^2 = 0,87 = z'.$$

Conducción núm. 4, 5: $q'_4 = 5,5$; $q'_5 = 12,5$:

$$k'_4 = \frac{5,5}{96} = 0,057, \quad k'_5 = \frac{12,5}{30} = 0,417;$$

$$\frac{k'_4}{1 + k'_4} = 0,054, \quad \frac{k'_5}{1 + k'_5} = 0,294;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial k} = 23 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial k^2} = 500 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{\partial^3 \beta}{\partial k^3} = 720 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial^4 \beta}{\partial k^4} = 1800 \cdot 10^{-6};$$

$$3 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 10^{-6} (96 + 30 + 5,5 + 12,5)^2 + 3 \cdot 9 \cdot 54 \cdot 10^{-6} (96 + 5,5)^2 + 23 \cdot 10^{-6} \cdot 96^2 = 0,87 = z';$$

$$3 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 10^{-6} (96 + 30 + 5,5 + 12,5)^2 + 3 \cdot 9 \cdot 54 \cdot 10^{-6} (30 + 12,5)^2 + 500 \cdot 10^{-6} \cdot 30^2 = 0,87 = z'.$$

$$9'_1 + 9'_2 + 9'_3 + 9'_4 + 9'_5 = -10 - 14 - 11 + 5,5 + 12,5 = -17 \neq 0.$$

Las q' se han de corregir de modo que la diferencia de -17 sea modificada a cero.

Las ecuaciones [5] permiten calcular las variaciones de las q' para una variación $dz = 1$ de z' ; es decir, los valores r .

Conducción núm. 1:

$$1 = 6 \cdot 9 \cdot 10^{-6} (180 - 10) dq_1 + \frac{1}{4} \cdot 360 \cdot 10^{-6} 180 \cdot dq_1$$

$$dq_1 = 39,2 = r_1.$$

Conducción núm. 2:

$$1 = 6 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 10^{-6} (192 - 14) dq_2 + \frac{1}{4} \cdot 420 \cdot 10^{-6} 192 dq_2;$$

$$dq_2 = 34,3 = r_2.$$

Conducción núm. 3:

$$1 = 6 \cdot 7 \cdot 88 \cdot 10^{-6} (192 - 11) dq_3 + \frac{1}{4} \cdot 360 \cdot 10^{-6} 192 dq_3;$$

$$dq_3 = 40,3 = r_3.$$

Conducción núm. 4:

$$1 = 6 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 10^{-6} (96 + 30 + 5,5 + 12,5) (dq_4 + dq_5) + 6 \cdot 9 \cdot 54 \cdot 10^{-6} (96 + 5,5) dq_4 + 720 \cdot 10^{-6} 96 \cdot dq_4.$$

Conducción núm. 5:

$$1 = 6 \cdot 5 \cdot 80 \cdot 10^{-6} (96 + 30 + 5,5 + 12,5) (dq_4 + dq_5) + 6 \cdot 9 \cdot 54 \cdot 10^{-6} (30 + 12,5) dq_5 + 1800 \cdot 10^{-6} \cdot 30 dq_5.$$

$$dq_4 = 11,6 = r_4;$$

$$dq_5 = 15,4 = r_5;$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 39,2 + 34,3 + 40,3 + 11,6 + 15,4 = 140,8.$$

Las correcciones se calculan según [6]:

$$dq_1 = \frac{39,2}{140,8} \cdot 17 = 4,8 \text{ m.}^3/\text{seg.}$$

$$dq_2 = \frac{34,3}{140,8} \cdot 17 = 4,2$$

$$dq_3 = \frac{40,3}{140,8} \cdot 17 = 4,9$$

$$dq_4 = \frac{11,6}{140,8} \cdot 17 = 1,4$$

$$dq_5 = \frac{15,4}{140,8} \cdot 17 = 1,8$$

$$17,1 \text{ m.}^3/\text{seg.}$$

Los caudales corregidos son, por tanto:

$$q''_1 = -10 + 4,8 = -5,2 \text{ m.}^3/\text{seg.} \quad q''_4 = 5,5 + 1,4 = 6,9$$

$$q''_2 = -14 + 4,2 = -9,8 \quad q''_5 = 12,5 + 1,8 = 14,3$$

$$q''_3 = -11 + 4,9 = -6,1 \quad +21,2$$

La corriente de intercambio en la cámara de equilibrio, a través de los estrangulamientos, resulta, por tanto, ser de un caudal de 21,5 m.³/seg., procedente de las conducciones números 4 y 5, que se vierte en las conducciones números 1, 2 y 3.

Como comprobación, determinamos para el régimen que hemos calculado, así como para otros cuatro próximos a él, los valores correspondientes de las pérdidas de potencia N_{A-B} , según la ecuación [3]:

q_1 m. ³ /seg.	q_2	q_3	q_4	q_5	$q_4 + q_5$	N_{A-B} m./seg.
- 1,5	- 6	- 2	1	8,5	9,5	207,4
- 3,5	- 8	- 4	3	11,5	15,5	205,6
- 5,5	- 10	- 6	7	14,5	21,5 *	205,0
- 7,5	- 12	- 8	10	17,5	27,5	206,7
- 9	- 14	- 10	13	20,5	33,5	209,9

* Estado real.

Los valores de N_{A-B} se llevan a un diagrama (figura 7.^a) en función del caudal total, $q_4 + q_5$.

Es claramente visible que N_{A-B} alcanza un mínimo para la serie de valores efectivos de q .

4. *Prueba de la validez del principio del mínimo esfuerzo para el caso de una red simple de conducciones.* — Es importante señalar que hasta ahora hemos omitido probar la validez del principio.

A continuación, para simplificar, vamos a demostrarlo por medio del caso de una red simple de conducciones.

Examinemos un sistema con las características siguientes (fig. 8.^a).

Consideremos las rugosidades de las conducciones, las dimensiones de la red y el caudal total Q ,

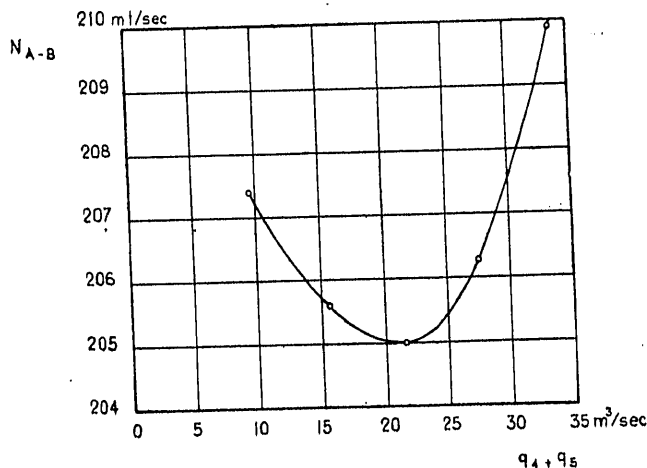


Fig. 7.^a — Pérdida de potencia N_{A-B} en función de diferentes caudales en la cámara de equilibrio.

como datos, y los caudales Q_1 y q como incógnitas a determinar.

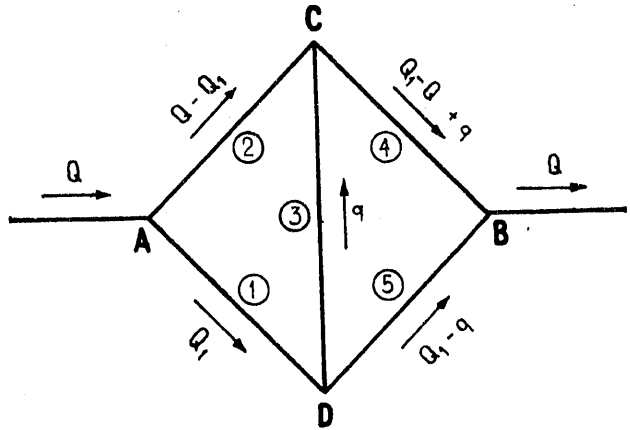


Fig. 8.^a — Esquema de una red simple de conducciones.

Designemos por α los coeficientes de rugosidad de las conducciones (véase la definición del párrafo 3-2). Para simplificar no se tienen en cuenta las pérdidas locales en los nudos.

La pérdida de potencia total N_{A-B} entre las secciones A y B, se presenta, entonces, bajo la forma:

$$N_{A-B} = \alpha_1 Q_1^3 + \alpha_2 (Q - Q_1)^3 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 (Q - Q_1 + q)^3 + \alpha_5 (Q_1 - q)^3.$$

Las condiciones para que exista un mínimo de N_{A-B} nos llevan a las ecuaciones:

$$\frac{\partial N_{A-B}}{\partial Q_1} = 3\alpha_1 Q_1^2 - 3\alpha_2 (Q - Q_1)^2 - 3\alpha_4 (Q - Q_1 + q)^2 + 3\alpha_5 (Q_1 - q)^2 = 0;$$

$$\frac{\partial N_{A-B}}{\partial q} = 3\alpha_3 q^2 + 3\alpha_4 (Q - Q_1 + q)^2 - 3\alpha_5 (Q_1 - q)^2 = 0.$$

Sea:

$$\alpha_1 Q_1^2 - \alpha_2 (Q - Q_1)^2 - \alpha_4 (Q - Q_1 + q)^2 + \alpha_5 (Q_1 - q)^2 = 0. \quad [7]$$

$$\alpha_3 q^2 + \alpha_4 (Q - Q_1 + q)^2 - \alpha_5 (Q_1 - q)^2 = 0. \quad [8]$$

Sumando [7] y [8], se obtiene:

$$\alpha_1 Q_1^2 - \alpha_2 (Q - Q_1)^2 + \alpha_3 q^2 = 0. \quad [9]$$

[8] y [9] son idénticas a las ecuaciones que se obtienen expresando que a lo largo de los recorridos $A C D A$ y $D C B D$ la suma de las pérdidas de carga es cero (segunda ley de Kirchhoff, ver párrafo 1).

Con esto hemos probado, para este caso, que el principio del mínimo esfuerzo conduce, de idéntica manera, a las ecuaciones que expresan la igualdad de las pérdidas de carga.

Es evidente que en la práctica, para un caso tan simple — que ha servido a título de ilustración —, no se formulará el principio del mínimo esfuerzo, sino que se partirá directamente de las ecuaciones de pérdidas de carga.

Resumen.

Hemos demostrado cómo el principio del mínimo esfuerzo puede ser aplicado para calcular el régimen de corriente en una red hidráulica con discontinuidades complejas o bien los regímenes de caudales en una cámara de equilibrio con estrangulamientos alimentada por varias conducciones. Un ejemplo numérico ha servido para ilustrar el método de cálculo. Además, la prueba de validez del principio ha sido dada para una red simple de conducciones.

Pretendemos con esto que el principio del mínimo esfuerzo tenga una validez completamente general en Hidráulica y que hay muchas posibilidades para aplicaciones análogas a la presentada.

Así, por ejemplo, es de prever que la estabilidad de ciertas formas de corriente podrá encontrar su explicación en el balance de la energía en la proximidad del estado de equilibrio. Este problema no ha sido tocado en este estudio, pero lo mencionamos a causa de su analogía con el caso tratado.

Bibliografía.

1. S. H. Goudstikker, M. Gunzinger: "Contribution au calcul des réseaux maillés de distribution d'eau par la méthode Hardy-Cross. *Schweiz. Techn. Zeitschrift*, núm. 34, 21 août 1952.

- G. M. Fair: "Analyzing flow in pipe Networks". *Eng. News-Record*. March 3, 1938.
- J. J. Doland: "Simplified analysis of flow in water distribution systems". *Eng. News-Record*, oct. 1, 1936.
2. R. V. Southwell: "Relaxation methods in engineering science". *Oxford University Press*, 1943.
- R. V. Southwell: "Relaxation methods in theoretical physics". *Oxford at the Clarendon Press*, 1946.
3. Leonardo da Vinci (1452-1519): *Quaderni d'Anatomia* IV, fol. 16 recto.
4. J. B. Ch. Belanger (1790-1874): "Notes sur le cours d'hydraulique". *Mém. Ecole nat. Ponts Chaussées*. Paris, 1849-50, págs. 32-33.
5. J. V. Boussinesq: *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Paris, 1877, págs. 120, 142 et 573.
6. P. Boess: *Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fließzustandes*. Verlag Springer. Berlin, 1919, p. 20 et 52.
7. C. Fawer: *Etude de quelques écoulements permanents à filets courbes*. Lausanne, 1937, p. 63-64.
8. L. Escande: *Notice sur les travaux scientifiques*, de M. Léopold Escande. Toulouse. Edouard Privat, 1953.
9. Ch. Jaeger: *Technische Hydraulik*. Birkhäuser Basel, 1949, p. 87.
10. G. Vogel: "Untersuchungen über den Verlust in rechtwinkligen Rohrverzweigungen. *Mitt Hydr. Inst. München*, édité par le professeur D. Thoma, Cahier 1 (1926), Cahier 2, p. 61 (1928), Cahier 4, p. 88 (1931).