

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,
Ingeniero de Caminos.

Nos hace observar el autor la dudosa eficacia de las comprobaciones de cálculo generalmente usadas. Y finaliza su trabajo presentándonos de modo sugestivo cómo las distintas formas posibles de agrupación de los términos de la expresión de Bernouilli-Navier conducen a la formulación no sólo de los diversos métodos clásicos, sino también a la de alguno de los métodos modernamente propuestos.

VI

Los métodos comprobatorios.

Quedó indicada anteriormente la diferencia que es menester establecer, en cuanto al grado de confianza que pueden inspirar los resultados de los cálculos, entre los métodos que operan explícitamente con deformaciones y aquellos otros en los que éstas quedan implícitas y son solamente los entes de cálculo (*caractéristiques de tension, Schnittkräfte*, etcétera), es decir, los momentos flectores y esfuerzos normales y tangenciales, los elementos que se manejan y cuyos valores se obtienen.

Se exponía como ejemplo el caso del pórtico doblemente indeterminado, en el supuesto de que para cualquier caso de carga se hubiese cometido error al obtener por el método de Castigliano las dos hiperestáticas de su apoyo articulado A; ignorantes del error cometido se determinaba, partiendo de esas hiperestáticas, el diagrama de momentos flectores y los valores de las reacciones en el otro extremo. Hechas las comprobaciones del equilibrio de cada nudo y de cada barra resultaban todas ellas satisfactorias, y, sin embargo, el diagrama era elásticamente falso.

La necesidad de comprobación elástica venía en este caso producida porque solamente en la etapa previa de los cálculos (al plantear que son nulas las derivadas del trabajo elástico respecto a esas incógnitas, V_A y H_A), es en la que se tiene en cuenta el carácter elástico del sistema y después no se aplican más condiciones que las estáticas del equilibrio del cuerpo sólido: todas esas comprobaciones posteriores no versan sino sobre esta segunda parte del cálculo; comprobaciones que, por numerosas que sean, no hacen sino confirmar que durante ella se han aplicado correctamente las tres ecuaciones de la Mecánica Racional, pero nos dejan ignorantes de si las dos reacciones superabundantes fueron o no determinadas correctamente.

Cabría pensar que este inconveniente es privativo de los métodos generales que determinan previamente las reacciones hiperestáticas (ya que justamente por ser unas reacciones superabundantes puede

atribuírseles un valor cualquiera, sin que de ello resulte incompatibilidad estática alguna). Sin embargo, idéntico reparo puede ponerse a otros muchos métodos de cálculo.

Y en particular, a los métodos de aproximaciones sucesivas de distribución de momentos.

Ya señalamos que, aunque están en esencia basados estos métodos en el estudio de los giros, operan de hecho sin determinarlos, deduciendo tan sólo los valores del diagrama de momentos flectores, y una vez en posesión de este diagrama se deducen de él, mediante las condiciones de la estática, los valores de los esfuerzos normales, tangenciales, reacciones de apoyo, y, *extremo éste muy importante*, los valores de las fuerzas de fijación de nudos o bien el valor de las fuerzas que, aplicadas en un nudo, provocan una determinada traslación.

En la adjunta figura 61 recogemos algunos de estos casos. Por ejemplo: en 61-a) aparece el consabido pórtico sometido a una cierta carga en su dintel. Hecho el cálculo por el método de Cross, la ley de momentos flectores en la primera etapa (nudos no traslacionales), está totalmente definida por los tres valores:

$$M_B^I, M_C^I \text{ y } M_D^I,$$

a los que llegamos después de algunos ciclos con cuantas cifras deseemos. Dado que esta estructura tiene solamente cinco reacciones de sustentación, entre esos tres valores y las tres ecuaciones de la estática, habría una condición, en exceso, si no existiese además como incógnita la magnitud de la fuerza de inmovilización. Siendo por esto el número de condiciones el mismo que el de incógnitas, resulta evidente que aunque sea erróneo el valor de uno, o el de dos o incluso el de los tres momentos flectores obtenidos por Cross, ninguna incompatibilidad aparece al completar dicho diagrama, mediante las ecuaciones de la estática, con los valores de las reacciones y de la fuerza de fijación. Cuantas comprobaciones de equilibrio de nudo, equilibrio de barra, proyecciones de fuerzas, momentos de fuerzas, etc., etc., se hagan, resultarán concordantes y no permiten descubrir el error, incluso el triple error, cometido.

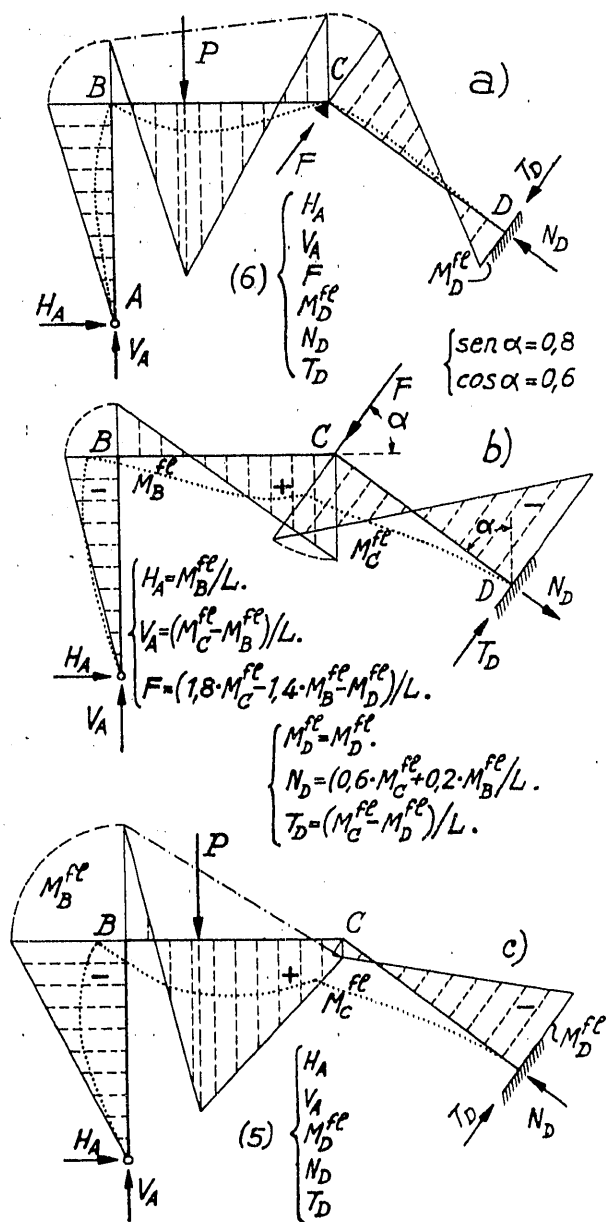


Fig. 61. — Obtenidos por el "moment distribution method" los diagramas de momentos flectores, tanto en la etapa a) de nudos inmóviles, como en la b) de traslación, podemos equivocarnos en uno o en todos los valores de los momentos, sin que ninguna incompatibilidad estática nos lo pueda advertir. En la etapa final, c), la estática solamente nos da una ecuación que los ligue.

Por idéntica causa, ante la misma perplejidad sobre la validez de los resultados, nos hallamos al estudiar por Cross la etapa traslacional: supuesta una traslación Δ_1 entre extremos de una barra, y, por tanto, las Δ_2 y Δ_3 de las barras restantes, la distribución de unos pares $\frac{6EI}{L^2}$ da unos valores:

$$M_B^{fI} \quad M_C^{fI} \quad M_D^{fI},$$

que definen el diagrama de momentos (fig. 61-b), y que, junto con las ecuaciones de la estática, nos dan los valores de las reacciones y de la fuerza F que ha producido la traslación. En dicha figura 61-b se han anotado los valores de las cinco reacciones y el de la fuerza F , valores que todos ellos quedan expresados, como en ella se ve, en función exclusiva de las características puramente geométricas del pórtico y de esos tres valores de los momentos flectores:

Como fácilmente puede observarse, es posible dar a los momentos M_B^{fI} , M_C^{fI} y M_D^{fI} unos valores arbitrarios cualesquiera. Ninguna incompatibilidad puede aparecer entre ninguno de los valores anotados en la figura, y en cada barra y en cada nudo quedan satisfechas las condiciones de la estática. Las equivocaciones que hayamos podido cometer en la determinación de esos momentos flectores se traducirán en que obtendremos valores erróneos tanto de la fuerza F como de las diversas reacciones, sin que podamos apercibirnos de que lo son. También en este caso ello es debido a que las propiedades elásticas de la estructura, y la deformabilidad de la misma, sólo han sido tenidas en cuenta en esa etapa previa de repartición y propagación de momentos.

Aparece, ciertamente, la posibilidad de tener una comprobación de los cálculos cuando, siguiendo este método de Cross, se llega a la etapa de superposición (fig. 61-c), pues al desaparecer la fuerza de fijación, disponemos ya de una condición a la que han de verificar los tres valores M_B^{fI} , M_C^{fI} , M_D^{fI} . La prueba no es, teóricamente, completa, pues son todavía dos las posibilidades de error que estos valores pueden tener (1). El inconveniente práctico es que esta prueba resulta tardía, y entretenido, además, el ir planteando las comprobaciones estáticas de los diversos nudos y piezas.

Se trata, pues, de disponer de un método cómodo y seguro de hacer mediante el estudio de las deformaciones, las comprobaciones elásticas de los diagramas de momentos que se vayan obteniendo; para ello hasta que volvamos tres cuartos de siglo atrás, es decir, a la interpretación cinemática de la ecuación de Jacobo Bernoulli dada por K. Culmann. Advirtamos que este método comprobatorio es general, y tanto da que los momentos flectores a comprobar hayan sido deducidos en la hipótesis de estructura no traslacional como en la de libre movilidad. Y vá-

(1) Para el caso de carga representado en la figura, fuerza vertical aislada sobre el dintel actuando a un tercio de su extremo izquierdo, puede fácilmente comprobar el lector que, al aplicar las tres condiciones de la estática, todas ellas conducen a una misma y única condición:

$$4PL + 21M_B^{fI} - 27M_C^{fI} + 15M_D^{fI} = 0,$$

y por ello, cualquier grupo de valores de los momentos que satisfaga esta condición puede ser solución estática, aunque elásticamente no lo sea.

lido, asimismo, tanto para estructuras con barras de inercia constante como si la inercia es variable dentro de cada barra.

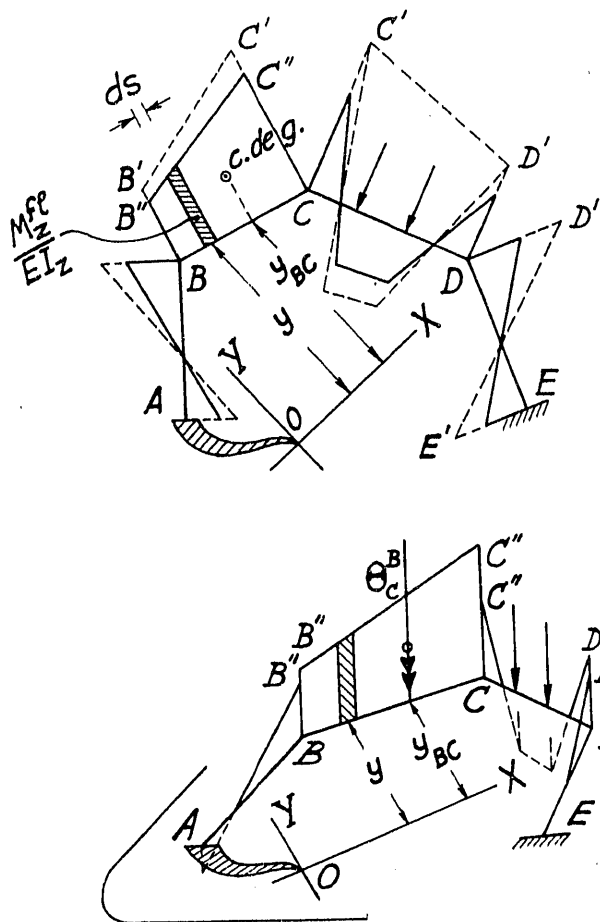


Fig. 62.—Interpretación geométrica del método comprobatorio de los diagramas de momentos flectores.

Si examinamos el diagrama $A'B'C'D'E'$ de momentos flectores en una célula cualquiera de una estructura, por ejemplo, el de la figura 62-a), y reducimos las ordenadas M_z^{fl} de este diagrama, afectándolas del factor $\frac{1}{EI_z}$, el área rayada nos representa (ver también figura 17) el producto:

$$d\theta = \frac{M_z^{fl}}{EI_z} ds \quad (\text{radianes}), \quad [31]$$

que es precisamente el giro relativo entre las dos secciones extremas de un trozo de longitud ds (1).

(1) Es la misma expresión, dada por Navier:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{M_z^{fl}}{EI_z};$$

de la ecuación fundamental de J. Bernouilli:

$$\text{curvatura} = \frac{M_z^{fl}}{\text{constante}}.$$

El giro relativo entre los dos extremos B y C de dicha barra vendrá, pues, expresado por:

$$\Theta_{BC}^B = \text{área momentos reducidos } BB''C''C. \quad [32]$$

El giro del extremo A de la célula respecto a su otro extremo E , será la suma de las áreas correspondientes a todas las barras. Si los extremos A y E están empotrados, o también si la célula $ABCDE$ es una malla cerrada y por tanto sus extremos A y E se confunden, la suma de todas estas áreas de momentos reducidos ha de resultar nula:

$$\sum_E^A \text{áreas} = \int_E^A \frac{M_z^{fl}}{EI_z} ds = 0. \quad [63]$$

Volviendo a la figura 62-a), vemos también que el giro elemental $d\theta$ produce un corrimiento del extremo libre A , y, por tanto, de cualquier punto del plano ligado rígidamente a este extremo. Por ejemplo, el movimiento del punto O según el eje XX , valdrá:

$$dx = y \cdot d\theta. \quad [64]$$

Si estos diagramas de momentos flectores reducidos los imaginamos representados sobre planos normales al plano de la estructura, podremos definir este producto $y \cdot d\theta$ [64] como *momento estático* del área rayada respecto al plano vertical de traza XX . Y la traslación total debida a la barra BC , será el momento

$$y_{BC} \cdot \Theta_{BC}^B$$

siendo y_{BC} la distancia al plano XX del centro de gravedad del área $BB''C''C$ de momentos flectores reducidos.

Si los extremos A y E de la célula están empotrados, o coinciden por tratarse de una célula cerrada, la suma

$$\begin{aligned} \sum_E^A \text{momentos áreas respecto a } XX &= \\ &= \sum_E^A y_{BC} \cdot \Theta_{BC}^B = 0 \end{aligned} \quad [65]$$

ha de ser nula.

Para asegurar la completa inmovilidad relativa del extremo A respecto al E , deberá, además, obtenerse idéntico resultado cuando los momentos se tomen respecto a otro plano cualquiera YY (que puede ser, o no, ortogonal con el anterior XX). Es decir, se ha de verificar asimismo que:

$$\begin{aligned} \sum_E^A \text{momentos áreas respecto a } YY &= \\ &= \sum_E^A x_{BC} \cdot \Theta_{BC}^B = 0. \end{aligned} \quad [66]$$

La comprobación de cualquier malla cerrada, o de cualquier célula empotrada, consistirá, por tanto, en lo siguiente: a), paso del diagrama de momentos flectores a los diagramas de momentos flectores *reducidos* (si las barras son de inercia constante, este paso es inmediato); b), obtención de los valores de las áreas correspondientes a cada barra; c), determinación del c. de g. de cada área y de la posición de la proyección del mismo sobre la barra correspondiente (ver figura 62). Entre estos valores:

Se han de verificar las condiciones:	Cuyas equivalencias en deformaciones son:
1.º La suma de las áreas ha de ser nula [63].	1.º Nulidad del giro relativo entre secciones extremas.
2.º La suma de los momentos estáticos de las áreas respecto a XX ha de ser nula [65].	2.º Nulidad del movimiento relativo según la dirección XX .
3.º La suma de los momentos estáticos de las áreas respecto a YY ha de ser nula [66].	3.º Nulidad del movimiento relativo según la dirección YY .

siendo XX e YY dos rectas *cualesquiera* del plano. Convendrá tomar como rectas XX e YY , aquellas que nos anulen el mayor número de momentos estáticos parciales, es decir, las barras sometidas a cargas directas.

(En la determinación de las áreas de momentos y de los centros de gravedad puede resultar más cómodo sustituir el diagrama de momentos de cada barra por los diagramas parciales del momento isostático y del trapecio de los hiperestáticos, reemplazando, a su vez, este trapecio por los dos triángulos de bases M_A^{fl} y M_B^{fl} . El área de momentos isostáticos y la posición de su centro de gravedad es fácilmente expresable (1) de una vez para todas para los distintos tipos de carga, y de este modo no será menester determinar para llevar a cabo este cálculo comprobatorio, sino el área y centro correspondiente a los citados triángulos de alturas M_A^{fl} y M_B^{fl} .

(1) La adjunta figura 63 representa el caso más sencillo: barra sometida a fuerza aislada.

Al pie de la figura aparece la expresión del área reducida de los momentos flectores isostáticos y la posición de su centro de gravedad.

Muchos otros tipos de carga de empleo frecuente se han recogido en sendos cuadros, en que se anotan estos valores, así como diversos otros que, por lo continuo de su uso, interesa tener a mano. Figurarán como anejo a la publicación, en separata, de este trabajo.

Como aplicación de lo anterior, se recoge en la figura 64 la comprobación elástica del diagrama de momentos flectores correspondiente a una de las sollicitaciones de cierta estructura múltiple (cuyo estudio nos fué propuesto en el número del pasado mes de julio de la REVISTA). Al pie del diagrama se han resumido los valores de las áreas reducidas de los momentos flectores, las coordenadas de sus c. de g. referidos a los ejes BX y BY y los momentos estáticos de dichas áreas respecto a estos ejes.

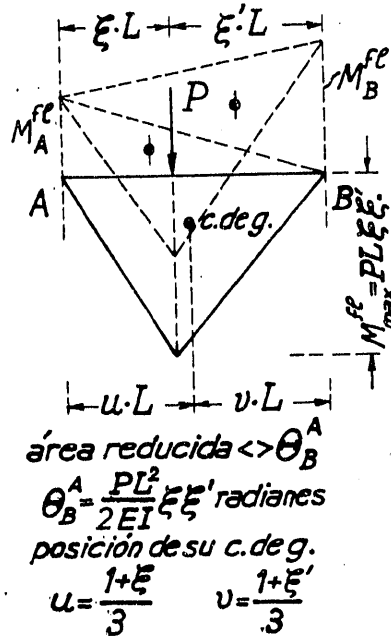
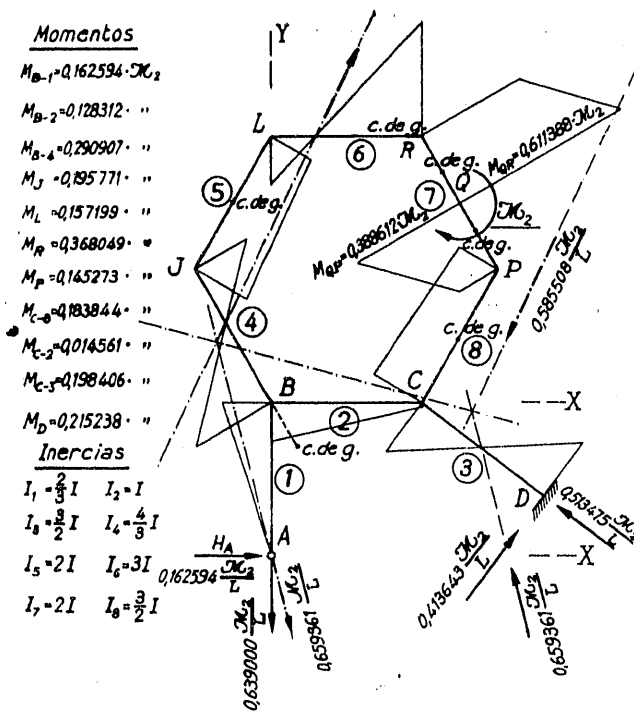


Figura 63.

Para la malla cerrada $BJLRQPCB$, las tres condiciones anteriores quedan satisfechas (incluso con error menor de media unidad de la quinta decimal), lo que comprueba la exactitud de nuestro diagrama de momentos.

* * *

Para la parte inferior de esa estructura, pórtico $ABCD$ con un apoyo articulado, ya no es posible elegir unos ejes cualesquiera, sino que es necesario adoptemos como ejes dos rectas que pasen precisamente por la articulación. La suma de las áreas reducidas tiene un valor diferente de cero (esta suma es precisamente el valor del giro experimentado por la sección A que tiene libertad de giro), en tanto que los momentos estáticos respecto a esas dos rectas (y que nos miden el recorrido del punto A en dichas dos direcciones) ha de seguir resultando nulo. Es lo



Barras	Áreas reducidas	Coordenadas del c.d.g.	Momentos estáticos de las áreas respecto a YY respecto a XX		
CB	$-0.071436 \frac{M_2 L}{EI} (\text{rad})$	$\begin{Bmatrix} 0.367305 \cdot L(m) \\ 0.0 \end{Bmatrix}$	$-0.026238 \frac{M_2 L^2}{EI}$	0.0	"
BJ	$-0.035676 "$	$\begin{Bmatrix} 0.176299 \\ -0.305360 \end{Bmatrix}$	$-0.006290 "$	$+0.010894 "$	"
JL	$+0.088242 "$	$\begin{Bmatrix} -0.259106 \\ 1.283266 \end{Bmatrix}$	$-0.022864 "$	$+0.113238 "$	"
LR	$-0.035141 "$	$\begin{Bmatrix} 0.915186 \\ 1.732051 \end{Bmatrix}$	$-0.032161 "$	$-0.060866 "$	"
RQ	$-0.122429 "$	$\begin{Bmatrix} 1.135352 \\ 1.497614 \end{Bmatrix}$	$-0.139000 "$	$-0.183351 "$	"
QP	$+0.066735 "$	$\begin{Bmatrix} 1.356008 \\ 1.115426 \end{Bmatrix}$	$+0.090493 "$	$+0.074438 "$	"
PC	$+0.109706 "$	$\begin{Bmatrix} 1.240234 \\ 0.416097 \end{Bmatrix}$	$+0.136061 "$	$+0.045648 "$	"
Σ	$0.000001=0$		$-0.000003=0$	0.0	"
AB	$-0.121845 "$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.666667 \end{Bmatrix}$	0	$-0.081297 "$	"
BC	$+0.071436 "$	$\begin{Bmatrix} 0.367305 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$	$+0.026239 "$	$+0.071436 "$	"
CD	$-0.005611 "$	$\begin{Bmatrix} 4.676648 \\ -1.757486 \end{Bmatrix}$	$-0.026241 "$	$+0.009861 "$	"
$\Sigma =$	$-0.056120 "$ (radianes)		$-0.000002=0$	0.0	"

Comprobación de la célula CBJLRPC
Comp. célula ABCD

Fig. 64. — Aplicación a un caso de estructura múltiple traslacional del método comprobatorio de los diagramas de momentos flectores.

que se comprueba al pie de esa misma figura 64.

(Si la malla estuviese biarticulada, como es el caso representado en la figura 65, la única condición que puede establecerse es la de que la distancia mutua entre articulaciones no varíe. Por tanto, deberá adoptarse forzosamente como recta respecto a la cual se tomen momentos de las áreas, la recta AE de unión de ambas articulaciones. La suma de las áreas nos seguirá dando el valor del giro relativo en radianes entre las secciones A y E .)

Observemos que las leyes de momentos hasta aquí comprobadas han sido leyes de momentos flectores debidos a la acción de cargas sobre la estructura (bien se trate de cargas aplicadas en barras o nudos de la célula elegida para la comprobación, o bien que sean cargas aplicadas en barras o nudos del resto de la estructura).

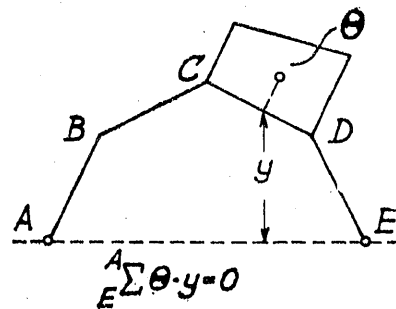


Figura 65.

Y también que los criterios de comprobación que acabamos de ver, no son otra cosa sino la expresión de que:

A) En una célula empotrada o en una malla cerrada, el giro y el movimiento relativos entre sus extremos ha de ser nulo. (Pueden tomarse momentos respecto a dos rectas cualesquiera del plano.)

B) En una célula articulada-empotrada, los movimientos del extremo articulado han de ser nulos. (Pueden tomarse momentos respecto a dos rectas cualesquiera, con tal de que estas rectas pasen por el apoyo articulado.)

C) En una célula biarticulada, la distancia entre articulaciones no varía. (Han de tomarse los momentos estáticos precisamente respecto a la recta que pasa por dichas articulaciones.)

* * *

Pero estos criterios de comprobación han de ser, naturalmente, distintos cuando los momentos flectores sean debidos a una variación de temperatura en la estructura o a un movimiento de los extremos de la célula, pues hemos de expresar en estos casos cuáles son los movimientos que los apoyos impiden desarrollar, o los que obligan a tomar a la estructura, respectivamente.

Si se trata de un aumento de temperatura (ver figura 66), los movimientos que la ley de momentos produzca en la extremidad A , por ejemplo, han de ser precisamente iguales y contrarios a los movimientos que en dicha extremidad ocasionaría una elevación de temperatura cuando, liberada de la coacción

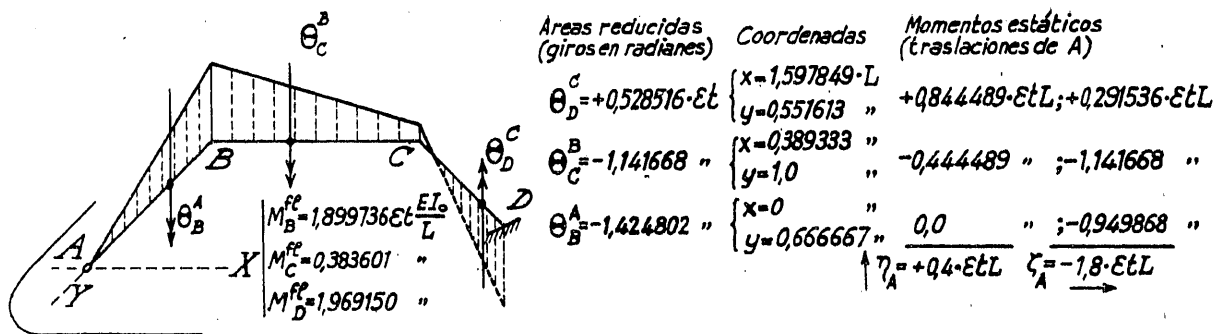


Fig. 66. — Comprobación del diagrama de momentos flectores de la figura 27; los recorridos que provocan en el extremo A son justamente los opuestos a los que produciría el aumento de temperatura en la estructura isostática.

que supone dicho apoyo, hubiera podido dilatarse libremente la célula. Pues es justamente la coacción del apoyo la que, deformando elásticamente la estructura, anula dichos recorridos.

la curva de presiones, con lo que la comprobación mediante las condiciones de la estática ha quedado ya realizada gráficamente. (Sin embargo, esta comprobación, aunque necesaria, no es suficiente, y al

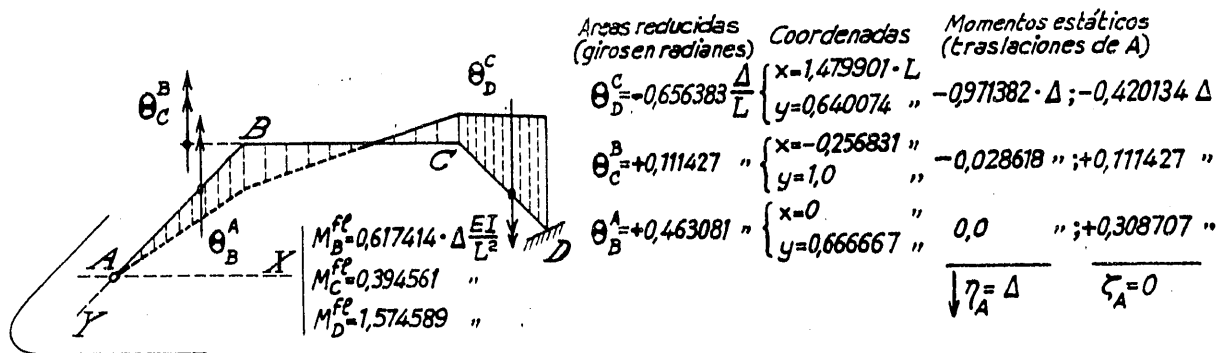


Fig. 67. — Comprobación del diagrama de la figura 33; el recorrido que provocan en el extremo A es igual al descenso Δ experimentado por su apoyo.

Y si se trata de la ley de momentos flectores debidos, por ejemplo, a un descenso del apoyo (fig. 67), el recorrido obtenido partiendo de dicha ley ha de ser precisamente igual al movimiento del apoyo, ya que dicha ley de momentos no es sino el traslado a cada punto de la pieza de las acciones que el apoyo ejerce sobre la estructura y que, deformándola elásticamente, la obligan a que su extremidad acompañe el descenso del apoyo.

Las comprobaciones de estos casos de sollicitación, en los que las leyes de momentos son lineales, cuando además las estructuras están constituidas por barras rectas de inercia constante son especialmente cómodas, pues las áreas de carga pueden incluso descomponerse en triángulos y es inmediata la obtención de los puntos en los que dichas áreas deben de ser aplicadas. En la figura 68 recogemos la ley de momentos que una elevación de temperatura produce en la compleja estructura de la figura 65. Se han anotado también en ella los valores de las reacciones y de las resultantes que con ellas constituyen

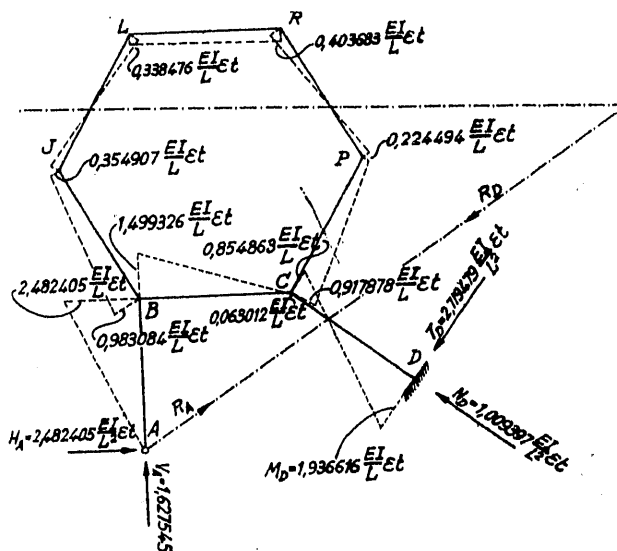


Fig. 68. — Diagrama de los momentos flectores, curva de presiones y reacciones producidas por un aumento de temperatura.

cuidado del lector dejamos como ejercicio el hacer la comprobación elástica.)

* * *

Este método comprobatorio es una mera aplicación de los conceptos de la Estática Gráfica. No es, como hemos visto, sino la interpretación geométrica del primer sumando de las expresiones de Bresse del giro y recorrido de un punto, A , de una pieza respecto a otro punto, B :

$$\theta = \int_E^A \frac{M^{fl} ds}{EI}; \quad [31']$$

$$\delta = \int_E^A \frac{M^{fl} \cdot x \cdot ds}{EI}; \quad [67']$$

y tan antiguo, por tanto, como la propia Graphischen Statik.

Sin embargo, como en otro lugar hemos indicado (1), este método comprobatorio aparece con frecuencia designado con la denominación de "la méthode du moment statique fictif" y atribuida a J. Rieger su formulación: Y es que el favor que un prólogo de buena firma dispensa a una obra, puede tener un alcance insospechado. Lo ha tenido en este caso el prólogo de A. Mesnager al primero de los tomos de la obra de Rieger, y particularmente su frase: "M. Rieger (2), professeur à l'Ecole Polytechnique de Brno (Tchécoslovaquie) a eu l'ingénieuse idée d'interpréter géométriquement les équations fournies par l'application du théorème de Castigliano", es la que ha ido pasando de texto en texto como juicio de cada autor sobre ese *teorema* de Rieger.

Que efectivamente Rieger establece su trabajo por identificación de las expresiones de giro y deformación de la sección extrema obtenidas por el teorema Castigliano, con las de suma y momentos estáticos de las *áreas reducidas*, es incuestionable. Es más, a esto se debe precisamente la premiosidad de su trabajo y la falta de generalidad de sus conclusiones. Lo que resulta sorprendente es que Mesnager lo presente como "une nouvelle méthode", y que como nuevo lo recojan también otros autores.

De todos modos, lo que no podían lograr estos benévolo juicios, ni esta presentación como novedad, era el conseguir que pudiese prosperar como método general de análisis y cálculo de estructuras este método, destinado, por su naturaleza, a ser un método comprobatorio: utilizado como lo hace Rieger, no es sino una equivalencia, poco cómoda, de los métodos generales de obtención de las reacciones (Culmann, Bresse, Castigliano) y, al igual que éstos, sólo

en las estructuras con pequeño número de hiperes-táticas puede, por tanto, resultar adecuado como herramienta de análisis.

VII

Los métodos clásicos y otros "métodos".

No es éste un caso aislado de *redescubrimiento* de resultados ya logrados. Desgraciadamente, no solamente es un caso repetido sino, incluso, frecuente esta aparición de variantes, que nada realmente positivo añaden a la común herencia y tan sólo aumentan la aparente diversidad de los métodos de la elasticidad.

Insistir en que todos parten de la misma expresión de Bernouilli-Navier del giro de una rebanada elemental:

$$d\theta = \frac{M \cdot ds}{EI}, \quad [31]$$

y de que este giro produce, en un punto rigidamente ligado a la rebanada, la traslación:

$$d\delta = x \cdot d\theta = \frac{M \cdot x \cdot ds}{EI} \quad [67]$$

(siendo x la distancia del punto de giro a la recta YY según la cual se mide), ciertamente que lo encontrará superfluo el lector experimentado.

Me parece que, en cambio, al principiante le resultaría más fácil su trabajo si desde un principio se le advirtiese con toda claridad este común y tan antiguo origen. Un modo de presentarle los diversos métodos que habrá de utilizar para resolver los problemas elásticos, pudiera ser la enumeración siguiente:

A) Si nos abstenemos de dar significación particular alguna a ninguno de los términos de estas expresiones [31] y [67] y procedemos a la suma de estos giros y traslaciones elementales, quedan exactamente reproducidas las expresiones de Bresse (1854), comienzo de un camino que pudiéramos llamar puramente analítico. (Los restantes términos de las fórmulas de Bresse son los que dan las deformaciones debidas a los esfuerzos normales y a los esfuerzos tangenciales.)

B) Si dicha expresión del giro se la escribe en la forma:

$$d\theta = M^{fl} \cdot \frac{ds}{EI}, \quad [31-B]$$

y a su segundo factor se le denomina:

$$\Delta g = \frac{ds}{EI} \equiv \text{peso elástico} \equiv \text{flexibilité} \\ (kg^{-1} \cdot m^{-1})$$

estamos en la Estática Gráfica de 1875.

(1) REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, julio de 1953.

(2) J. Rieger: *Calcul des Constructions hyperstatiques*, avec préface de A. Mesnager. Tomo I (1926). Los tomos siguientes son de 1931, el II, y de 1936, el III. (Dunod.)

Cuando una ménsula está sometida a un par $\mathcal{M}$, el momento flector en cada punto es constantemente $M^f = \mathcal{M}$, y si está sometida a una fuerza F , el momento flector en cada punto es $M^f = F \cdot d$, siendo d su distancia a la recta de acción de la fuerza. Si sustituimos estas formas de expresión de los momentos flectores en las consabidas [31] y [67], tendremos en uno y otro caso:

$$\begin{aligned} \text{Par} \quad & \left\{ \begin{aligned} \Delta \theta &= \mathcal{M} \cdot \frac{\Delta s}{EI} = \mathcal{M} \cdot \Delta g; \\ \Delta \delta &= \mathcal{M} \cdot x \cdot \Delta g. \end{aligned} \right. \\ \text{Fuerza} \quad & \left\{ \begin{aligned} \Delta \theta &= F \cdot d \cdot \Delta g; \\ \Delta \delta &= F \cdot d \cdot x \cdot \Delta g; \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

que aplicadas al conjunto de las diversas rebanadas elementales, quedan expresadas por los enunciados de Culmann:

1.º El giro debido a un par es $\mathcal{M}$ veces la suma de los pesos elásticos, y la traslación, $\mathcal{M}$ veces la suma de los momentos estáticos de los pesos respecto a la recta según la cual medimos la traslación.

Y para el segundo caso:

2.º El giro debido a una fuerza es F veces la suma de los momentos estáticos de los pesos elásticos respecto a la línea de acción de la fuerza, y la traslación, F veces la suma de los momentos centrífugos de los pesos respecto a la línea de acción y a la recta según la cual medimos la traslación.

El estudio de las deformaciones elásticas pasa con esto a ser un estudio geométrico de esos "pesos elásticos" atribuidos a cada rebanada: las propiedades generales que ligán los momentos estáticos y los centrífugos y de inercia de un sistema de masas cualesquiera simplifican y facilitan tales estudios. Aparecen con ello los conceptos de centro y elipse elásticas y los de antipolo y antipolar. Pero también la posibilidad de que el estudio sea riguroso y queden simultáneamente tomadas también en consideración las deformaciones por esfuerzos normales y tangenciales.

C) Este mismo modo de considerar la expresión [31-B] puede hacerse prescindiendo más o menos de toda representación o esquema geométrico; así, por ejemplo, se pasa gradualmente de la estática de Maurice Lévy a la exposición de Pigeaud y sucesores. M. Lévy (1874), al igual que Müller-Breslau (1886), opera con "poids fictifs", sin utilizar las propiedades proyectivas de la elipse elástica, pero sí las de su centro y ejes principales a los que trasladan las reacciones hiperestáticas para obtener la previa separación de las incógnitas.

Más lejana de toda representación geométrica es la exposición de Pigeaud, en la que las integraciones, interpretables como polígonos funiculares de los pesos

ficticios, pasan a denominarse "integrales características", y de un modo exclusivamente analítico son estudiadas sus relaciones y propiedades.

D) Otro modo de escribir la expresión del giro elemental de la rebanada, es el ya indicado:

$$d\theta = \frac{M^f}{EI} \cdot ds, \quad [31-D]$$

en el que el primer factor es el momento flector reducido, es decir, la ordenada del área elemental de las figuras 17 y 62.

Es ésta la concepción más usada; es en la que basó Mohr su teoría de la viga equivalente (1868): el ángulo que forman dos tangentes a la elástica, o lo que es lo mismo, el ángulo relativo que toman dos secciones de la pieza, está expresado por el área de momentos reducidos comprendida entre dichas dos secciones.

Y al considerar la posición del centro de gravedad del área total y las distancias de este centro a los extremos, las expresiones de las reacciones que, en los apoyos de la viga equivalente, produce esta *área de carga* son también las de los giros experimentados por las secciones extremas. Transformaciones elementales conducen a las "líneas en cruz", a los "términos de carga", etc., etc.

Es posiblemente esta forma la que más fácil acceso proporciona a los métodos de "deformaciones", bien sea partiendo de la pieza cargada sustentada isostáticamente (y definida la carga por los giros de los extremos), o bien de la pieza cargada considerada como perfectamente empotrada (y definida la carga por los momentos de empotramiento perfecto, que son los momentos capaces de anular totalmente esos giros de la pieza isostática).

(Escrita de este modo dicha expresión [31], pudiéramos haberla adoptado, como hizo W. Ritter, como punto de partida en nuestra recapitulación del método generalizado de los puntos fijos; pero tiene el inconveniente de principio de operar simultáneamente con elementos propios de la estructura y con elementos dependientes de las cargas solicitantes, inconveniente que, aunque suprimible por consideraciones geométricas sencillas, convenía evitar.)

* * *

Todos estos distintos métodos (en realidad, como vemos, todos estos distintos *modos operatorios* de la Elasticidad) tienen sus peculiares virtudes y perduran a través de los años.

Pero otras variantes aparecen, cuya formulación sólo se explica por prurito de novador o, más probablemente, por el desconocimiento que sus autores tienen de la labor ya existente.

Tal es, por ejemplo, *The column analogy*, propuesta por Hardy Cross (1), que puede resumirse así: Escrita la expresión [31] en la forma

$$d\theta = M^f \cdot ds \cdot \frac{1}{EI}, \quad [31-E]$$

y trazando en cada punto de la fibra media de la pieza, y normalmente a la misma, un segmento que represente el valor de $\frac{1}{EI}$ en dicho punto, se obtiene una figura plana, base de la columna o zapata equivalente, en la que cada elemento de fibra de longitud ds nos define en ella un área elemental de valor

$$ds \cdot \frac{1}{EI} \quad (kg^{-1} \cdot m^{-1})$$

(que es sencillamente lo que medio siglo antes se venía ya denominando peso elástico). Y así, en vez de decir: peso elástico, centro elástico, momentos de inercia de los pesos, elipse elástica, antipolo y antipolar, se dice: área elemental, *centroid*, momentos de inercia de las áreas, elipse de inercia, punto de aplicación y fibra neutra.

Si a esas áreas de la zapata equivalente se las considera sometidas a unas presiones unitarias cuyo valor sea el del M^f en cada punto, entonces cada volumen nos representa el producto:

$$M^f \cdot ds \cdot \frac{1}{EI} = d\theta, \quad [31]$$

y su c. de g. y su volumen total nos dan el punto de aplicación y el valor del giro total (ver figura 69).

Tanto da, como vemos, este símil geométrico como el de las áreas reducidas de Mohr, o las operaciones gráficas de pesos elásticos de Culmann, o, por ejemplo, las operaciones numéricas equivalentes de Müller-Breslau y sucesores.

Pese a que, antes de que esta *column analogy* tomase difusión entre nosotros, voces tan autorizadas como la de Fernández Casado habían puesto bien patente la total ausencia de novedad de este pretendido nuevo método, no ha dejado de presentarse el daño que estas novedades suelen producir: desorientación y desvío del principiante (2) respecto a trabajos que el uso ha ido depurando.

Se aduce, a título de ventaja, que esta intuición geométrica presenta más claridad que las anteriores, y así será entre aquellos que lo afirman; pero el es-

(1) *The column analogy*. Analysis of elastic arches and frames by the general formula for flexure. Octubre 1930. Bulletin núm. 215. University of Illinois.

(2) Sobre este método de la *columna equivalente* se ha llegado a dar juicio tan categórico como el siguiente: "Su fundamento y sus numerosas aplicaciones imponen a los profesionales la obligación moral de enterarse, primero, de su sencillez y de su exactitud, y después, de aprender a practicarlos con soltura y con seguridad".

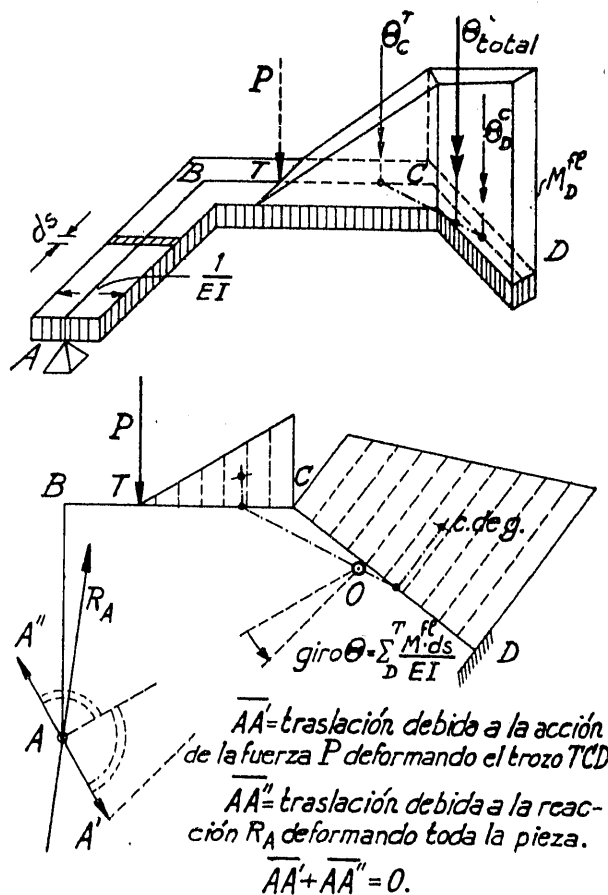


Fig. 69. — En la parte superior la "column analogy" de 1930. En la inferior, idéntica resolución por BRESSE (1854), CULMANN (1875), etc., etc.

tudioso de este lado del Océano con una mejor preparación matemática no necesita "ver en perspectiva" para componer con seguridad unas rotaciones instantáneas y poder hacer esta operación por muy varios métodos, en vez de tener que hacerlo forzosamente mediante cálculos numéricos y prescindiendo, además, de las deformaciones por esfuerzo normal y tangencial.

* * *

Por si alcanzamos mejor suerte, quisiéramos prevenir aquí a los lectores de otra novedad que del Lejano Oeste nos llega: "The Analysis of Continuous Structures by Traversing their Elastic Curves", debido a Ralph W. Stewart, ingeniero-jefe de la ciudad de Los Angeles, publicado en 1948. Parece aún más necesario el hacerlo, pues acaba de ser editado en lengua alemana (1), en traducción que prologa y firma el Prof. Dr. Ing. Adolf Kleinlogel, que lo presenta como "völlig neuartigen, interessanten Verfahren".

(1) *Die Traversen-Methode*. Stewart/Kleinlogel. Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, 1952.

Y en la Introducción extrema aún más estos conceptos, afirmando que "Die Traversen-Methode lässt sich mit keinem der bisher bekannten Berechnungsverfahren unmittelbar vergleichen"... "Bei der Traversen-Methode handelt es sich um die gleichzeitige Verfolgung der Momentenfortpflanzung und der Drehwinkelfortpflanzung".

En este caso, lo que sorprende no es la formulación como novedad por parte del Sr. Stewart, sino que pueda olvidar A. Kleinlogel hasta tal punto sus años de auxiliar del Prof. Mörsch, y entre ellos los de la permanencia de ambos en el Politécnico de Zürich.

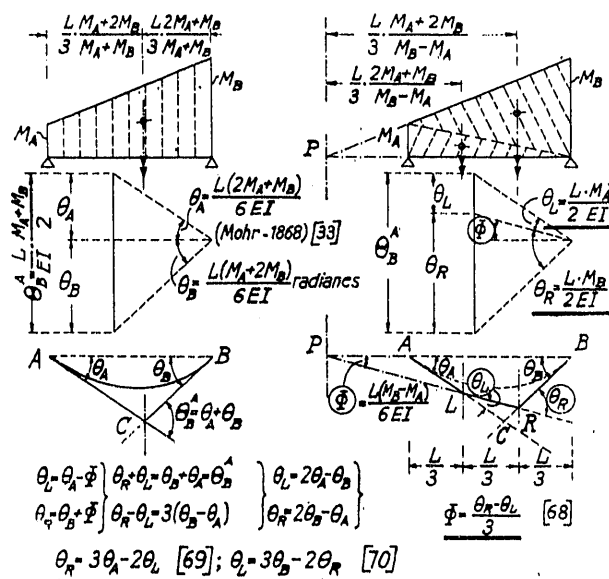


Fig. 70. — Las fórmulas del "Völlig neuartiges Traversen-Methode" del año 1948.

La figura 70, en su mitad derecha recoge, y con mayor generalidad que el Stewart-Kleinlogel, las relaciones de que parte este método de la *travesía*, y en la mitad izquierda, se recuerdan las expresiones de Mohr del giro de los extremos [33]. Cargada la viga equivalente con el peso total del trapecio de momentos reducidos:

$$\Theta_B = \frac{L}{2EI} \cdot (M_A + M_B) \text{ radianes,}$$

el polígono de fuerzas de la izquierda nos define las dos tangentes AC y CB a la elástica. Si en vez de este peso total la cargamos con los dos pesos parciales:

$$\theta_L = \frac{L}{2EI} \cdot M_A; \quad \theta_R = \frac{L}{2EI} \cdot M_B,$$

aplicados en los dos c. de g. de los triángulos de momentos reducidos, el polígono de fuerzas de la derecha y el funicular ALRB nos definen igualmente las dos tangentes AL y RB a la elástica.

El lado intermedio LR, que no es tangente a la elástica, tiene la propiedad (proyectiva) de pasar por el punto P de momento nulo; y partiendo además, como hacemos en dicha figura, del ángulo

$$\Phi = \frac{\theta_R - \theta_L}{3}, \quad [68]$$

que forma con la posición inicial de la barra este lado intermedio, resulta más inmediata la deducción de las relaciones entre los giros θ_A y θ_B de los extremos, y estos giros θ_L y θ_R con que opera el Traversen-Methode, expresiones que están recogidas al pie de la citada figura.

Se trata con estas fórmulas de hacer la travesía de uno a otro extremo de la estructura, caminando por una poligonal que resulta tangente a las elásticas en los nudos y cuyos vértices L y R están situados en las líneas al tercio. Así, por ejemplo, para el recorrido de A a B, parte Stewart del momento M_A y de un valor supuesto para θ_A . Conocer M_A es tanto como conocer el ángulo

$$\theta_L = \frac{L}{2EI} \cdot M_A,$$

de los primeros lados AL y LR de ese recorrido poligonal. La expresión [69] nos da el valor del siguiente rumbo θ_R :

$$\theta_R = 3\theta_A - 2\theta_L, \quad [69]$$

que es tanto como darnos cuál debe de ser el valor del momento flector que aparecerá en la extremidad B:

$$M_B = \frac{2EI}{L} \theta_R,$$

y el ángulo:

$$\theta_B = 2\theta_A - \theta_L,$$

o bien:

$$\theta_B = \frac{1}{2} (\theta_A + \theta_R),$$

y con ello iniciar la travesía de la siguiente barra, etcétera, etc.

Ya se ve que, salvo la terminología, en nada difiere este proceso del de la determinación de las rigideces seguido por el método de los puntos fijos, y casi ni en la terminología del también usado desde antiguo de propagación del giro unidad. (En cuanto a la materialidad del paso de un giro θ_A al del giro θ_B , entiendo es más práctico y rápido el empleo de las expresiones [15] a [17], o lectura en el Abaco II, que dimos inicialmente. Todos ellos no son sino diversos modos de operar con el sistema [33] de Mohr: conocidos dos de los cuatro elementos que dicho sistema liga, quedan conocidos los dos restantes.)

Esta *travesía* es menester, al igual que en los puntos fijos, repetirla en sentido inverso, y así, en el recorrido de B a A , partiendo de los valores conocidos o supuestos de θ_B y M_B , la expresión [70] dará el de θ_L y M_A .

El empleo del artificio de desdoblamiento del diagrama trapecial de momentos en dos triangulares no puede ser más antiguo: reproducimos en la figura 71 uno de los grabados de la monografía de W. Ritter: *La línea elástica y su aplicación a la viga continua*, del año 1871, y en la figura b) se aprecia cómo está sustituida la elástica por la misma poligonal del moderno *Traversen-Methode*. Casi idénticas son las figuras que años después emplearía E. Mörsch en su exposición de la que (y más especialmente del *leit motiv* de la figura 72-b)), derivaría precisamente el inicial enfoque dado por A. Kleinlogel a su extenso y meritorio trabajo de tabulación de estructuras (1).

* * *

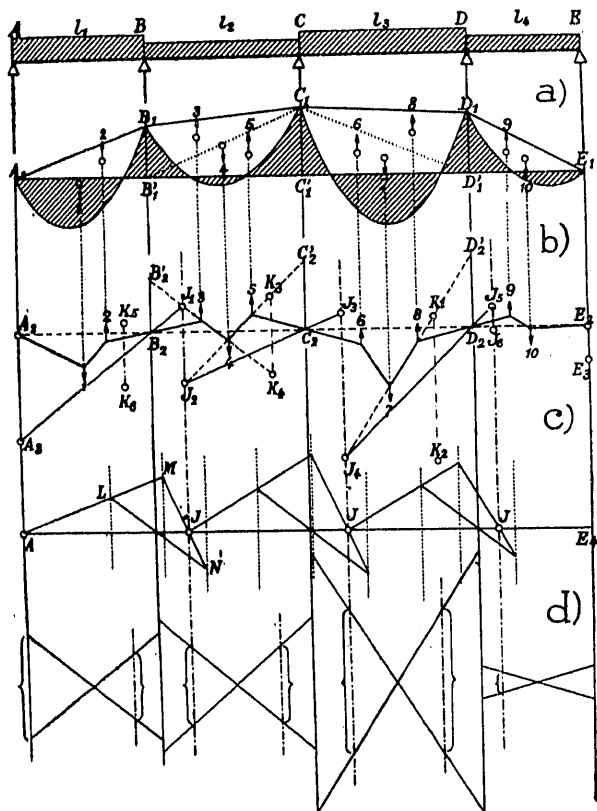


Fig. 71. — De la monografía de W. RITTER: *Die elastische Linie*, u. s. w. Zürich 1871.

(1) Es asimismo de extrañar que una revista tan ponderada como *Concrete & Constructional Engineering*, diese en su número de junio de 1953 una extensa nota sobre este *Traversen-Methode*, redactada por el propio Mr. Ralph W. Stewart, sin agregar comentario alguno de orientación a sus lectores.

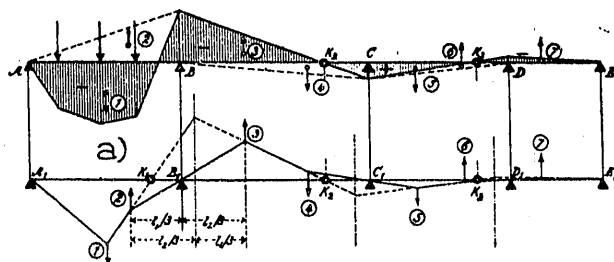


Abb 12.

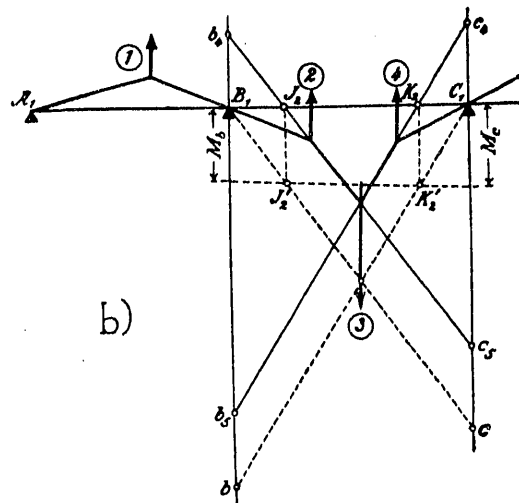


Abb. 14.

Fig. 72. — De las obras de E. MÖRSCH. (Las rectas B_1c y C_1b son las *líneas en cruz*; los segmentos B_1b y C_1c , *kreuzlinienabschnitt* en la terminología de RITTER, son los "términos de carga" $\mathcal{R}$ y $\mathcal{L}$, de KLEINLOGEL.)

La anterior enumeración de las distintas formas de operar con la ecuación fundamental de Bernoulli, haciendo así más patente el común origen de los métodos, de ningún modo ha aspirado a resultar exhaustiva.

En buena parte, porque ello resultaría interminable ante la reiterada y constante publicación de trabajos que, omitiendo deliberadamente, o desconociendo realmente las fuentes, aparecen reclamando nombre y personalidad propias.

En este examen de métodos que estudiados más detenidamente, se identifican con otros de antiguo conocidos e incluso caídos en desuso, han sido los más de ellos métodos propuestos en el Nuevo Continente. Ni en esto ha habido por nuestra parte premeditación ni puede resultar extraño que una menor tradición, unida a muchas mayores dificultades de bibliografía e información (1), origine este mal empleo de esfuerzo y de capacidad creadora en alcanzar

(1) El lector europeo de la *Column Analogy* queda, por ejemplo, sorprendido al ver cómo H. Cross atribuye a H. M. Westergaard, 1921, las "conjugate beam" ideadas medio siglo antes por Otto Mohr. Y así se explica que Cross pueda apuntarse la extensión de estos conceptos a las barras curvas.

resultados ya antes logrados en esta parte del viejo mundo.

Más sensible resulta el que al ser aquí conocidos sean acogidos como últimas novedades henchidas de maravillosas virtudes, con menosprecio de una labor de casi tres siglos y, lo que es peor, haciendo caer en injusto olvido la aportación y el nombre de tantos precursores.

Pero lo que merece indudable censura es el silenciar deliberadamente los orígenes. Reiteradas veces hemos mencionado el "Widerstand-Rechnung" (que es actualmente muy usado por los calculistas germanos) como una forma incompleta, aunque acertada, de aplicar el método de los puntos fijos. Ha sido éste un caso muy típico, pues, aparte de su presentación nada menos que como "Neue Statik" (1), su autor silenció y da como inexistente el método de los puntos fijos. Imposible de desconocer por quien en otro trabajo (2) se ufana de: "Nicht jeder hat das Glück, als Anfänger bei einem Meister wie Emil Mörsch zu lernen"! Y merecida la dura nota bibliográfica que en *Der Bauingenieur* de mayo de 1938 le dedica Pohl, cuyo párrafo final es, desgraciadamente, aplicable a bastantes autores: "Es de lamentar que por esta tendencia de arremeter contra todos los *anticuados* métodos, con lo que se fuerzan muchas puertas abiertas y resultados evidentes se anuncian como nuevos conceptos, el trabajo que casi tiene cierto mérito se lea con disgusto".

Mejor diríamos que con dolor, pues es convertir en trabajo de Sísifo lo que debiera ser metódica construcción.

* * *

Hemos tratado, como advertimos en las primeras líneas, de poner de manifiesto las ventajas de una

(1) Max Mayer: *Neue Statik der Tragwerke aus biegesteifen Stäben*, 1938.

(2) Max Mayer: *Die Statistische Berechnung*. (Band I. Lebendige Baustatik.) 1953.

vuelta a los más clásicos métodos directos de la Elasticidad.

Ingenuo sería soñar siquiera el poder lograrlo; pero convencidos como estamos de su conveniencia y necesidad, no sólo pereza, sino grave falta de ánimo sería el no intentarlo.

Los nombres y fechas aquí citados con enojosa reiteración, quizás consigan se vea la Elasticidad como lo que es: fruto de un trabajo de generaciones y no una reciente serie de ideas felices rápidamente superadas por noveles autores. Poco es esto, sin embargo, como poco también ha sido el fruto de las contadas obras de historia de los conocimientos elásticos (1).

Sería menester que la Mecánica Elástica encontrase quien pudiera tratarla con la altura con la que Ernst Mach, en su *Desarrollo histórico-crítico de la Mecánica*, plasmó los conocimientos de la mecánica racional. Y en la que quedaran también recogidos los tanteos, las dudas y el proceso mental con que se han ido forjando los distintos eslabones. Ningún modo de exposición resultaría más claro que éste y, al igual que en la obra de Mach, podrían asimilarse los sucesivos conceptos con toda la evidencia y vitalidad con que surgieron en la mente de sus creadores.

Y esta puesta a punto y ordenación de los conocimientos, aparte de evitar repeticiones y *novedades* estériles, es la que podría dar una clara visión del conjunto de la Elasticidad Lineal (superposición y proporcionalidad directa), que, convirtiéndola así en clásica, como lo fué la mecánica racional, dé pronto y franco paso a teorías elásticas más ajustadas a la compleja realidad del mundo físico.

(1) Hans Straub: *Die Geschichte der Bauingenieurkunst*. Basilea, 1949. Y su traducción al inglés: *A History of civil engineering*. Londres, 1952.

S. Timoshenko: *History of Strength of materials, with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York, 1953.