

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,
Ingeniero de Caminos.

Completa el estudio de las estructuras múltiples, desarrollando un ejemplo del que toma pie el autor para hacer unas observaciones sobre el cálculo de edificaciones, que se leerán con interés. Un resumen de lo publicado le sirve para llamar de nuevo la atención sobre permanente utilidad de los métodos clásicos.

En estructuras múltiples de tipo industrial, la variación de luz e inercia entre piezas inmediatas puede ser muy grande, y en estos casos ha de procederse en la forma general que a continuación se indica.

Representa la figura 53 una estructura de cuatro plantas, cuyo estudio interesa exponer con algún detalle (1), y por ello se representan en la figura 54 las etapas mediante las cuales llegamos al conocimiento de la rigidez de los diversos nudos y de

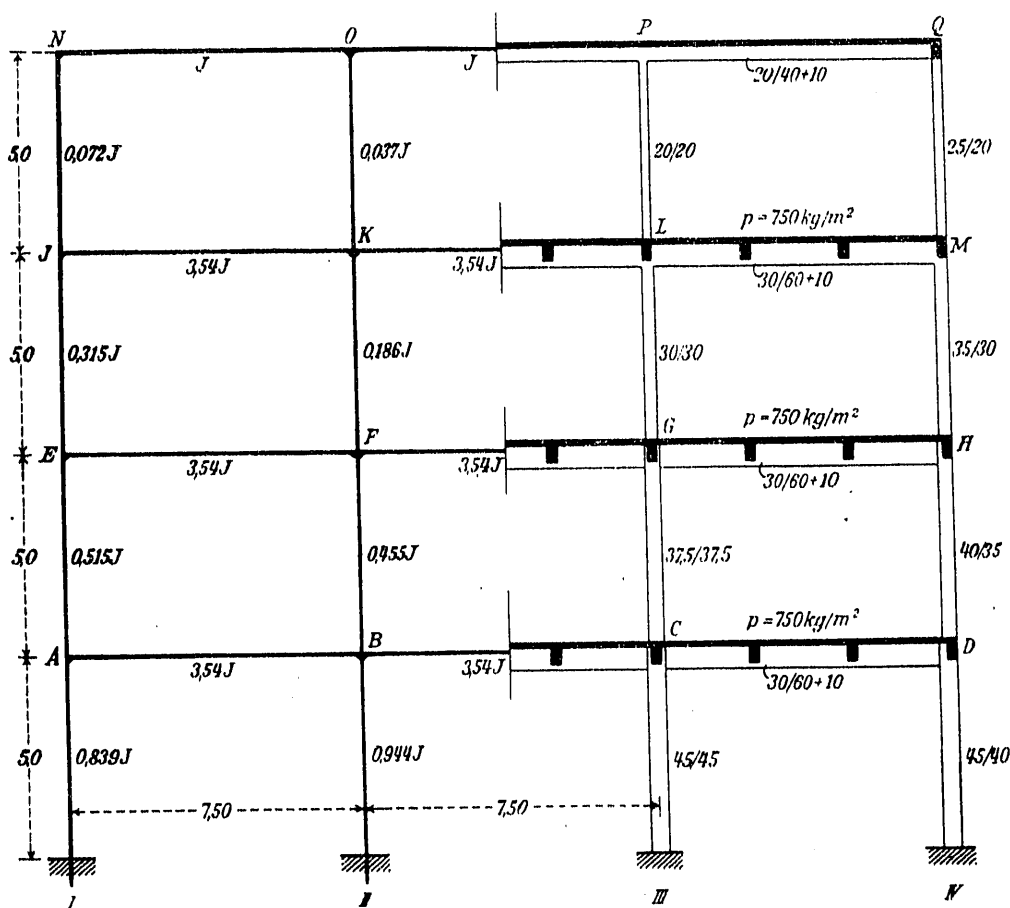


Abb. 13. Beispiel eines Stockwerkrahmens mit 5 m Binderabstand

Figura 53.

(1) Tomada de la 5.ª edición del *Die Bemessung in Eisenbetonbau*, de Mörsch, que la utiliza como ejemplo en el que apoya su impugnación a las fórmulas que da la Instrucción alemana para las flexiones en las columnas exteriores (fórmulas que han venido tomando muchas otras Instrucciones, y entre ellas las "Normas para el cálculo y ejecución de las

obras de hormigón armado", de la Dirección General de Arquitectura).

Como quiera que Mörsch presenta tan sólo los valores finales de los momentos flectores, obtenidos por el método de Cross, interesaba presentar un estudio más detallado y fácil de comprobar por el lector.

y como abscisa del foco izquierdo:

$$\alpha_{AB} = 0,176675. \quad (b)$$

La rigidez del empotramiento de la siguiente viga, BC , tiene el valor:

$$k_{B(IIAF...)} = (0,7552 + 1,586188 + 0,355279) EI = 2,696667 EI,$$

del que resultan:

$$k_{C(BCD)}^{II} = 1,693627 EI; \quad (b)$$

$$\alpha_{BC} = 0,246902. \quad (b)$$

Y, finalmente, para la viga extrema CD , tendremos:

$$k_{C(III B G...)} = 2,804106 EI; \quad (b)$$

$$k_{CD} = 1,693078 EI; \quad (b)$$

$$\alpha_{CD} = 0,249379. \quad (b)$$

A medida que se van obteniendo las rigideces de estos extremos de las vigas, pueden irse también determinando las de los extremos opuestos de las columnas que en dichos extremos insertan. Por ejemplo (fig. 54 bis), la rigidez al giro del extremo inferior de la columna DIV , puede calcularse una vez conocida la rigidez de su empotramiento D , suma de las dos rigideces:

$$k_{DC} = 1,693078 EI \text{ y } k_{DH} = 0,393424 EI.$$

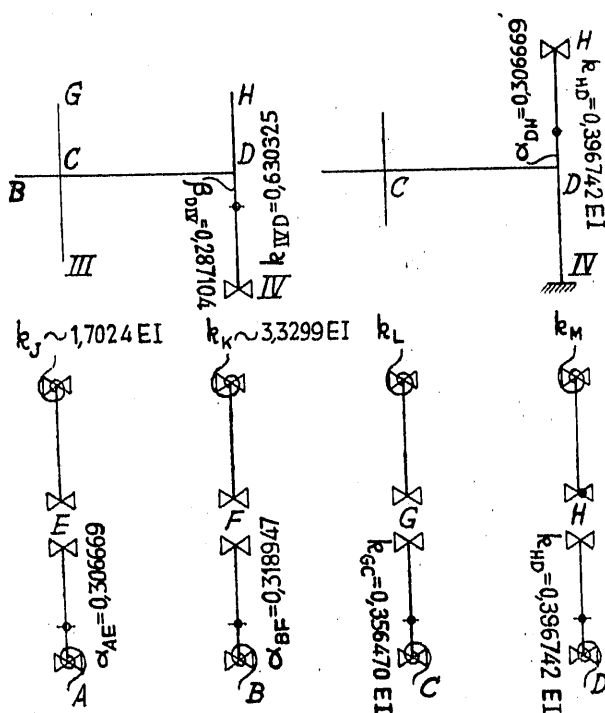


Figura 54 bis.

El valor de dicha rigidez resulta ser:

$$k_{IVD} = 0,630325 EI, \quad (c)$$

y como distancia focal:

$$f_{IVD} = 0,287104. \quad (c)$$

Y de modo análogo, al considerar que el empotramiento en D de la columna HD tiene como rigidez $k_{D IV} + k_{DC} = 2,369278 EI$, se obtiene la rigidez k_{HD} de su extremo superior:

$$k_{HD} = 0,396742 EI, \quad (c)$$

cuyo valor, así como las correspondientes a las restantes cabezas de los pilares de la segunda planta, se recogen en dicha figura 54 bis.

Al acometer el estudio de las vigas de segunda planta, viga $EFGH$, nos resultan conocidos todos los elementos situados por bajo de la misma, pero desconocidos los valores de los empotramientos de las cabezas J, K, L y M de los pilares del tercer piso. Como anteriormente, les atribuiremos como valor de su rigidez la correspondiente a un semiempotramiento de las barras que insertan en dichas cabezas.

Así, a la rigidez del empotramiento J se le atribuirá el valor:

$$k_{J(IN...JK...)} = 3,5 (0,0144 + 0,4720) EI = 1,7024 EI,$$

y a la del empotramiento del pilar FK , el valor:

$$k_{K(KJ, KO, KL)} = 3,5 (0,4720 + 0,0074 + 0,4720) EI = 3,3299 EI,$$

como se indica en dicha figura 54 bis, y con ello puede continuarse el proceso del cálculo.

Los valores exactos, correspondientes a todos los elementos de la estructura, los encontrará el lector con seis cifras decimales, en la figura 55.

El darlos con este número de decimales no es por un afán de virtuosismo, sino para hacer más patente la rápida convergencia del método. Hemos tenido que partir (fig. 54-b)), de unas rigideces *estimadas* de los empotramientos de las cabezas de los pilares del segundo piso. Difieren estos valores de los reales en centésimas. Los valores deducidos directamente de ellos y señalados con la letra (a), difieren ya sólo en diezmilésimas. Los obtenidos en el siguiente paso (valores (b)), en solamente cienmilésimas, y los obtenidos en el tercero (valores (c)), coinciden con los exactos hasta la millonésima. Es decir, al comenzar la nueva etapa de la figura 52 bis, partimos ya de unos valores exactos de la rigidez de las cabezas de los pilares del segundo piso.

Ya se ve que basta, en la práctica, con que este proceso de cálculo se dé por ultimado en cuanto se llegue a la última planta, corrigiendo los valores inicialmente supuestos, partiendo para esto de los que se han ido deduciendo. El dar un nuevo recorrido desde terraza a cimientos, como se ha hecho en este

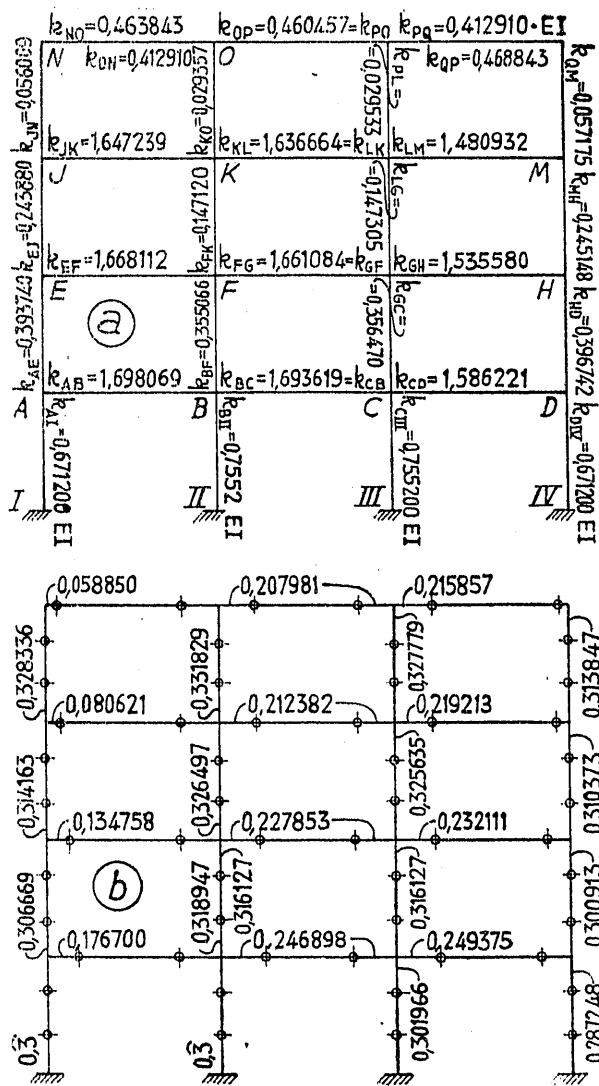


Fig. 55. — Valores exactos de las rigideces, a), y de las abscisas unitarias de los puntos fijos, b), de la estructura de la figura 53.

ejemplo, no ha tenido más resultado que el de ir confirmando todas las cifras hasta su última decimal.

(La rapidez de convergencia que dan las fórmulas de recurrencia no tiene por qué extrañar. Piénsese cuán rápidos serían los ciclos del "Cross" si en vez de partir de unas rigideces correspondientes a un caso extremo, y, por tanto, de unos coeficientes de repartición no aproximados, y de emplear siempre un factor de transmisión de valor 1/2, se adoptasen unos valores de distribución y de transmisión acertados.)

Acabamos de ver cómo opera el método en el caso de estructuras reticulares múltiples. El conocimiento de todos los valores de las rigideces es tanto como conocer los valores reales de distribución en todos los nudos y direcciones, y el de la posición de

los puntos fijos hace inmediato, a su vez, el conocimiento de los efectos de una carga sobre una barra cualquiera, y cómodo, como vimos, el estudio de los movimientos de apoyos, temperatura y traslación de nudos. En una estructura compleja, cuyo conocimiento a fondo se desee tener, éste es el método que más directamente, y utilizando el ábaco XII con menos trabajo, nos conduce a ese conocimiento exhaustivo de sus condiciones intrínsecas.

La estructura tomada para el ejemplo no es, ciertamente, de las que requieren grandes estudios. Pero servirá este ejemplo para contrastar la poca precisión con que suelen dimensionarse y comprobarse algunos elementos de las estructuras corrientes de edificación. Como es admitido, e incluso recomendado, por las Normas antes citadas, el dimensionamiento y armado

Momento en el extremo de la viga :

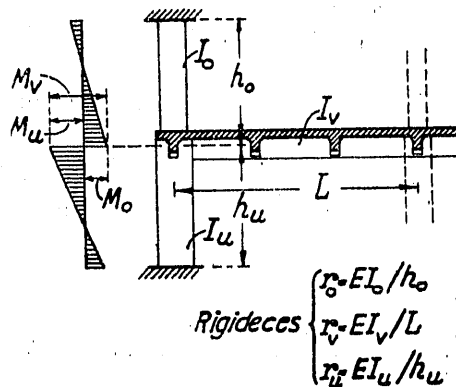
$$M_v = \bar{M} \left(1 - \frac{r_v}{r_o + r_v + r_u} \right) = \bar{M} \frac{r_o + r_u}{r_o + r_v + r_u}$$

Id. en el pie del pilar superior.

$$M_o = \bar{M} \frac{r_o}{r_o + r_v + r_u}$$

Id. en la cabeza del pilar inferior

$$M_u = \bar{M} \frac{r_u}{r_o + r_v + r_u}$$



- 1= Línea de cierre de la viga continua con apoyo extremo articulado.
- 2= Línea de cierre supuesta la viga perfectamente empotrada.
- 3= Línea de cierre efectiva.

Fig. 56. — Fórmulas de la Deutsche Ingenieure Normen 1045.

de una de estas estructuras de edificación resulta bien sencillo:

- Las vigas se consideran como vigas continuas sobre apoyos articulados (simplificación que resulta conservadora).
- Las columnas interiores se calculan como columnas con carga centrada, prescindiendo de su enlace con las vigas.
- En las columnas exteriores, y en las interiores entre vanos que difieran en más de un 20 por 100, se tendrán en cuenta los momentos definidos por la figura 56 (fig. 25 de la D.I.N. 1045).

Con lo cual, la comprobación de una edificación corriente es bien simple: el efecto de viento no se considera en aglomeraciones urbanas; desplazamiento de nudos, variación de temperatura y fraguado desaparecen, explícitamente en algunas Instrucciones e implícitamente en las otras, al prescindir de la continuidad, y el asiento de apoyos no es costumbre preverlo. La sobrecarga, uniformemente repartida, se extiende siempre por vanos completos.

La estructura de la figura 53 tiene una separación entre crujeas de 5,00 metros. Los pesos permanentes por m. l. de viga resultan ser $g = 1,95$ toneladas/m., y la sobrecarga por m. l., $p = 5 \cdot 0,75 = 3,75$ Tn./m. El momento de empotramiento perfecto del que se parte en la aplicación de las fórmulas dadas por la D.I.N. 1045 tiene, pues, el valor:

$$\bar{M} = q \frac{7,50^2}{12} = 5,7 \frac{7,50^2}{12} = 26,72 \text{ m. Ton.},$$

siendo q la suma $q = g + p = 5,70$ Tn./m. de pesos permanentes y sobrecarga.

El cuadro adjunto (fig. 57) recoge los valores, calculados correctamente, de los momentos de flexión que aparecen en los extremos de los pilares de fachada y de los pilares interiores, tanto por efecto de pesos propios como por efecto de sobrecarga con indicación de las hipótesis de carga a que corresponden (1), y en la columna final figuran los valores de las flexiones en los pilares, deducidos según dichas Normas.

Ya se ve que en los pilares interiores, incluso por solamente pesos propios, no son nulos los momentos, sino que tiene un cierto valor que el efecto de la posi-

(1) Y que confirman todos los dados por Mörsch, op. cit., excepto los correspondientes a los pilares del cuarto piso, para los cuales hay que suponer que Mörsch toma un valor de peso de cubierta distinto del que expresamente indica haber tomado en las restantes plantas.

Los valores correspondientes a la hipótesis, muy favorable para los pilares intermedios, de carga extendida a la totalidad de la estructura, pueden obtenerse aproximadamente multiplicando los debidos al peso permanente g por la relación $(g + p) : g$.

PILARES		Valores de los momentos flectores calculados		Momentos según D.I.N. 1045 m. Ton.		
		por peso propio	por sobrecarga	Totales m. Ton.		
pilares exteriores	N J y Q M	cab. 1,101 pié 0,753		0,313 0,697	1,414 1,450	0,89 0,70
	J E y M H	cab. 1,524 pié 1,406		4,094 3,843	5,618 5,249	3,07 2,65
	E A y H D	cab. 2,064 pié 1,988		5,323 4,866	7,387 6,854	4,31 3,70
	A I y D IV	cab. 2,050 pié 1,025		5,570 2,785	7,620 3,810	6,05 3,02
	N J	pié 0,753		0,627	1,380	0,70
	J E	cab. 1,524		3,985	5,509	3,07
	E A	cab. 2,064		4,955	7,019	4,31
	A I	cab. 2,050		4,819	6,869	6,05
pilares interiores	O K y P L	cab. 0,192 pié 0,130		0,313 0,300	0,505 0,430	0 0
	K F y L G	cab. 0,277 pié 0,236		1,969 1,885	2,246 2,121	0 0
	F B y G C	cab. 0,460 pié 0,423		3,884 3,516	4,344 3,939	0 0
	B II y C III	cab. 0,515 pié 0,257		5,085 2,543	5,600 2,800	0 0
	O K	pié 0,130		0,272	0,402	0
	K F	cab. 0,277		1,924	2,201	0
	F B	cab. 0,460		3,656	4,116	0
	B II	cab. 0,515		4,389	4,904	0

Fig. 57. — Resumen del estudio de los pilares de la anterior estructura, según un cálculo riguroso y según la D.I.N. 1045.

ción de la sobrecarga puede aumentar apreciablemente.

Y que los momentos en los pilares exteriores dados por las Normas son muy insuficientes frente a los reales.

No tienen mayor trascendencia estas diferencias en esa estructura de la figura 53, concebida al viejo y sano estilo de los años en que una obra de hormigón era una fundición que se iba colando poco a poco a medida que progresaba su molde y los forjados consubstanciales con todo el resto de la estruc-

tura. Estructuras que, como las del Clínico, son capaces, llegado el caso, de sufrir amputaciones radicales y redistribuirse la función resistente. La rigidez de los elementos horizontales es siempre mucho mayor que la de los pilares, y la relativa flexibilidad de éstos hace que su trabajo sea fundamentalmente el propio de elementos sustentadores. Así la columna de pilares interiores, II-B-F-K-O, dimensionada según la D.I.N. 1045 a carga perfectamente axial pero armada con la cuantía del 1 por 100, resulta suficientemente resistente frente a las sollicitaciones reales. Ya los pilares de fachada, de antemano dimensionados con mayores secciones que los interiores, puedan ser asimismo suficientes, sin grandes cuantías de armadura.

Pero no es éste el caso de las estructuras de hoy con forjados meramente yuxtapuestos, y en las que resulta normal que la rigidez de los elementos horizontales sea análoga a la de los pilares. Pasan éstos a ser piezas francamente sollicitadas a flexión compuesta y, en caso de necesidad, difícilmente pueden acudir unos elementos en ayuda de los restantes de la estructura. Basta un eslabón para que falle una cadena.

Es en estas estructuras donde resulta más sensible que unas Normas de proyecto vengán provocando un error sistemático, reduciendo con ello el margen de seguridad que tales disposiciones pretenden garantizar, y precisamente en aquellos elementos que por las nuevas normas constructivas han pasado a tomar un papel principal.

Resulta curioso comprobar la extensión y fortuna crecientes alcanzadas por esas "rohen Faustformel" (1). Surgidas por vez primera en el Reglamento prusiano de 1925, son recogidas y mantenidas sin variación en las ediciones de las posteriores D.I.N. Poco a poco van siendo incorporadas a los Reglamentos de los diversos países del continente que siguen igual criterio de un articulado detallado. En otros, como Italia, que evitan en sus Normas este carácter, penetran rápidamente esas fórmulas a través de sus tratadistas (2). Más tardía ha sido su aparición en Inglaterra, donde quedan por fin establecidas por el "Memorandum on computation of stresses", anejo al "Building By-laws" promulgado en 1938 por el London County Council (con la agravante de la extensión de esas fórmulas incluso a edi-

ficaciones de una sola crujía). Entre nosotros han encontrado también sanción, como antes decimos, en las Normas de la Dirección General de Arquitectura (punto 16, Estructuras reticuladas).

La causa del error que encierran es, sin embargo, bien patente: como hace notar Mörsch, dichas fórmulas sólo tienen en cuenta el efecto que al pie y cabeza de las columnas correspondientes les comunica la viga que entre ellos se inserta, y dejan sin considerar las acciones que ejerce el resto de la estructura.

Más que por las consecuencias que directamente se deriven de su aplicación al dimensionamiento de los pilares exteriores (y de las que en el dimensionamiento de los interiores también pueda producir el prescindir de su enlace con las vigas), más importante es, a nuestro parecer, el que, respaldados por las Normas, pueda acometerse el estudio de estas estructuras múltiples, sin más bagaje que unas tablillas de vigas continuas. Y metidos en este menester y creyéndose protegidos por la reputada prudencia de las mismas, pueda seguirse ese sentido de tolerancia: las sobrecargas (cuya posible variación de posición ya se ha permitido con lo anterior dejar de tenerla en cuenta) son, además, reducidas, según los pisos en unas Instrucciones, o aumentando la carga admisible en columnas, según otras; las cuantías, referidas no a la sección del soporte, sino a "la sección necesaria para la resistencia", pueden ser muy estrictas, etc., etc.

¿Propugnamos la supresión de esas tolerancias que transforman una múltiple interconexión en unos elementos tan independientes, diferenciados y cómodos de comprobar? Para las estructuras *normales* de edificación, si denominamos normales a aquellas que lo eran en 1925, época en que cristalizaron todas estas fórmulas, tolerancias y Normas, no creemos en modo alguno que sea menester pedirla: los forjados de esos años constituían una reserva no por inapreciada menos valiosa.

Pero para las que hoy día vemos como normales, sí resulta, a nuestro entender, conveniente y necesaria dicha supresión: no pudiendo ningún elemento recibir ayuda positiva de los restantes, menester es que sean dimensionados cual corresponde a esta nueva y peligrosa realidad (1). (Incluso insuficiente el que el proyecto de cimentación sea tan sólo la elección de una carga admisible y no el estudio, aunque sea so-

(1) Justo es que hagamos resaltar que nuestra Comisión para la redacción de la "Instrucción para el proyecto y ejecución de obras de hormigón", sólo les dió una cabida provisional y efímera. Y que al ser promulgada la Instrucción con carácter definitivo (Decreto del Ministerio de Obras Públicas, B. O. del E. de 1-VI-1944), introdujo la Comisión unas modificaciones que, prácticamente, anulan los peligros de su uso.

(2) L. Santarella: *Il cemento armato*, en cualquiera de sus diez ediciones. Ver el ejemplo de: "Progetto e calcolo di un'ossatura per fabbricato d'abitazione", que desarrolla por extenso.

(1) NOTA: Redactadas estas líneas hace ya varios meses, en este intervalo han quedado confirmadas, en su finalidad, por una reciente circular de la Junta de Gobierno del Colegio de Arquitectos de Madrid, que ha acordado disponer que, a partir de 1.º del año actual, además de los documentos que eran anteriormente obligatorios, será exigida la presentación de los *cálculos y planos de la estructura*.

El cálculo deberá contener la justificación numérica de las disposiciones y secciones adoptadas en cada uno de los elementos de la estructura resistente, comprendiendo, por lo menos, los siguientes apartados: 1. Descripción general e hipótesis de cálculo. 2. Cargas y sobrecargas adoptadas. 3. Caracteres de los materiales y tensiones. 4. Detalle de las

mero, de los asientos propios y de los provocados al vecino.)

* * *

Sería excesiva pretensión el que hubiera de hacerse en cada caso un estudio tan entretenido como el desarrollado anteriormente. La rapidez con que se amortiguan los efectos de una sollicitación en cuanto nos alejamos de su punto de aplicación, permite, con buena aproximación, ir considerando la estructura como constituida por estructuras hiperestáticas más simples, y en ellas, el método de los puntos fijos, partiendo de valores estimados de las rigideces en sus enlaces con el resto, conduce directamente a resultados muy aproximados.

Incluso susceptibles de resumirse en nuevas *Faustformeln* simplicadoras de este trabajo. Por ejemplo, los momentos por sobrecarga en los extremos de un pilar de fachada intermedio (fig. 58), pueden evaluarse, como hace Mörsch, mediante las expresiones:

$$M_{\text{cabeza}} = \frac{p L^2}{12} \frac{3 \cdot r_l}{2 r_o + 3 r_l + r_v}, \quad [58]$$

$$M_{\text{pie}} = \frac{p L^2}{12} \frac{3 \cdot r_l}{3 r_l + 2 r_u + r_v}, \quad [59]$$

y otras fórmulas análogas dan, asimismo, los valores para los efectos de las cargas permanentes y de so-

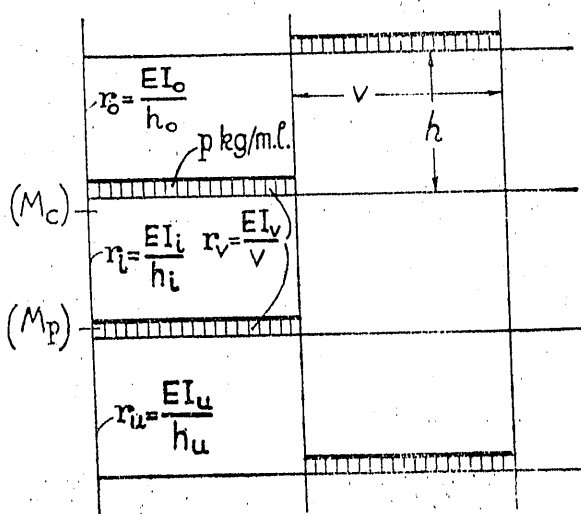


Fig. 58. — Estudio de la estructura por reducción a otras más sencillas.

tensiones resultantes en cada elemento; y 5. Estudio de la cimentación.

En cuanto a los planos de estructuras, se exige no falte ninguno de los datos necesarios para la ejecución. Es, asimismo, obligatoria la presentación de esta misma documentación para todas las modificaciones que se introduzcan durante el curso de la obra.

brecargas en otras regiones de las estructuras (1). (Si el lector compara los valores dados por estas fórmulas con los exactos anotados en la figura 57, comprobará que son realmente muy aproximados.)

* * *

Dejando esta digresión y volviendo de nuevo al caso general de estructuras cerradas, queda por comentar la cuestión de la traslación de sus nudos, traslación, en general, poco importante cuando es debida a la disimetría de cargas y, por el contrario, muy importante si es debida a la acción de cargas laterales, por pequeñas que éstas sean. Una vez determinadas las rigideces y la posición de los puntos fijos, en nada difiere su estudio de lo antes expuesto para el caso de estructuras abiertas de movilidad múltiple, y será igualmente necesario reducirlo al de estudio previo de tantos casos de simple movilidad como grados de traslación tenga la estructura.

Así, en el caso de la figura 53, sería menester estudiar cuatro casos de traslación relativa entre pisos: un corrimiento relativo, Δ , entre las plantas segunda y tercera, en tanto impedimos, mediante unas desconocidas fuerzas de fijación, las restantes traslaciones relativas, es el caso representado en la figura 59-a). Como conocemos la situación de los puntos fijos de los pilares de este piso (fig. 59-b)), bien mediante el ábaco XI o las fórmulas [40], podemos escribir directamente los momentos que en pie y cabeza de estos pilares produce dicha traslación Δ :

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{cab}}^{fI} &= \frac{6 EI}{H} \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \frac{\Delta}{H} = \\ &= \frac{6 \cdot 0,063 EI_o \cdot 0,310373}{1 - 0,314163 - 0,310373} \cdot \frac{\Delta}{H} = \\ &= 0,312469 EI_o \frac{\Delta}{H} \text{ m. Kg.} \\ M_{\text{pie}}^{fI} &= 0,316285 EI_o \frac{\Delta}{H} \text{ m. Kg.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Pilares} \\ \text{I E y M H} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{cab}}^{fI} &= 0,208934 EI_o \frac{\Delta}{H} \text{ m. Kg.} \\ M_{\text{pie}}^{fI} &= 0,209487 EI_o \frac{\Delta}{H} \text{ m. Kg.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Pilares} \\ \text{K F y L G} \end{array}$$

a los que corresponden las elásticas de deformación representadas en 59-c), que corresponden, ciertamente, a la traslación relativa Δ entre sus extremos, al igual que ya vimos en el estudio de piezas constituyentes de estructuras en malla abierta.

Sin embargo, en estas estructuras en malla ce-

(1) Por no dar más extensión a la ya excesiva de estos artículos, y por su limitado campo de aplicación, no se detallan aquí. Se incluirán, junto con otros datos de carácter práctico, en la tirada en separata autorizada por la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

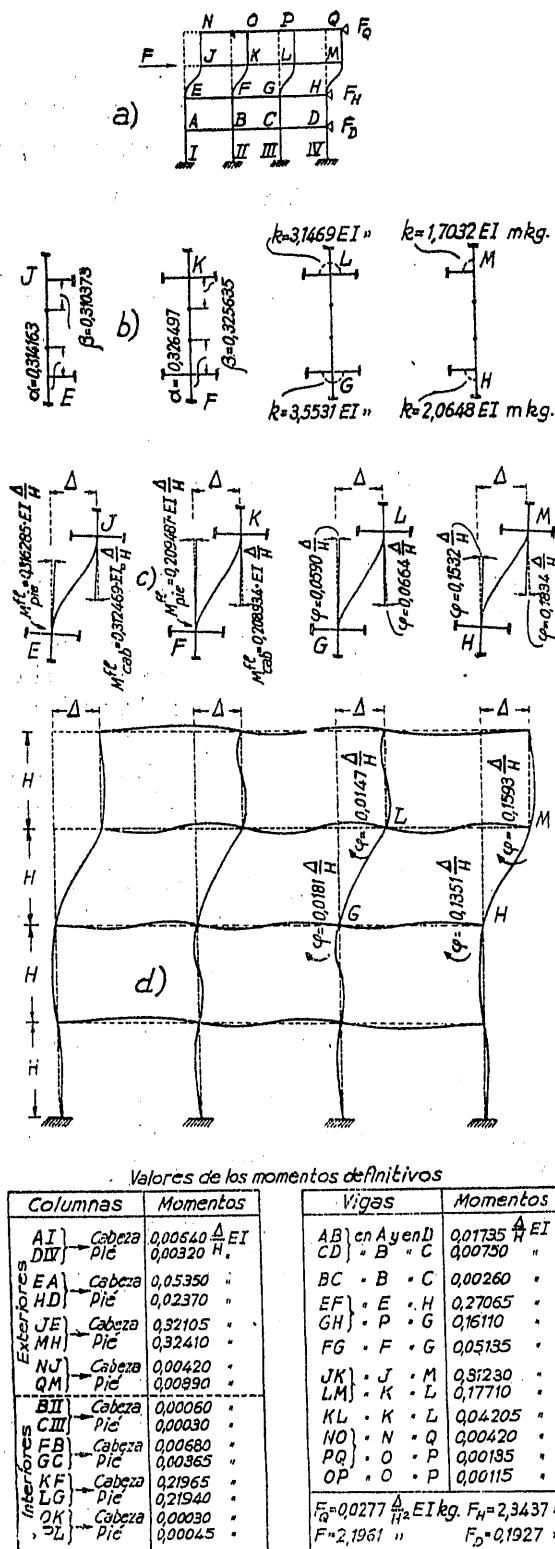


Figura 59.

rrada no son estos momentos los momentos flectores que realmente produce la traslación de la estructura, pues a ellos vienen a superponerse, alterando su va-

lor, los procedentes de la repartición (entre las barras que concurren en cada uno de los extremos J, K, L, M, E, F, G y H, de los pilares), de unos momentos iguales y contrarios a los que en esos extremos nos ha dado la fórmula [40].

Esta distribución y transmisión tiene como consecuencia una alteración en los giros (fig. 53-c)) inicialmente tomados por los nudos, pero sin producir ninguna traslación adicional que modifique la inicialmente dada. Se representa en la figura 59-d) la elástica que, en definitiva, toma la estructura al imprimir la citada traslación relativa, y se anotan los valores de los momentos flectores a los que han quedado sometidos todas sus piezas (1).

Como siempre, las condiciones de la estática, cuya aplicación en este caso se reduce a escribir el equilibrio entre fuerzas exteriores y esfuerzos cortantes en los pilares, nos dan a conocer cuál ha sido el valor de la fuerza F_M que ha producido el desplazamiento Δ , y los valores de las F_Q , F_H y F_D que han inmovilizado entretanto los restantes pisos.

Los momentos flectores iniciales dados por las fórmulas [40] y productores de la deformación recogida por la figura 59-c), que en el caso de estructuras en malla abierta son los momentos y deformaciones real y definitivamente producidos, resultan, en cambio, modificados en el caso de estructuras cerradas, toda vez que, al hacer la propagación y distribución, aparecen nuevos momentos flectores que solicitan esas mismas piezas.

En la figura 59, las modificaciones son debidas, muy principalmente, a las acciones que cada pilar recibe de los contiguos, pero también a los que recibe de sí mismo. Puede ponerse de manifiesto este comportamiento de las estructuras en malla cerrada estudiando su caso más sencillo: célula de la figura 60, sometiendo a carga una sola de sus barras.

Para carga uniforme de su barra inferior, los momentos flectores en sus nudos tienen los valores (ver formularios):

$$M_A^{f1} = M_B^{f1} = \frac{5}{8} \frac{p L^2}{12} = \frac{5}{8} \bar{M} = 0,625 \bar{M};$$

$$M_C^{f1} = M_D^{f1} = \frac{1}{8} \frac{p L^2}{12} = \frac{1}{8} \bar{M}.$$

Ahora bien: dado que las abscisas unitarias de los focos de esa barra AB son (ver figura 5.a):

$$u = \beta = \frac{3 - \sqrt{3}}{6};$$

(1) Se aprecia la rapidez con que se amortigua el efecto de la traslación a más de un piso de distancia, y por qué, a los efectos prácticos, puede estimarse la acción del viento en los elementos de los dos pisos superiores prescindiendo, para los cálculos, de la existencia de la planta baja. Es decir, ir reduciendo el estudio, sea cualquiera el número de pisos de la estructura, al de grupos de tres pisos sucesivos.

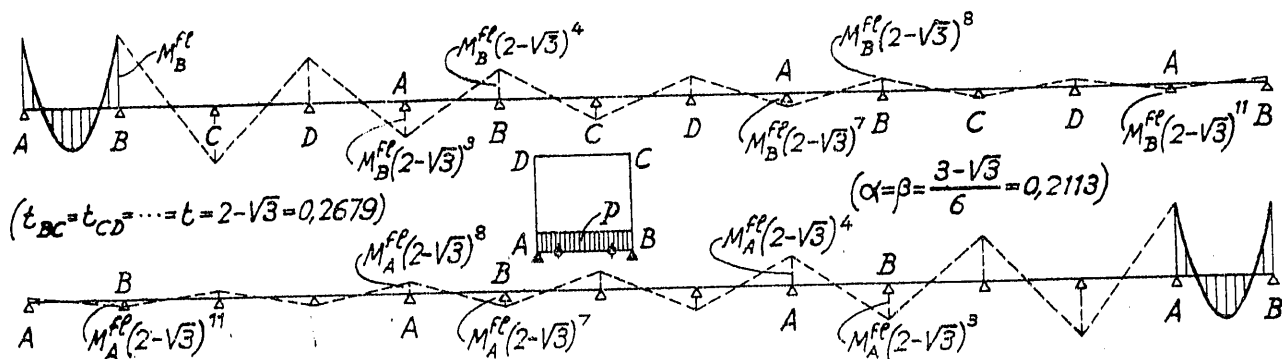


Figura 60.

las expresiones de W. Ritter (en este caso la expresión [25']), dan como valor de los momentos flectores que la carga produce en los extremos de esa barra el valor:

$$M_A^{f'l} = M_B^{f'l} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \bar{M} = 0,634 \bar{M},$$

que a primera vista habría que reputar como inexacto, ya que difiere del verdadero (aunque sólo sea en un catorce por mil). En dicha figura 60, no dibujada a escala, se anotan los valores de los momentos propagados, valores que forman una progresión geométrica indefinida. Se ve en ella claramente que los momentos flectores en esos extremos A y B, toman en definitiva el valor:

$$\begin{aligned} M_A^{f'l} = M_B^{f'l} &= \frac{3-\sqrt{3}}{2} \bar{M} [1 - (2-\sqrt{3})^3 + \\ &+ (2-\sqrt{3})^4 - (2-\sqrt{3})^7 + \dots] = \\ &= \frac{3-\sqrt{3}}{2} \bar{M} \left[1 - \frac{9-5\sqrt{3}}{24} \right] = \frac{5}{8} \bar{M} \end{aligned}$$

que es, efectivamente, el exacto.

Esta observación no ha tenido más propósito que el de señalar el distinto comportamiento de una malla cerrada, distinción puramente teórica, pues en la práctica no resultará necesario llevar la propagación de momentos a más allá de dos barras y será inapreciable este influjo de una pieza sobre sí misma.

A los efectos prácticos, una vez conocidas las rigideces y los puntos fijos, del mismo modo se opera tanto si la estructura es de malla abierta como si es de malla cerrada.

(La distinción a establecer es la antes señalada, de que, en mallas abiertas el conocimiento de las rigideces y de la posición de los focos viene dado por operaciones directas, en tanto que en las cerradas hemos de determinarlos por aproximación.)

Resumen de lo expuesto.

La observación hecha anteriormente respecto a la identidad de los ábacos I y XII, facilita este resumen final.

El concepto de rigidez del extremo de una barra elásticamente empotrada en el opuesto, sobre el cual, y por mera reiteración del mismo, se ha venido estableciendo todo lo anterior, quedó deducido en la figura 2.^a por aplicación del principio de superposición a dos casos elementales de carga en la ménsula elásticamente empotrada.

Si las relaciones que establece dicha figura 2.^a se expresan en función de la rigidez del empotramiento, resultan las fórmulas de recurrencia [11], [12] y [14] y el inicial ábaco I.

Si esas mismas relaciones las expresamos en función de las abscisas de los focos, resultan las fórmulas de recurrencia [41], [42] y [43] y el ábaco XII final.

Ahora bien: si en vez de hacer patente la identidad entre estos ábacos y la total equivalencia entre los conceptos de foco, coeficiente de transmisión y rigidez, adoptamos solamente este último concepto de "rigidez de extremo", eliminando el de "foco" o "punto fijo", no habríamos hecho sino exponer en castellano el "método de las rigideces" (*Widerstandsmethode*), desperdiciando así la utilidad, extraordinaria, que los puntos fijos dan tanto para el estudio de la barra cargada como para hacer visible la transmisión y comportamiento de la estructura. (No es que el *Widerstandsmethode* sea un método desdéniable. Al fin y al cabo da directamente, y con casi las mismas operaciones previas, lo que el de Cross ha de obtener, además, por aproximaciones sucesivas.)

Si, por el contrario, hubiéramos operado de modo exclusivo con las "distancias focales", la exposición hubiera resultado prácticamente la misma ya dada por Mörsch y Suter, es decir, su "método de los puntos fijos". De todos modos, hubiera quedado expuesto este método bajo su forma de empleo más cómodo, por operar con "rigideces" aun en mallas

abiertas, en vez de operar con "flexibilidades" (1).

La forma adoptada en la presentación inicial de los conceptos de rigidez de extremo de barra y focos o puntos fijos, no ha sido la habitual. Esto ha sido debido a que se lee, frecuentemente, que en las fórmulas del método de los puntos fijos resulta enojoso el número de elementos angulares que intervienen, resultado de la intuición geométrica de la que naciera.

Interesaba, por ello, presentarlos partiendo del más fecundo de los conceptos elásticos: el principio de superposición, y eliminar, además, todos esos elementos auxiliares. De hecho, en toda la anterior exposición no han quedado más giros auxiliares que los ángulos α_0 y β_0 que caracterizan cada tipo de carga.

(Pese a que esta exposición no ha requerido más conocimientos previos que el muy elemental de las deformaciones de la ménsula isostática bajo un par y bajo una fuerza (ver figura 2.^a), no es ésta la exposición más fecunda. Mejor hubiera sido recurrir a elementos más intrínsecos de la pieza: posición del centro elástico, peso elástico e inercia de los pesos, conceptos que pueden resultar abstractos a técnicos de otros países, no entre nosotros en que el conocimiento de la geometría proyectiva permite que un ingresando los asimile de modo inmediato y vea el comportamiento del cuerpo elástico. La fecundidad de la geometría sintética se hubiera, en este caso, traducido en que el mismo proceso de razonamientos hubiese conducido al estudio de las estructuras con

piezas de inercia variable, en vez de quedar limitados a las de piezas de inercia constante.) (1).

Aunque nada se ha indicado, igualmente resultan aplicables todas las abreviaciones de cálculo que en cualquier método producen las simetrías de estructura y la simetría y antimetría de cargas (2). El estudio de estos casos particulares nos hubiera alejado aún más de nuestro propósito de poner de manifiesto la unicidad de los conceptos de que se sirven métodos que suelen presentarse como diversos, y que son, las más de las veces, variantes no siempre afortunadas, y muchas otras, nuevos hallazgos de resultados que ya habían sido obtenidos hace bastantes décadas.

* * *

Entre los métodos de cálculo de estructuras, parecía necesario romper lanzas por estos que tienen la gran virtud de proporcionar un conocimiento directo y previo de la estructura, con independencia de las cargas, y que permiten hacer, finalmente, un estudio exhaustivo de las sollicitaciones que los casos de carga producen. Métodos que las obras de Zafra y de Peña habían difundido entre nosotros, y a cuya facilidad y comodidad de empleo van dirigidas todas las expresiones y ábacos anteriores.

Si el estudio se restringe a pocos estados de carga, la posición puede ser mucho más ecléctica: incluso llegan a ser más convenientes, como vimos, los métodos generales de obtención de reacciones hiperestáticas o los de deformaciones con sus sistemas de ecuaciones anejos, y, en general, podrán ser preferibles los métodos numéricos de aproximaciones sucesivas.

Puede objetarse que, en casos de cargas complejas o móviles, no es obstáculo la laboriosidad de los métodos de aproximaciones sucesivas, pues ello se puede suplir con el trabajo de auxiliares que hasta conozcan su algoritmo.

Pero esto nos lleva de nuevo a la cuestión, no por eludida menos crucial, de los métodos cuyos resultados necesitan se realice además un estudio elástico comprobatorio que los avale.

(Concluiré.)

(1) Otra tercera desviación quedaba por tomar al ir siguiendo el camino iniciado por W. Ritter: la de elegir como elementos básicos del cálculo los valores de los "factores de transmisión t_{AB} y t_{BA} ". De la figura 2.^a o de la figura 45, se deducen, en función de t_{BA} , los valores de los restantes elementos de cálculo:

$$K_A (AC, AD, AE) = \frac{6 \cdot t_{BA}}{1 - 2 \cdot t_{BA}} \cdot K_{AB} = \frac{6 \cdot t_{BA}}{1 - 2 \cdot t_{BA}} \cdot \frac{EI}{L}, \quad [60']$$

$$\alpha = \frac{t_{BA}}{1 + t_{BA}}, \quad [61']$$

$$K_B (BA) = \frac{6}{2 - t_{BA}} K_{AB} = \frac{6}{2 - t_{BA}} \cdot \frac{EI}{L}, \quad [62']$$

y en función del otro factor de transmisión, t_{AB} , los restantes:

$$K_B (BF, BG, BH) = \frac{6 \cdot t_{AB}}{1 - 2 \cdot t_{AB}} K_{AB}, \quad [60]$$

$$\beta = \frac{t_{AB}}{1 + t_{AB}}, \quad [61]$$

$$K_A (AB) = \frac{6}{2 - t_{AB}} K_{AB}, \quad [62]$$

que es el método que acaba de proponer, en este pasado mes de julio, E. Kohl (*Der Bauingenieur*, H7-1953), como modo de eliminar la reiteración de transmisiones del método de Cross, al adoptar desde el primer momento el valor exacto del factor de transmisión.

Es, como el *Widerstandesrechnung* de 1938, otro modo de reducirse y limitarse posibilidades y perspectivas.

(1) Ciertamente que, en piezas de inercia variable, ya no es posible auxiliarse de ábacos tan cómodos como los aquí dados para la viga de inercia constante. Pero también es mucho lo que puede simplificarse su estudio, hasta dejarlo convertido en mera introducción de unos valores tabulados en toda una serie de expresiones algébricas. Muchas de estas expresiones se encuentran en nuestro libro *La pieza elástica*, Madrid, 1952, y con mayor extensión en el de *Arcos y vigas de inercia variable*, en curso de publicación.

(2) Esta aplicación del principio de superposición descomponiendo las cargas en simétricas y antisimétricas, quedó ya formulada por Schwedler en 1868. En 1919 aparece elevada a la categoría de método por W. L. Andree en su *B. U.-Verfahren* (Belastung Umordnung). Y de nuevo nos la presenta M. Mayer, en 1938, con la menos cabalística, pero más larga, denominación de *Urlastverfahren*.