

# GENERALIZACION DEL METODO DE LAS TRANSFORMACIONES

## ALGUNOS ASPECTOS DEL PROBLEMA

Por FEDERICO GODED ECHEVERRIA,  
Ingeniero de Caminos.

*Este método, que fue primeramente concebido para su utilización exclusiva en la teoría de la Elasticidad (\*), desborda, en realidad, estos estrechos límites, ya que son mucho más vastas e interesantes sus aplicaciones en otras ramas de la Mecánica-Física. Presentamos en este trabajo algunos aspectos del problema matemático que el método plantea, así como el esquema general de sus fundamentos.*

Las ecuaciones en derivadas parciales de la Física matemática deben ser satisfechas por determinadas funciones de la forma  $F(x, y, z, t)$  si se refieren a estados físicos variables con el tiempo, o de la forma  $F(x, y, z)$  si son estacionarios.

Designemos por

$$LF = 0 \quad [1]$$

la ecuación que debe satisfacer  $F$  en el caso más general en que interviene la variable  $t$ .

Si efectuamos el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = f_1(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ y = f_2(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ z = f_3(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ t = f_4(x_1, y_1, z_1, t_1) \end{cases} \quad [2]$$

la ecuación [1] se transformará a la siguiente:

$$N_1 F(f_1, f_2, f_3, f_4) = N_1 F_1(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0. \quad [3]$$

Llamemos  $N$  al operador obtenido al hacer en esta segunda ecuación  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ . Supongamos ahora que es posible establecer una identidad, como la siguiente:

$$R(x, y, z, t) LF(x, y, z, t) \equiv N[F(x, y, z, t) \cdot \psi(x, y, z, t)], \quad [4]$$

para cualquier valor de  $x, y, z, t$ . Esta identidad presupone la existencia de una correspondencia biunívoca entre los dos espacios  $\xi(x_1, y_1, z_1, t_1)$  y  $\eta(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . En efecto, de la misma se deduce que si  $F(x, y, z, t)$  satisface a la ecuación [1], entonces  $F(x_1, y_1, z_1, t_1) \cdot \psi(x_1, y_1, z_1, t_1)$  satisface a la ecuación [3]. A cada solución  $F(f_1, f_2, f_3, f_4) = F_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  de esta última ecuación corresponderá la solución asociada,  $F_2(x_1, y_1, z_1, t_1) = F(x_1, y_1, z_1, t_1) \cdot \psi(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ,

y a cada punto  $\eta(x_1, y_1, z_1, t_1)$  del triedro cartesiano  $(x_1, y_1, z_1)$ , vinculado a la solución  $F_2$ , le corresponderá el  $\xi(x_2, y_2, z_2, t_2)$  del mismo triedro vinculado a la solución  $F_1$ , siendo:

$$\begin{cases} x_2 = f_1(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ y_2 = f_2(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ z_2 = f_3(x_1, y_1, z_1, t_1), \\ t_2 = f_4(x_1, y_1, z_1, t_1). \end{cases} \quad [5]$$

La identidad supuesta indicaría, pues, la existencia de una homología entre los dos espacios físicos  $\xi$  y  $\eta$ , relativos a los dos instantes,  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente, homología cuya naturaleza dependerá del tipo de ecuación y del fenómeno de que se trate.

Existirán, pues, en realidad, dos problemas homólogos, que se resolverán simultáneamente. En esta hipótesis, cuanto más sencillas y directas sean las leyes que relacionen la función  $F$  con las magnitudes físicas adscritas a la misma, más útil y fecundo será el método.

Presta un mayor interés a este método el hecho de que, con una serie importante de ecuaciones clásicas y modernas de la Física matemática, como las de Laplace, Maxwell, etc., pueden lograrse identidades semejantes a la [4].

También en el aspecto puramente matemático tiene interés la identidad supuesta, ya que, como hemos visto, permitirá deducir nuevas series de soluciones, partiendo de series de soluciones conocidas.

En el presente artículo nos limitamos a estudiar algunos aspectos del problema matemático de la obtención de la identidad, tanto en ecuaciones en derivadas parciales como en ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque en estas últimas tenga un menor interés, y a obtener algunas identidades de fundamental importancia en las aplicaciones físicas, prescindiendo del estudio de estas aplicaciones, que reservamos para otros artículos.

Comenzaremos con las ecuaciones diferenciales ordinarias.

(\*) Revista de Ciencia Aplicada, marzo-abril 1952, y REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, mayo-junio-julio 1952 y febrero 1953. Un ejemplar del presente trabajo está inscrito con el número 338 en el Archivo de originales del Centre National de la Recherche Scientifique, Centre de Documentation, París.

## ECUACIONES LINEALES

Comenzaremos con las de segundo orden. Sea la ecuación homogénea:

$$L y = a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0, \quad [6]$$

en la que  $L$  designa el operador:

$$a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x). \quad [7]$$

Al efectuar en ella la sustitución:

$$x = \varphi(t), \quad [8]$$

se llega a la siguiente ecuación:

$$a_0(\varphi) \cdot \varphi'(t) y'' + [a_1(\varphi) \cdot \varphi'(t)^2 - a_0(\varphi) \cdot \varphi''(t)] y' + a_2(\varphi) \cdot \varphi'(t)^3 y = 0 \quad [9]$$

Llamemos  $N$  al operador:

$$a_0[\varphi(x)] \varphi'(x) \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ a_1[\varphi(x)] \varphi'(x)^2 - a_0[\varphi(x)] \varphi''(x) \right\} \frac{d}{dx} + a_2[\varphi(x)] \varphi'(x)^3. \quad [10]$$

Aplicando este último operador al producto  $y(x) \cdot \psi(x)$ , resulta:

$$N(y\psi) = a_0[\varphi(x)] \varphi'(x) \psi(x) y'' + [2\varphi'\psi' a_0(\varphi) + \psi\{a_1(\varphi)\varphi'^2 - a_0(\varphi)\varphi''\}] y' + [a_0(\varphi)\varphi'\psi + \psi\{a_1(\varphi)\varphi'^2 - a_0(\varphi)\varphi''\} - a_0(\varphi)\varphi''\psi + a_2(\varphi)\psi\varphi'^3] y = 0. \quad [11]$$

Supongamos que esta última ecuación coincide, para cualquier valor de  $x$ , con la ecuación [1] de que partimos, multiplicada por una función conveniente  $R(x)$ .

En este caso podremos escribir:

$$R L y \equiv N(y\psi); \quad [12]$$

o bien:

$$(8 - \begin{cases} -1) a_0[\varphi(x)] \varphi'(x) = R(x) a_0(x); \\ -2) 2\varphi'\psi' a_0(\varphi) + \psi[a_1(\varphi)\varphi'^2 - a_0(\varphi)\varphi''] = R a_1(x); \\ -3) a_0(\varphi)\varphi'\psi'' + \psi[a_1(\varphi)\varphi'^2 - a_0(\varphi)\varphi''] + a_2(\varphi)\psi\varphi'^3 = R a_2(x). \end{cases} \quad [13]$$

El sistema anterior permitirá obtener las funciones incógnitas  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $R$ , conocidos los coeficientes de la ecuación  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$  y  $a_2(x)$ , reduciéndose en este caso el problema, como después veremos, a resolver una ecuación diferencial.

Puede plantearse el problema inverso, esto es, la determinación de los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$ , dadas  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $R$ , conduciéndonos en este caso el sistema anterior a tres ecuaciones funcionales.

Se facilita la solución, tanto del problema directo como del inverso, si previamente se suprime en la ecuación [1] el coeficiente  $a_1(x)$ , y se supone  $a_0(x) = 1$ ; es decir, si partimos de la ecuación en su forma canónica:

$$y'' + a_2(x) y = 0, \quad [14]$$

en cuyo caso, el sistema [13] se reduce al siguiente:

$$(15 - \begin{cases} -1) - \varphi'\psi = R; \\ -2) - 2\varphi'\psi' - \psi\varphi'' = 0; \\ -3) - \varphi'\psi'' - \psi'\varphi'' + a_2(\varphi)\psi\varphi'^3 = R a_2(x). \end{cases} \quad [15]$$

De estas dos primeras se deduce:

$$\begin{cases} \varphi' = C\psi^2; \\ R = C\psi^3. \end{cases} \quad [16]$$

Y reemplazando en la tercera los valores de  $R$  y  $\psi$  anteriores, en función de  $\varphi'$ , se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$4 a_2(\varphi) \varphi'^4 - 4 a_2(x) \varphi'^2 + 2 \varphi' \varphi''' - 3 \varphi''^2 = 0, \quad [17]$$

quedando así reducidos los problemas directo e inverso a la solución de la ecuación diferencial anterior, dado  $a_2(x)$ , o a la solución de la ecuación funcional obtenida cuando  $\varphi$  es conocida.

Vista la forma de lograr la identidad [12], veamos ahora su utilidad.

Sea:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad [18]$$

la integral general de la ecuación [6]. Reemplazando  $y$  por  $y_1$  en [12], se tiene:

$$N(y_1\psi) = 0, \quad [19]$$

ya que  $L y_1 = 0$ .

Luego  $y_1(t) \cdot \psi(t)$  es una solución particular de la ecuación [9] y, por consiguiente,  $y_1(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1)$  es una solución particular de la ecuación [6], siendo:

$$t = \varphi_1(x) \quad [20]$$

la función inversa de la [8]. Análogamente, se demostraría que  $y_2(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1)$  es otra solución particular de la ecuación [6]. Siendo  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  linealmente independientes, también lo serán  $y_1(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1)$  y  $y_2(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1)$ , ya que su wronskiano es:

$$\begin{vmatrix} y_1\psi & y_2\psi \\ y_1'\psi + y_1\psi' & y_2'\psi + y_2\psi' \end{vmatrix} = \psi^2 \varphi' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0. \quad [21]$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación [6] podrá también escribirse así:

$$y = K_1 y_1(\varphi_1) \psi(\varphi_1) + K_2 y_2(\varphi_1) \psi(\varphi_1); \quad [22]$$

siendo, por la unicidad de la solución:

$$\begin{cases} y_1(\varphi_1) \psi(\varphi_1) = y_1(x), \\ y_2(\varphi_1) \psi(\varphi_1) = y_2(x), \end{cases} \quad [23]$$

o bien:

$$\begin{cases} y_1(\varphi_1) \psi(\varphi_1) = y_2(x), \\ y_2(\varphi_1) \psi(\varphi_1) = y_1(x), \end{cases} \quad [24]$$

para valores convenientes de los constantes. En el primer caso,  $\varphi_1$  deberá satisfacer a la ecuación:

$$y_1(\varphi_1) y_2(x) = y_1(x) y_2(\varphi_1), \quad [25]$$

y en el segundo, a la:

$$y_1(\varphi_1) y_1(x) = y_2(x) y_2(\varphi_1). \quad [26]$$

Los valores de  $\varphi_1$  correspondientes a las soluciones de estas dos últimas ecuaciones, deberán satisfacer a la ecuación diferencial [17].

Tomando un valor de  $\varphi_1$  que sea solución de la última de ellas, [26], y el de  $\psi$  correspondiente, [24], la integral general podrá escribirse así:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 \psi(\varphi_1) y_1(\varphi_1), \quad [27]$$

expresada en función de la sola solución particular  $y_1(x)$ .

Antes de continuar, comprobaremos estos resultados con un ejemplo, que aclarará cuanto llevamos expuesto.

Construiremos para ello una ecuación de segundo orden, tipo Euler, de la forma canónica [14].

Sean:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^m; \\ y_2(x) = x^n. \end{cases} \quad [28]$$

Recordemos que, según el teorema de Liouville, el wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  vale:

$$W = e x p \left\{ \int \frac{a_1}{a_0} dx; \right\} \quad [29]$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{W'}{W} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad [30]$$

lo que nos indica que  $W' = 0$ , cuando  $a_1 = 0$ . En nuestro caso deberá ser, pues:

$$\begin{aligned} W' &= \begin{vmatrix} x^m & x^n \\ m(m-1)x^{m-2} & n(n-1)x^{n-2} \end{vmatrix} = \\ &= [n(n-1) - m(m-1)]x^{m+n-2} = 0. \end{aligned} \quad [31]$$

Tendremos, pues, para determinar  $m$  y  $n$ , la ecuación:

$$m(m-1) = n(n-1). \quad [32]$$

Formemos ahora las ecuaciones [25] y [26]. La primera de ellas da:

$$\varphi_1^{m-n} = x^{m-n}; \quad [33]$$

y la segunda:

$$\varphi_1^{m-n} \cdot x^{m-n} = 1. \quad [34]$$

Hagamos  $m-n=2$ , en cuyo caso tendremos las cuatro soluciones:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pm x; \\ \varphi_1 = \pm x^{-1}. \end{cases} \quad [35]$$

Los valores de  $\psi$  correspondientes, deducidos de las ecuaciones [23] y [24], son:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi_1) &= (\pm 1)^n; \\ \psi(\varphi_1) &= (\pm x)^{m+n}. \end{aligned} \quad [36]$$

Reemplazando en [32]  $m=n+2$ , se obtiene  $n = -\frac{1}{2}$  y  $m = \frac{3}{2}$ . La ecuación buscada será, pues, la siguiente:

$$\begin{vmatrix} y & x^{3/2} & x^{-1/2} \\ y' & \frac{3}{2} x^{1/2} & -\frac{1}{2} x^{-3/2} \\ y'' & \frac{3}{4} x^{-1/2} & \frac{3}{4} x^{-5/2} \end{vmatrix} = 0; \quad [37]$$

o bien:

$$4x^2 y'' - 3y = 0. \quad [38]$$

La ecuación [17], en este caso, toma la forma:

$$3x^{-2} \varphi'^2 - 3\varphi^{-2} \varphi'^4 + 2\varphi' \varphi''' - 3\varphi'^2 = 0, \quad [39]$$

la cual tiene como integrales particulares las [35], como es fácil comprobar.

La integral general será, pues:

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1(x) + C_2 x y_1(x^{-1}) = K y_2(x) + \\ &+ K_2 x y_2(x^{-1}), \end{aligned} \quad [40]$$

para  $\varphi_1 = \frac{1}{x}$ , obteniéndose expresiones semejantes para las restantes soluciones.

En las ecuaciones de segundo orden acabamos de ver que, para determinar una solución en función de la otra, basta que la ecuación [26] defina en todo el plano  $t = \varphi_1(x)$ , siendo  $\varphi_1$  derivable. En las ecuaciones de orden superior esto no es posible en general. En efecto: el sistema [24], en este caso, se des-

doblará en  $\left(\frac{3}{2}\right)$  sistemas análogos. Uno de ellos sería el siguiente:

$$\begin{cases} y_1(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_2(x), \\ y_2(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_3(x), \\ y_3(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_1(x), \end{cases} \quad [41]$$

y tendríamos, por lo tanto, para determinar  $\varphi_1$ , el sistema:

$$\begin{cases} y_1(\varphi_1) \cdot y_3(x) = y_2(\varphi_1) \cdot y_2(x); \\ y_2(\varphi_1) \cdot y_1(x) = y_3(\varphi_1) \cdot y_3(x). \end{cases} \quad [42]$$

Si este sistema no es compatible, no habrá posibilidad de lograr una identidad como la [12].

Así, por ejemplo, en el caso de una ecuación de tipo Euler, siendo:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^m, \\ y_2(x) = x^n, \\ y_3(x) = x^q, \end{cases} \quad [43]$$

la compatibilidad del sistema [42] exige que los coeficientes  $m$ ,  $n$  y  $q$  estén ligados por la relación:

$$(m-n)(q-m) = (n-q)^2. \quad [44]$$

Pero bastaría que la cumplieran para poder deducir, conocida  $y_1$ , las otras dos soluciones particulares  $y_2$  e  $y_3$ .

Si se hubiera partido del sistema siguiente:

$$\begin{cases} y_1(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_1(x), \\ y_2(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_2(x), \\ y_3(\varphi_1) \cdot \psi(\varphi_1) = y_3(x), \end{cases} \quad [45]$$

en vez del sistema [41], sería preciso conocer dos soluciones,  $y_1$  e  $y_2$ , para encontrar la tercera.

Así, en el caso sencillo de una ecuación de coeficientes constantes, tendríamos:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}, \\ y_2 = e^{\beta x}, \\ y_3 = e^{\gamma x}. \end{cases} \quad [46]$$

La compatibilidad del sistema [45] exige que los tres exponentes verifiquen:

$$2\alpha = \beta + \gamma, \quad [47]$$

siendo entonces:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -x; \\ \psi(\varphi_1) = e^{-2\alpha x}. \end{cases} \quad [48]$$

La integral general se puede, en este caso, escribir así:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_2(-x) e^{-2\alpha x}, \quad [49]$$

en función de las dos soluciones particulares  $y_1$  e  $y_2$ .

## ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES

### Ecuaciones de primer orden con respecto a $x$ .

En estas ecuaciones, el problema no puede plantearse con la misma generalidad. Sólo algunos tipos de ecuaciones admiten transformaciones análogas a las estudiadas en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Su utilidad, en cambio, es aquí quizás mayor, ya que permite, en algunos casos, la obtención de series de nuevas soluciones, partiendo de series de soluciones conocidas.

Comenzaremos con las ecuaciones de primer orden en la derivación con respecto a la variable  $x$ . Sea una ecuación del tipo siguiente:

$$Lz = a_0(x) \frac{\partial z}{\partial x} + a_1(x) z + Bz, \quad [50]$$

en la que  $B$  designa el operador:

$$\begin{aligned} & b_0(y,t) \frac{\partial^n}{\partial y^n} + b_1(y,t) \frac{\partial^n}{\partial y^{n-1} \partial t} + \dots + \\ & + b_n(y,t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} + c_0(y,t) \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} + \dots + \\ & + c_{n-1}(y,t) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + g_0(y,t). \end{aligned} \quad [51]$$

Efectuemos la sustitución:

$$\begin{cases} x = \varphi(x), \\ y = y_1, \\ t = t_1, \end{cases} \quad [52]$$

con lo que la ecuación dada se transforma en la:

$$a_0(\varphi) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \varphi' a_1(\varphi) z + \varphi' B_1 z = 0, \quad [53]$$

designando aquí  $B_1$  el operador [51] referido a los variables  $y_1, t_1$ .

Llamando  $N$  al operador:

$$a_0[\varphi(x)] \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'(x) a_1[\varphi(x)] + \varphi'(x) B, \quad [54]$$

tendremos, al reemplazar aquí  $z$  por  $z \cdot \psi(x)$ :

$$\begin{aligned} N(z\psi) &= a_0(\varphi) \psi \frac{\partial z}{\partial x} + [a_0(\varphi) \psi' + \varphi' a_1(\varphi) \psi] z + \\ &+ \varphi' \psi Bz. \end{aligned} \quad [55]$$

Para que se verifique la identidad:

$$RLz \equiv N(z\psi), \quad [56]$$

para cualquier valor de  $x$ , siendo  $R(x)$  una función conveniente de  $x$ , es preciso que sean:

$$\begin{cases} R a_0(x) = a_0(\varphi) \cdot \psi; \\ R a_1(x) = a_0(\varphi) \psi' + \varphi' a_1(\varphi) \psi; \\ R = \varphi' \psi. \end{cases} \quad [57]$$

Reemplazando el valor de  $R$  de la última en la primera, se obtiene, para determinar  $\varphi$ , la ecuación:

$$\frac{dx}{a_0(x)} = \frac{d\varphi}{a_0(\varphi)}. \quad [58]$$

Y sustituyendo en la segunda, se tiene, para determinar  $\psi$ , la siguiente ecuación:

$$a_1(x) \varphi' \psi = a_0(\varphi) \psi' + \varphi' \psi a_1(\varphi); \quad [59]$$

de donde, teniendo en cuenta [58], se tiene:

$$\psi = e x p \left\{ \int \frac{a_1(x) - a_1(\varphi)}{a_0(x)} dx \right\} \quad [60]$$

Si  $\varphi$  y  $\psi$  toman los valores [58] y [60], habremos logrado la identidad buscada. Si en esta hipótesis,  $z_1(x, y, t)$  designa una solución de la ecuación [50], entonces, en virtud de [56], será:

$$N(z_1, \psi) = 0, \quad [61]$$

y, por consiguiente,  $z_1(x_1, y_1, t_1) \cdot \psi(x_1)$  es una solución de la ecuación  $Nz = 0$ , y en consecuencia:

$$z_2(x, y, t) = z_1(x_1, y_1, t) \cdot \psi(\varphi_1) \quad [62]$$

es también una solución de la ecuación [50] de que partimos, siendo  $x_1 = \varphi_1(x)$  la función inversa de la primera de las [52].

Conviene observar que el número de variables independientes puede ser mayor de tres, ya que, como acabamos de ver, este número no interviene ni en el proceso de cálculo ni en los resultados.

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contrario, nos referiremos siempre al caso en que hay sólo dos independientes.

Hay dos casos en los cuales el método no es válido para obtener soluciones esencialmente distintas. Uno de ellos es el de las ecuaciones de primer orden; otro, el de las ecuaciones de orden cualquiera, cuando se aplica a una solución de la forma:

$$z_1 = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y).$$

En los dos casos se puede obtener una solución  $z_1$  de carácter general, y en ella estarán englobadas todas las soluciones del mismo tipo, y a ella pertenecerá, por lo tanto,  $z_2$ .

En efecto: sea la ecuación

$$X(x, y, z) P + Y(x, y, z) Q = Z(x, y, z). \quad [63]$$

Esta ecuación será del tipo de la [50] si, además de haber sólo dos variables independientes, es:

$$\begin{cases} n = 1; \\ X = a_0(x); \\ Y = b_0(y); \\ Z = -[a_1(x) + g_0(y)]z. \end{cases} \quad [64]$$

El sistema adjunto de la ecuación [57] será, en nuestro caso, el siguiente:

$$\frac{dx}{a_0(x)} = \frac{dy}{b_0(y)} = \frac{-dz}{[a_1(x) + g_0(y)]z}. \quad [65]$$

Integrando las dos primeras, se tiene:

$$C_1 = \int \frac{dx}{a_0(x)} - \int \frac{dy}{b_0(y)}; \quad [66]$$

de donde:

$$y = f_1(x, C_1). \quad [67]$$

Tomando la primera y la última de las [65], y reemplazando el valor de  $y$ , [67], se obtiene:

$$-\frac{dz}{z} = \frac{a_1(x) + g_0(f_1)}{a_0(x)}; \quad [68]$$

de donde:

$$C_2 = z e x p \left\{ \int \frac{a_1(x) + g_0(f_1)}{a_0(x)} dx \right\} \quad [69]$$

La integral general será, pues, la siguiente:

$$z = e x p \left\{ - \int \frac{a_1(x) + g_0(f_1)}{a_0(x)} dx \right\} \cdot \varphi \left[ \int \frac{dx}{a_0(x)} - \int \frac{dy}{b_0(y)} \right], \quad [70]$$

siendo  $\varphi$  arbitraria.

Comprobaremos ahora, en un caso concreto, que  $z_2$  no difiere esencialmente de  $z_1$ .

Sea la ecuación en que:

$$\begin{cases} a_0(x) = 2x^{-1}; \\ a_1(x) = 6x; \\ b_0(y) = 1; \\ g_0(y) = 8. \end{cases} \quad [71]$$

La ecuación [58] da  $\varphi = \pm x$ . Para  $\varphi = x$  resulta, de [60],  $\psi = \text{constante}$ . Tomaremos, pues,

$\varphi = -x$ ,  $y$ , por consiguiente,  $\varphi_1 = -x$ . Reemplazando este valor en [60], se obtiene:

$$\psi(\varphi_1) = e^{-2x^2}. \quad [72]$$

El valor de  $z$ , [70], es ahora:

$$z = e x p \left\{ -x^3 - x^4 + 2x^2(x^2 - y) \right\} \varphi(x^2 - y). \quad [73]$$

Siendo inmediato comprobar que:

$$z_2(x, y) = z_1(-x, y) \cdot e^{-2x^2} = z_1(x, y). \quad [74]$$

Igual sucede, como antes dijimos, con las soluciones de la forma  $z_1 = \Phi_1(x) \Phi_2(y)$ . En efecto: la ecuación [50] es de variables separables y, por tanto, reemplazando en ella el valor anterior de  $z_1$ , tendremos, para determinar  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$a_0(x) \frac{\Phi_1'}{\Phi_1} + a_1(x) = -\frac{1}{\Phi_2} B \Phi_2 = K(\text{const.}); \quad [75]$$

y de la primera de ellas se obtiene:

$$\Phi_1 = e x p \left\{ C \int \frac{K - a_1(x)}{a_0(x)} dx \right\}. \quad [76]$$

Si  $z_1(x, y)$  es una solución de este tipo, será, pues:

$$z_1(x, y) = \Phi_2(y) e x p \left\{ C \int \frac{K - a_1(x)}{a_0(x)} dx \right\}, \quad [77]$$

en cuyo caso  $z_2$  sería:

$$z_2(x, y) = \Phi_2(y) e x p \left\{ C \int \frac{K - a_1(\varphi_1)}{a_0(\varphi_1)} dx \right\} \cdot \psi(\varphi_1) = f(x) \varphi_2(y), \quad [78]$$

que es, como se ve, del mismo tipo.

Será, por lo tanto:

$$f(x) = e^{C_1 \int \frac{K - a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad [79]$$

siendo, en general,  $K_1 \neq K$  y  $C_1 \neq C$ .

En los restantes casos, esto es, siempre que no sea posible obtener para  $z_1$  una solución de carácter general, o bien que ésta sea de tal tipo que  $z_2$  no pertenezca necesariamente a él, podremos obtener, partiendo de  $z_1$ , una nueva solución esencialmente distinta.

## Ecuaciones de segundo orden con respecto a $x$ .

En las ecuaciones de segundo orden no es posible, en general, lograr la identidad deseada, ya que el sistema, análogo al [57], es de cuatro ecuaciones y sólo será compatible en algunos casos. Sea la ecuación:

$$\begin{aligned} Lz &= a_0(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x) z + Bz = \\ &= a_0(x) D_{x^2} + a_1(x) D_x + a_2(x) z + Bz. \end{aligned} \quad [80]$$

Efectuando el mismo cambio de variables que anteriormente, [52], se tiene:

$$\begin{aligned} a_0(\varphi) \varphi' D_{x_1}^2 + [a_1(\varphi) \varphi'^2 - a_0(\varphi) \varphi''] D_{x_1} + \\ + a_2(\varphi) \varphi'^3 z + \varphi'^3 B_1 z = 0. \end{aligned} \quad [81]$$

Llamando  $N$  al operador:

$$\begin{aligned} a_0[\varphi(x)] \varphi'(x) D_{x^2} + [a_1[\varphi(x)] \varphi'(x)^2 - \\ - a_0[\varphi(x)] \varphi''(x)] D_x + a_2[\varphi(x)] \varphi'(x)^3 + \varphi'(x)^3 B. \end{aligned} \quad [82]$$

Si reemplazamos aquí  $z$  por  $z \cdot \psi(x)$ , resulta, después de simplificar:

$$\begin{aligned} N(z\psi) &= a_0(\varphi) \varphi' \psi D_{x^2} z + [2\psi' \varphi' a_0(\varphi) + \psi [a_1(\varphi) \varphi'^2 - \\ &- a_0(\varphi) \varphi'']] D_x z + \{ \varphi' \psi'' a_0(\varphi) + \psi' [a_1(\varphi) \varphi'^2 - \\ &- a_0(\varphi) \varphi''] + a_2(\varphi) \varphi'^3 \psi \} z + \varphi'^3 \psi B z = 0. \end{aligned} \quad [83]$$

El sistema, equivalente al [57], será ahora el siguiente:

$$\begin{cases} a_0(\varphi) \varphi' \psi = R a_0(x); \\ 2 a_0 \varphi' \psi' + \psi [a_1 \varphi'^2 - a_0 \varphi''] = R a_1(x); \\ a_0(\varphi) \varphi' \psi'' + \psi' [a_1(\varphi) \varphi'^2 - a_0(\varphi) \varphi''] + a_2(\varphi) \varphi'^3 \psi = R a_2(x); \\ \varphi'^3 \psi = R. \end{cases} \quad [84]$$

Podemos suponer, sin mengua alguna de la generalidad,  $a_1 = 0$ , ya que este coeficiente se podrá siempre suprimir. En esta hipótesis de las ecuaciones primera, segunda y cuarta del sistema [84], se deduce:

$$\begin{cases} \varphi' = \psi^2; \\ R = \psi^7; \\ a_0(x) \varphi'^2 = a_0(\varphi). \end{cases} \quad [85]$$

Reemplazando en la tercera de las [84] los valores de  $\varphi$ ,  $R$  y  $\psi$  anteriores, se obtiene la condición de compatibilidad del sistema:

$$[2 \varphi' \varphi''' - 3 \varphi''^2] a_0(\varphi) + 4 [a_2(\varphi) - a_2(x)] \varphi'^4 = 0. \quad [86]$$

Hay un tipo interesante de ecuaciones que verifi-

can esta ecuación de compatibilidad, al cual pertenecen importantes ecuaciones de la Física matemática, como las de Laplace, Maxwell, etc.

En efecto: integrando la última ecuación, [86], cuando  $a_2 = \text{constante}$ , se obtiene:

$$\varphi = \frac{C_1}{C_2 + x} + C_3, \quad [87]$$

cualquiera que sea  $a_0(x)$ . Reemplazando este valor de  $\varphi$  con  $C_1 = -1$  y  $-C_3 = C_2 = 0$ , en la última de las [85], se llega a la ecuación funcional:

$$a_0(x) = a_0(-x^{-1})x^4, \quad [88]$$

que tiene la solución:

$$a_0(x) = x^2. \quad [89]$$

Tendremos, pues, en este caso, según [85], la solución siguiente:

$$\begin{cases} a_0(x) = x^2, \\ a_1(x) = 0, \\ a_2(x) = K (\text{constante}), \\ \varphi = -x_1^{-1}, \\ \psi = x^{-1}, \\ R = x^{-7}, \\ \varphi_1 = -x^{-1}, \end{cases} \quad [90]$$

que corresponde a la ecuación (\*):

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Kz + Bz = 0, \quad [91]$$

en la que  $B$  es el operador, [51], y  $K$  una constante. Las ecuaciones antes mencionadas de la Física matemática son casos particulares de ésta. Comprobemos esto primeramente en la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0. \quad [92]$$

Esta, en coordenadas polares esféricas, toma la forma:

$$R^2 \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial F}{\partial R} + BF = 0, \quad [93]$$

siendo, en este caso, el operador  $B$  el siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin^3 \alpha} \times \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}. \quad [94]$$

Reemplazando en [93]  $F$  por  $f \cdot R^{-1}$ , se llega a la siguiente ecuación:

$$R^2 \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + Bf = 0, \quad [95]$$

que es del tipo de la [91], cuando  $K = 0$ . Por lo tanto, si  $f_1(R, \alpha, \beta)$ , es una solución de esta ecuación. También será solución:

$$f_2(R, \alpha, \beta) = R f_1(R^{-1}, \alpha, \beta), \quad [96]$$

teniendo en cuenta los valores obtenidos para  $\varphi$  y  $\psi$  [90]. Así, pues, si  $F_1(R, \alpha, \beta)$  es una solución de la ecuación de Laplace, [93] también será solución de la misma ecuación:

$$F_2(R, \alpha, \beta) = R^{-1} F_1(R^{-1}, \alpha, \beta). \quad [97]$$

Una vez comprobado que la ecuación de Laplace es de la forma de la [91], veamos que sucede lo mismo con las ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \eta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad [98]$$

al que pertenecen importantes ecuaciones de la Física. En efecto: efectuando el cambio de variables

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \alpha, \\ y = R \cos \psi \sin \alpha, \\ z = R \sin \psi \cos \beta, \\ t = \eta R \sin \psi \sin \beta, \end{cases} \quad [99]$$

la ecuación [98] tomará ahora la forma siguiente:

$$R^2 \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + 3R \frac{\partial F}{\partial R} + BF = 0, \quad [100]$$

siendo, en este caso, el operador  $B$  el siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + (\operatorname{ctg} \psi - \operatorname{tg} \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad [101]$$

Reemplazando en esta ecuación  $F(R, \psi, \alpha, \beta)$  por:

$$f(R, \psi, \alpha, \beta) \cdot \Phi(R), \quad [102]$$

resulta:

$$R^2 \Phi \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + [2R^2 \Phi' + 3R\Phi] \frac{\partial f}{\partial R} + [R^2 \Phi'' + 3R\Phi'] f + \Phi Bf = 0. \quad [103]$$

Para que sea  $a_1 = 0$ , deberá  $\Phi$  ser solución de la ecuación:

$$2R^2 \Phi' + 3R\Phi = 0; \quad [104]$$

de donde se deduce:

$$\Phi = CR^{-3/2}. \quad [105]$$

(\*) El segundo término puede ser incluido, si se quiere, en el operador  $B$ .

Dando a  $\Phi$  este valor en la ecuación [103], ésta toma la forma:

$$R^2 \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} - \frac{3}{4} f + Bf = 0, \quad [106]$$

después de dividir por el factor común  $C R^{-3/2}$ .

Esta ecuación tiene ya la forma de la [91]. Por tanto, si  $f_1(R, \psi, \alpha, \beta)$  es una solución de esta ecuación, también lo será:

$$f_2(R, \psi, \alpha, \beta) = R f_1(R^{-1}, \psi, \alpha, \beta), \quad [107]$$

en virtud de los mismos valores de  $\varphi$  y  $\psi$  ya empleados [90].

Así, pues, si  $F_1(R, \psi, \alpha, \beta)$  es una solución de la ecuación [100], la solución asociada  $F_2(R, \psi, \alpha, \beta)$  será:

$$R^{-2} F_1(R^{-1}, \psi, \alpha, \beta).$$

La correspondencia biunívoca definida por las ecuaciones [5] será, en este caso, la siguiente:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\eta^2 x_1}{\eta^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - t_1^2}; \\ y_2 = \frac{\eta^2 y_1}{\eta^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - t_1^2}; \\ z_2 = \frac{\eta^2 z_1}{\eta^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - t_1^2}; \\ t_2 = \frac{\eta^2 t_1}{\eta^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - t_1^2}. \end{cases} \quad [108]$$

En efecto: dada la función

$$F_1(x, y, z, t) = F_1[R \cos \psi \cos \alpha, R \cos \psi \sin \alpha, R \sin \psi \cos \beta, R \sin \psi \sin \beta], \quad [109]$$

solución de [98], acabamos de ver que la solución asociada es:

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z, t) &= R^{-2} F_1 \left[ \frac{R \cos \psi \cos \alpha}{R^2}, \frac{R \cos \psi \sin \alpha}{R^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{R \sin \psi \cos \beta}{R^2}, \frac{R \sin \psi \sin \beta}{R^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\eta^2 (x^2 + y^2 + z^2) - t^2} F_1 [\eta^2 x [\eta^2 (x^2 + y^2 + z^2) - t^2]^{-1}, \\ &\quad \eta^2 y [\eta^2 (x^2 + y^2 + z^2) - t^2]^{-1}, \eta^2 z [\eta^2 (x^2 + y^2 + z^2) - t^2]^{-1}, \\ &\quad \eta^2 t [\eta^2 (x^2 + y^2 + z^2) - t^2]^{-1}]. \end{aligned} \quad [110]$$

Estudiemos ahora la ecuación de Laplace en plana:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0. \quad [111]$$

Efectuemos el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = f_1(\zeta, \eta), \\ y = f_2(\zeta, \eta), \end{cases} \quad [112]$$

siendo:

$$x + yi = f(\zeta + \eta i) = f_1(\zeta, \eta) + i f_2(\zeta, \eta), \quad [113]$$

y  $f$  una función monógena. La ecuación [111] se transforma en la siguiente:

$$\frac{1}{J(\zeta, \eta)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]. \quad [114]$$

Llamando  $N$  al operador:

$$\frac{1}{J(x, y)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right], \quad [115]$$

resulta:

$$\frac{1}{J^2} Lz \equiv Nz, \quad [116]$$

siendo  $L \equiv \Delta$ . En este caso es, pues,  $\psi = 1$ .

Así, pues, si  $F(x, y)$  es armónica y  $LF = 0$ , será  $NF = 0$  y, por consiguiente,  $F(\zeta, \eta)$  es solución de [114], y  $F[F_1(x, y), F_2(x, y)]$  es solución de [111], es decir, es también armónica, siendo  $F_0$  la función inversa de  $f$ :

$$\zeta + \eta i = F_0(x + yi) = F_1(x, y) + i F_2(x, y). \quad [117]$$

Indicaremos, finalmente, que las ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad [118]$$

se pueden tratar de la misma forma que la [98], mediante el cambio de variables:

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \theta, \\ y = R \cos \psi \sin \theta, \\ t = \eta R \sin \psi, \end{cases} \quad [119]$$

que la transforma en la de Laplace.

## Ecuaciones de cuarto orden con respecto a $x$ .

Estudiaremos de éstas solamente la ecuación:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = \Delta^2 F = 0. \quad [120]$$

Pasando esta ecuación a polares esféricas, tendremos:

$$L^2 F = 0, \quad [121]$$

siendo  $L$  el operador:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2R^{-1} \frac{\partial}{\partial R} + R^{-2} B, \quad [122]$$

y el operador  $B$ , como anteriormente el [94].

Utilizaremos el mismo valor de  $\varphi$  empleado para la ecuación de Laplace, [92],  $\varphi = +R^{-1}$ . El operador  $N$  será, en este caso, el siguiente:

$$R^4 \frac{\partial^2}{\partial R^2} + R^2 B. \quad [123]$$

Aplicando de nuevo a [122] el operador  $L$ , se obtiene, después de simplificar:

$$L^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial R^4} + 4R^{-1} \frac{\partial^3 F}{\partial R^3} + 2R^{-4} B F + 2R^{-2} B \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + R^{-4} B^2 F. \quad [124]$$

Tomando  $\psi = R^{-1}$ , se tendrá:

$$N(ER^{-1}) = 2RF - 2R^2 \frac{\partial F}{\partial R} + R^3 \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + RBF. \quad [125]$$

Y aplicando de nuevo aquí el operador  $N$  [123], tendremos:

$$N^2(FR^{-1}) = R^7 \frac{\partial^4 F}{\partial R^4} + 4R^6 \frac{\partial^3 F}{\partial R^3} + 2R^3 BF + 2R^5 B \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + R^3 B^2 F. \quad [126]$$

Tendremos, pues, la identidad siguiente (1):

$$R^7 L^2 F \equiv N^2(FR^{-1}). \quad [127]$$

Así, pues, si  $F_1(R, \theta, \psi)$  es una solución de la ecuación [117], también será solución:

$$F_2(R, \theta, \psi) = R F_1(R, \theta, \psi). \quad [124]$$

También a las ecuaciones de la forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right) = 0, \quad [125]$$

se les puede aplicar este método, ya que, como vimos, la ecuación [98] puede, lo mismo que la de Laplace, reducirse a una del tipo [91].

Es evidente que, conforme el orden de la ecuación sea más elevado, será más difícil que la ecuación admita una identidad de la forma impuesta, aunque, como acabamos de ver, ésta puede encontrarse, incluso, en ecuaciones de cuarto orden.

(1) Ver REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, mayo 1952. La deducción de la ecuación [127] que se encuentra allí para el caso en que la función  $F$  dependa sólo de  $R$  y  $\psi$ , es la misma que la presente, en que la función depende de las tres variables  $R$ ,  $\psi$  y  $\theta$ .