

# LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,  
Ingeniero de Caminos.

*Continuando la exposición del método, deja el autor tratadas en este artículo las estructuras abiertas de múltiple grado de movilidad y planteado el estudio de las estructuras cerradas. Nuevos ábacos y gráficos facilitan el estudio de estas últimas.*

Estudiadas las estructuras en malla abierta de un sólo grado de movilidad bajo todas las posibles sollicitaciones, la extensión del método de cálculo al caso en que dichas estructuras tengan dos, tres o más posibilidades de movimiento, es bien sencilla.

Basta, por ejemplo, que al pórtico de las anteriores figuras le agreguemos una nueva barra,  $DE$ , para que esta estructura pase a tener una doble posibilidad de traslación de nudos (fig. 37-a), y hayan de ser dos los apoyos deslizantes con que es menester coartar el movimiento de la estructura (o, lo que es lo mismo, un único apoyo fijo), para impedir que sus nudos puedan experimentar traslaciones.

Inmovilizadas estas estructuras, las fórmulas de recurrencia iniciales (fórmulas [11], [12] y [14], o ábaco I) dan las rigideces, factores de transmisión y posición de puntos fijos, según recorramos la estructura partiendo de su extremo derecho (fig. 37-b) o de su extremo izquierdo (fig. 37-c). Con ello resulta inmediato el conocimiento del diagrama de momentos y de las deformaciones que en las estructuras *inmovilizadas* produce una causa exterior cualquiera; los ábacos anteriores nos dan los momentos realmente aparecidos en los extremos de la barra afectada por la carga, y los factores de transmisión nos van dando los que, como consecuencia, aparecen en las restantes barras.

Sea cualquiera la causa exterior que actúe sobre una de estas estructuras de movilidad múltiple, una vez obtenido el diagrama de momentos que esa causa produce en la estructura *inmovilizada*, basta la aplicación de las condiciones de la estática para que podamos deducir cuáles son los valores con que han estado reaccionando los diversos apoyos para impedir la traslación de los nudos.

Conocidos estos valores de las fuerzas, bastará con suprimirlas, aplicando para ello, en los nudos de fijación, otras iguales y opuestas.

Lo que, en general, ya no es tan sencillo, es el trabajo que esto último supone, tanto si se emplea el método de los puntos fijos como si se emplean los métodos de aproximaciones sucesivas, cuyo proceso es equivalente, pues para cada caso de carga habremos de resolver un sistema de tantas ecuaciones como grados de movilidad tenga la estructura. Para poder

llegar a este planteamiento es menester con estos métodos realizar, como veremos, un cierto trabajo previo. De aquí resulta que, como ya dijimos desde un principio, la conveniencia de su empleo dependerá de como sea la estructura, pues en muchos casos los

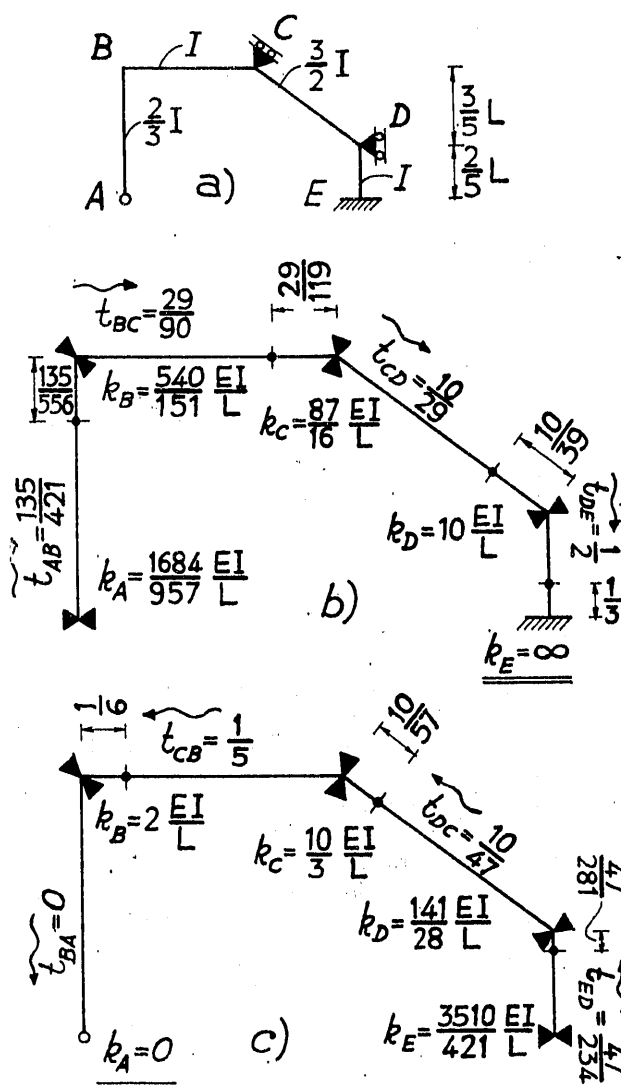


Fig. 37. — Estructura con doble grado de movilidad de nudos.

métodos generales de obtención de las reacciones hiperestáticas podrán resultar más rápidos y adecuados.

Todo esto puede comprobarse en el pórtico de la anterior figura. Adoptamos como sollicitación un par  $\mathcal{M}$  aplicado en el nudo  $B$  (fig. 38). Como siempre, la obtención del diagrama de los momentos flectores producidos en la estructura *inmovilizada*, es rápida e inmediata (fig. 38-a). Conocido el diagrama de momentos, las condiciones de la estática nos dan los valores de las fuerzas de inmovilización. (En este caso, los valores de las fuerzas  $F$  y  $Q$  de la figura 38-b.) Esta primera parte es siempre sencilla, sea cualquiera el número de nudos y de ramificaciones que tengan estas estructuras abiertas.

La segunda etapa: conocimiento de la acción de fuerzas aplicadas en los nudos, ya no es directa dada la simultaneidad de acción de las fuerzas de fijación. Su estudio hay que abordarlo permitiendo sucesivamente la movilidad de cada uno de los nudos en que

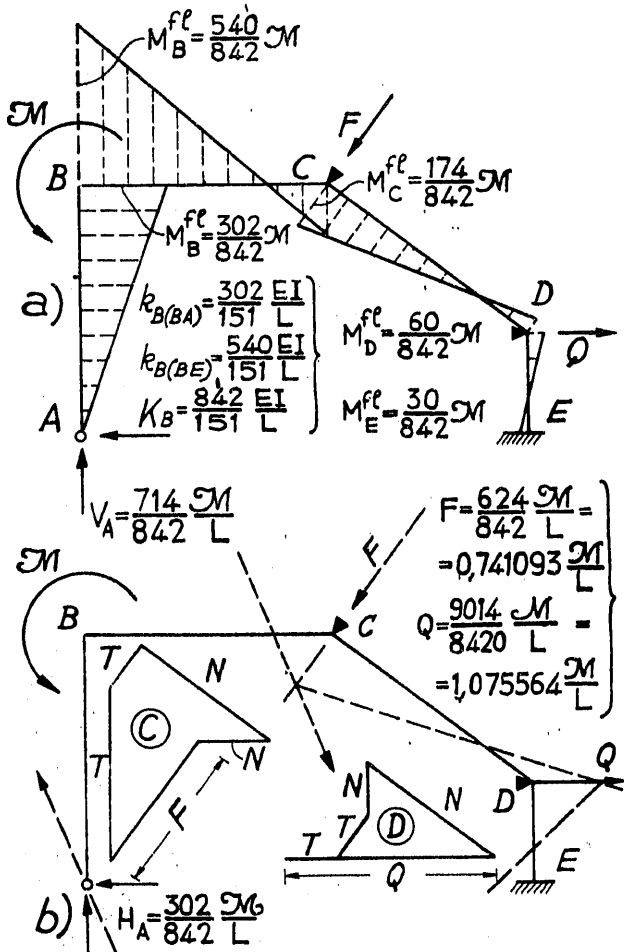


Fig. 38. — En a), obtención del diagrama de momentos que, en la estructura inmovilizada, produce un cierto caso de carga. En b), deducción, mediante condiciones de la estática, de los valores de las fuerzas que provisionalmente han inmovilizado la estructura.

estas fuerzas venían aplicadas y manteniendo, entre tanto, inmóviles, todos los restantes apoyos de fija-

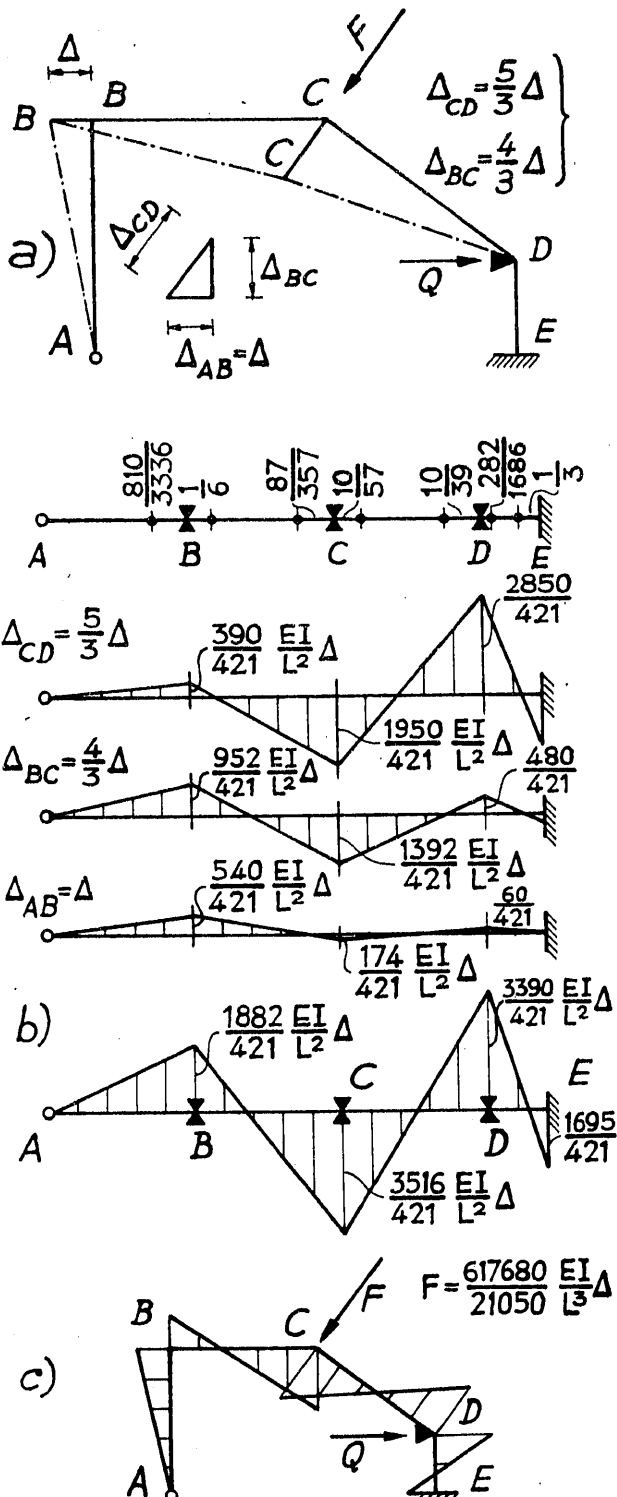


Fig. 39. — Mantenido el apoyo provisional  $D$ , se aplica una fuerza  $F$  en el nudo  $C$ . En a), determinación de los desplazamientos relativos. En b), ídem del diagrama de momentos, y en c), deducción del valor de la fuerza aplicada.

ción. Es decir, planteando tantos estados de un solo grado de movilidad como fuerzas de fijación hubieron de introducirse inicialmente.

Así, en la estructura de este ejemplo deberán de ser estudiados los dos casos representados en las figuras 39 y 40. En la primera de ellas, la supresión del apoyo deslizando aplicado en C, conservando el apoyo aplicado en D, permite estudiar el efecto de una fuerza  $F$  actuando en dicho nudo C. Para ello,

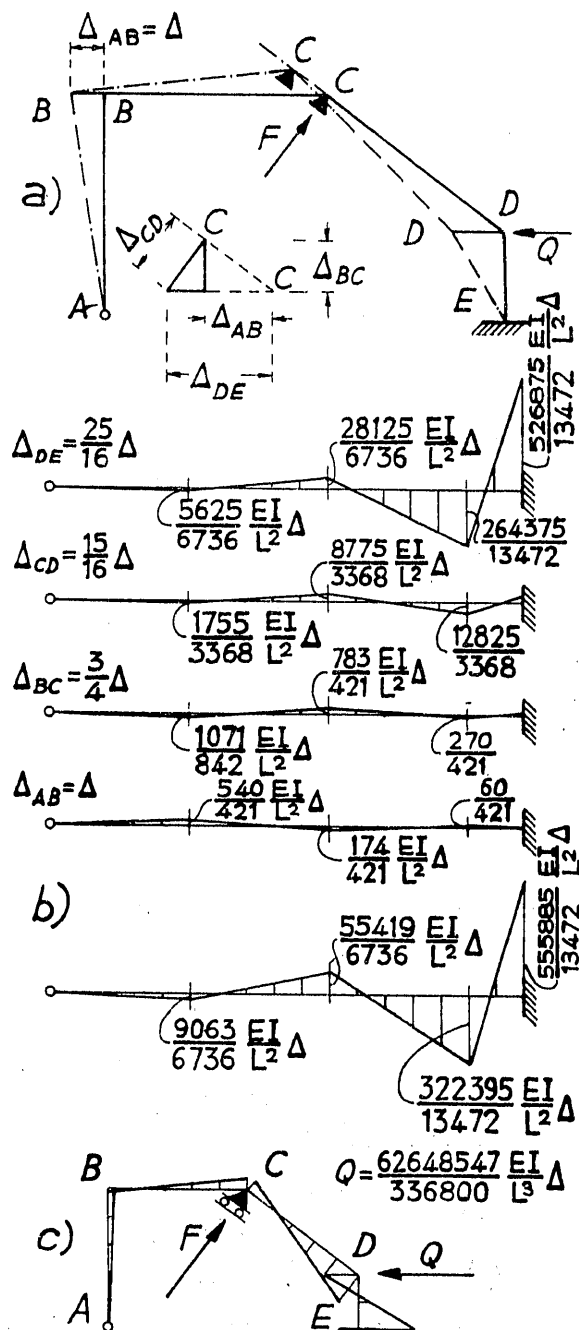


Fig. 40. — Mantenido el apoyo provisional C, se aplica una fuerza  $Q$  en el nudo D.

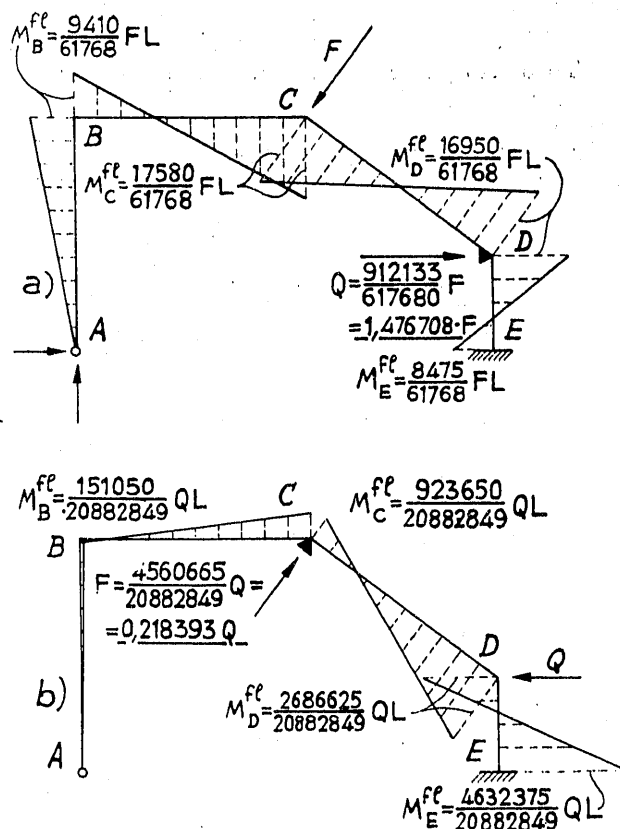


Fig. 41. — Estados particulares de traslación a superponer con los diagramas correspondientes a los diversos casos de carga actuando sobre la estructura inmovilizada.

al igual que vimos anteriormente, se obtendrán las relaciones de los recorridos normales relativos entre los extremos de las diversas barras (fig. 39-a), y valorados éstos en función de uno cualquiera de ellos, la expresión [40] o el ábaco XI nos va dando los diagramas de momentos flectores (fig. 39-b). De este diagrama se deduce (fig. 39-c), en función de dicho recorrido  $\Delta$ , el valor de la fuerza  $F$  capaz de producir las traslaciones de nudos supuestas.

Idéntico estudio ha de repetirse (fig. 40) cuando es el movimiento del nudo D el que permitimos; obtenida la nueva relación entre traslaciones normales relativas entre extremos de barras, el conocimiento de los puntos fijos nos va dando los diagramas de momentos flectores, del que se deduce el valor de la fuerza  $Q$  capaz de producirlos.

Estos diagramas 39-c) y 40-c), vienen dados en función de las traslaciones, y pueden ser utilizados en esta forma. Pero, para mayor claridad, hemos pasado de ellos a los representados en la figura 41, en que los momentos vienen expresados en función de las fuerzas que los provocan,  $F$  y  $Q$ , respectivamente, y en los que también se han deducido, en cada caso, los valores de las reacciones de los apoyos no suprimidos.

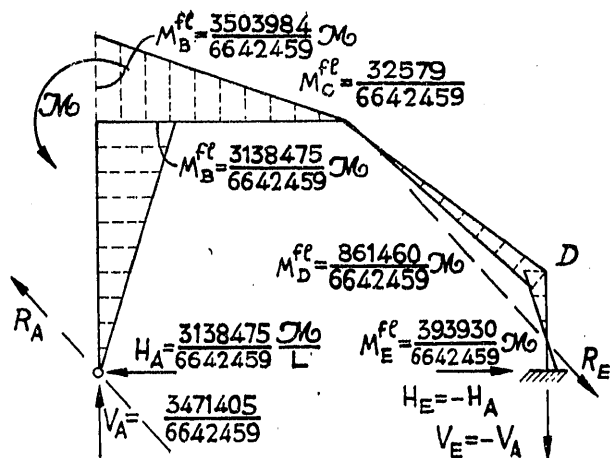


Fig. 42.—Diagrama definitivo de los momentos y esfuerzos producidos por el caso de carga estudiado.

La resolución del problema consistirá, pues, en la superposición del diagrama de la figura 38, más  $m$  veces el 41-a) y  $n$  veces el diagrama 41-b). Estos coeficientes numéricos  $m$  y  $n$  han de ser tales que se anulen las fuerzas de fijación que hubieron de introducirse en el diagrama 38 inicial. Ello nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$0,741093 + m + n \, 0,218393 = 0,$$

$$1,075564 + m \, 1,476708 + n = 0,$$

cuya solución es:

$$m = 0,748875, \quad n = 0,035175.$$

Conocidos estos coeficientes, la superposición indicada nos da el estado real buscado que se representa en la figura 42.

\* \* \*

El estudio acabado de hacer, aparte de su finalidad de poner de manifiesto el modo de operar en estructuras abiertas de movilidad múltiple, constituye un ejemplo típico de los casos en los que los métodos generales (Culmann, Bresse, Castigliano), resultan de más ventajoso empleo. Cualquiera de estos últimos métodos nos resuelve el problema elástico por determinación de las reacciones hiperestáticas. En el caso presente, en el que el pórtico tiene solamente dos hiperestáticas, todos ellos nos conducen al mismo sistema de dos ecuaciones lineales con mucho menor trabajo que el que ha tenido que invertirse con el método de los puntos fijos, o con los de aproximaciones sucesivas, para llegar asimismo a un sistema equivalente (1).

(1) También sería mayor el trabajo que resultaría necesario si se emplease el método de las deformaciones. Con este método, las incógnitas a determinar son cinco: tres "giros de nudo" y dos "giros de barra". Es decir, cada caso de carga nos conduciría a un sistema de cinco ecuaciones.

Disponiendo los cálculos con un mínimo de cuidado, una buena parte del trabajo necesario con estos métodos generales es aprovechable en todos los casos de carga a estudiar. En la figura 43 se recoge el esquema de la marcha de cálculo que siguen estos métodos: los movimientos que en el extremo liberado producirían las reacciones incógnitas (figs. 43-a) y b)), y los que en ese extremo liberado produce la carga (fig. 43-c)), vienen dados, explícita y directamente, bien por los teoremas de Culmann o por las expresiones:

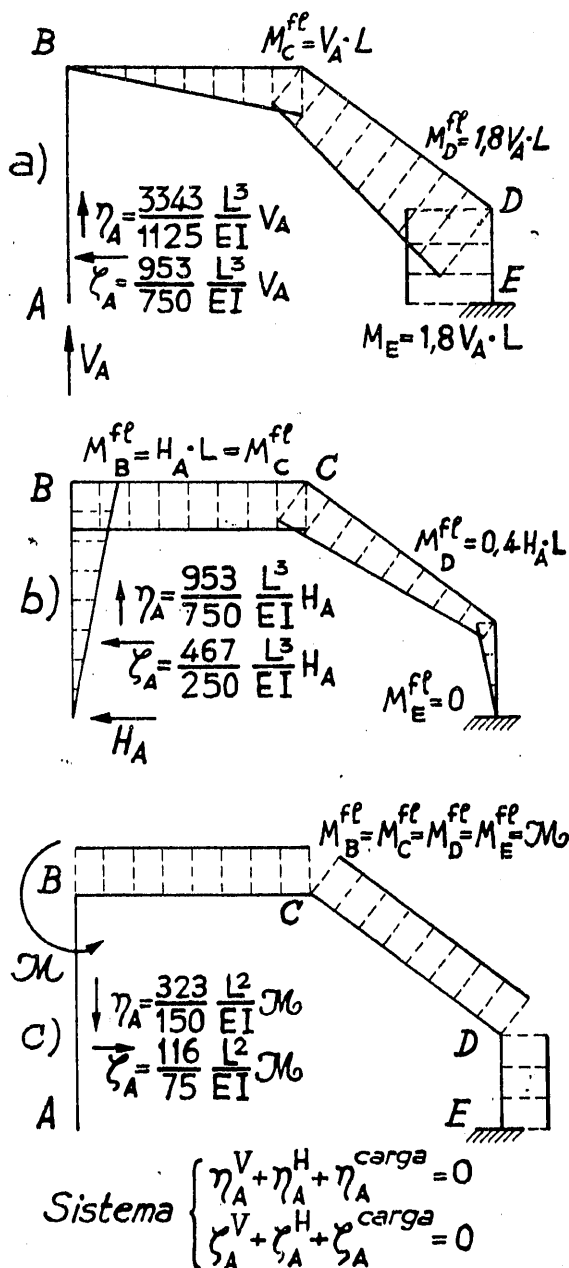


Fig. 43.—El caso anterior estudiado mediante cualquiera de los métodos generales (Culmann, Bresse, Castigliano).

siones de deformación de Bresse, e indirectamente por el teorema de Castigliano (1). Las condiciones de sustentación de dicho extremo de la estructura equivalen a la condición de que las sumas algébricas de los recorridos del extremo hayan de ser nulas. (En el caso más general, de empotramiento y sustentación elásticas, serán tres las ecuaciones lineales con las que quedarán expresadas las condiciones de sustentación.)

En casos como el presente, el planteamiento de las ecuaciones será siempre más breve que el proceso previo a que obligan los métodos particulares, y tanto más ventajoso resultará el empleo de esos métodos generales cuanto mayor sea el número de piezas que constituyan el pórtico poligonal, y mayor, por tanto, la movilidad de nudos.

Ventaja que disminuirá a medida que la estructura tenga mayor grado de hiperestaticidad, y en una estructura de malla abierta como la representada en la figura 44, volverían a ser más convenientes los métodos particulares. Esta estructura, que en los métodos generales presenta once hiperestáticas, daría lugar, en el método de las deformaciones, a sistemas con seis giros de nudo y dos giros de barra.

Con el de puntos fijos, o el de aproximaciones sucesivas, se reduce, mediante el estudio previo de cada una de las dos posibilidades independientes de movilidad que presenta, a la resolución de sistemas con sólo dos incógnitas. Entre estos dos últimos métodos, la elección dependerá, como siempre, del grado

(1) En la literatura técnica germana y sajona es frecuente ver aplicado el teorema de Castigliano en la forma

$$\delta = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds = \int_0^l \frac{M \cdot M'_F}{EI} ds,$$

en la que:

$\delta$  = recorrido debido a la causa  $F$ .

$M$  = ley de momentos flectores debidos no solamente a  $F$ , sino también a todas las demás causas actuantes.

$$M'_F = \frac{\partial M}{\partial F},$$

y con esta forma, la expresión del recorrido aparece también directa y explícita.

A esta derivada parcial  $M'_F$  se la identifica en esos textos como la expresión de los momentos que produciría una causa,  $F$ , de valor unidad, y el integrando  $\frac{M \cdot M'_F}{EI}$  se dice

que es  $\frac{1}{EI}$  veces el producto de los momentos reales por los momentos debidos a la causa unidad ("we have to integrate along the length of the beam the product of the actual bending moment with the corresponding unit-load bending moment"). Buena receta para que, al no resultar ni siquiera homogénea la expresión, quede desconcertado el lector e ignorante, además, de que esa expresión del recorrido es exactamente la del primero de los sumandos de las expresiones de Bresse (1854). Es decir, la expresión dada ya por Navier en 1826, partiendo a su vez de la integración, hecha en 1744 por Euler, de la ecuación fundamental de J. Bernoulli: la curvatura en cada punto de una barra elástica es proporcional al momento flector de dicho punto.

de conocimiento que de esta estructura sea necesario alcanzar.

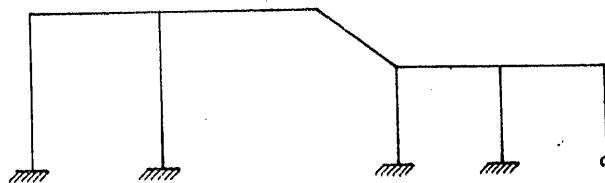


Figura 44.

Se dirá que no puede ser más imprecisa esta estimación de los casos en que cada método ofrece mayores ventajas. Desgraciada, o quizás afortunadamente, la cuestión es así, hoy por hoy, de indeterminada y vana la presentación de ninguno de los métodos como panacea capaz de resolver sencillamente todo.

El cálculo de estructuras continúa siendo un problema previo de elección del grupo más adecuado de incógnitas y una posterior aplicación del método que opera con tales incógnitas.

## V

Hemos venido haciendo hasta aquí aplicación del método de los puntos fijos al caso de estructuras en malla abierta. Suprimir esta limitación y examinar las ventajas que este método ofrece en el estudio de estructuras de malla cerrada respecto a los métodos de aproximaciones sucesivas, es el objeto de lo que sigue.

La posición de los "puntos fijos" ha desempeñado, en el curso de nuestra exposición, un papel secundario: el de instrumento auxiliar para el estudio directo de las barras cargadas y de las barras desniveladas por efectos de asiento o de temperatura y retracción. Y se ha operado realmente con las rigideces.

En una estructura en malla abierta, la rigidez del extremo de una barra concurrente en un nudo cualquiera (relación del par aplicado en dicho extremo al ángulo girado por dicha sección) es fácilmente obtenible, pues la estructura queda seccionada de modo que ese momento aplicado queda transmitido y repartido en una sola región de la misma, en tanto que el resto de la estructura no recibe sollicitación ninguna. (Al recorrer desde las sustentaciones el camino inverso, es decir, partiendo de la rigidez que tenga cada uno de los extremos de esa región de la estructura y caminando hacia dicha sección, es como se obtenía el valor exacto y real de dicha rigidez.)

En estructuras en malla cerrada, el seccionamiento de una barra no produce esa radical separación de la estructura y el momento aplicado en el borde de esa sección se transmite a toda la estructura. Si partimos de las sustentaciones, son ahora varios los

caminos que simultáneamente encontramos para llegar a dicha sección, y precisamente nos sería necesario conocer las rigideces para llegar a ella con el momento y deformación exactos.

¿Cómo resuelve el método de puntos fijos esta dificultad? Adelantemos que mediante tanteos de una convergencia rapidísima que conduce a tal aproximación, que en los casos normales basta con el segundo tanteo. (Pudiéramos decir, con igual razón que la que se invoca al tratar de los métodos de aproxima-

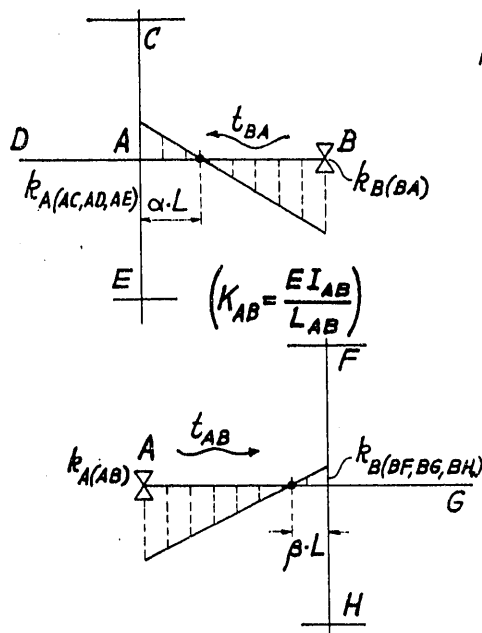


Fig. 45. — Valores característicos expresados en función de las abscisas unitarias de los focos.

ciones sucesivas, que basta con operar reiteradamente para que, teóricamente, la exactitud sea tan grande como se quiera y, por tanto, que es también un método *exacto*. No pretendamos obtener esa calificación de *exactitud* en este caso de estructuras con mallas cerradas, en el que, al operar con los métodos de aproximaciones sucesivas, nunca se distribuye, en la práctica, un momento o un giro a más allá de dos barras de distancia. Digamos, pues, que el método de los puntos fijos es, en estas estructuras, un método *aproximado* que nos conduce al mismo grado de aproximación más rápida y sencillamente que esos *distribution methods*.)

Para realizar los citados tanteos puede resultar más cómodo, a veces, fijar *a priori*, en vez de las rigideces, la posición de los puntos fijos desconocidos (1) que, al hacer el recorrido antes citado, nos vayan apareciendo como necesarios para poder proseguir la determinación de los valores característicos.

(1) Basta con fijarlos a sentimiento, vistas las rigideces de las restantes barras concurrentes. Las curvas de las figuras 49, 51 y 52, facilitan estas determinaciones.

Como reiteradamente quedó indicado, tanto da conocer la rigidez del empotramiento  $k_A$  del extremo A de una barra, como conocer el factor de transmisión  $t_{BA}$ , como la distancia focal  $\alpha$  (fig. 45).

Interesa ahora, en que estas abscisas unitarias pueden desempeñar un mayor papel como herramienta de cálculo, expresar la rigidez del empotramiento, el factor de transmisión y la rigidez del otro extremo de la barra, en función exclusiva de la distancia focal unitaria y de la rigidez propia conocida de la

$$k_{A(AC,AD,AE)} = k_{AC} + k_{AD} + k_{AE}$$

$$k_{A(AC,AD,AE)} = \frac{6\alpha}{1-3\alpha} K_{AB} \quad [41-bis]$$

$$t_{BA} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad [42-bis]$$

$$k_{B(BA)} = \frac{6(1-\alpha)}{2-3\alpha} K_{AB} \quad [43-bis]$$

$$k_{B(BF,BG,BH)} = k_{BF} + k_{BG} + k_{BH}$$

$$k_{B(BF,BG,BH)} = \frac{6\beta}{1-3\beta} K_{AB} \quad [41]$$

$$t_{AB} = \frac{\beta}{1-\beta} \quad [42]$$

$$k_{A(AB)} = \frac{6(1-\beta)}{2-3\beta} K_{AB} \quad [43]$$

barra AB. De las ecuaciones [11 bis], [12 bis] y [14 bis], se deduce:

$$k_A = \frac{6\alpha}{1-3\alpha} K_{AB}; \quad [41 \text{ bis}]$$

$$t_{BA} = \frac{\alpha}{1-\alpha}; \quad [42 \text{ bis}]$$

$$k_{B(BA)} = \frac{6(1-\alpha)}{2-3\alpha} K_{AB}. \quad [43 \text{ bis}]$$

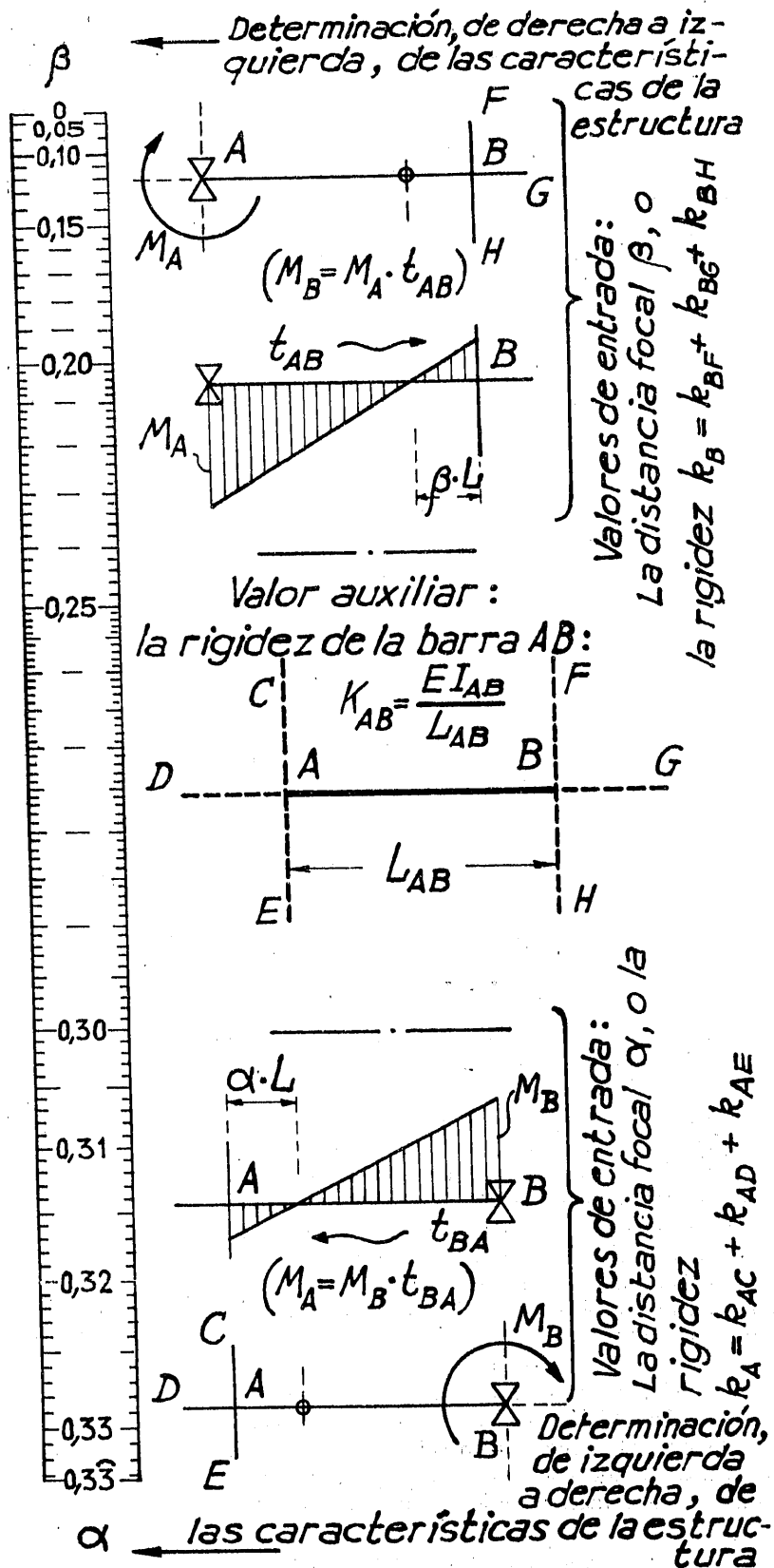
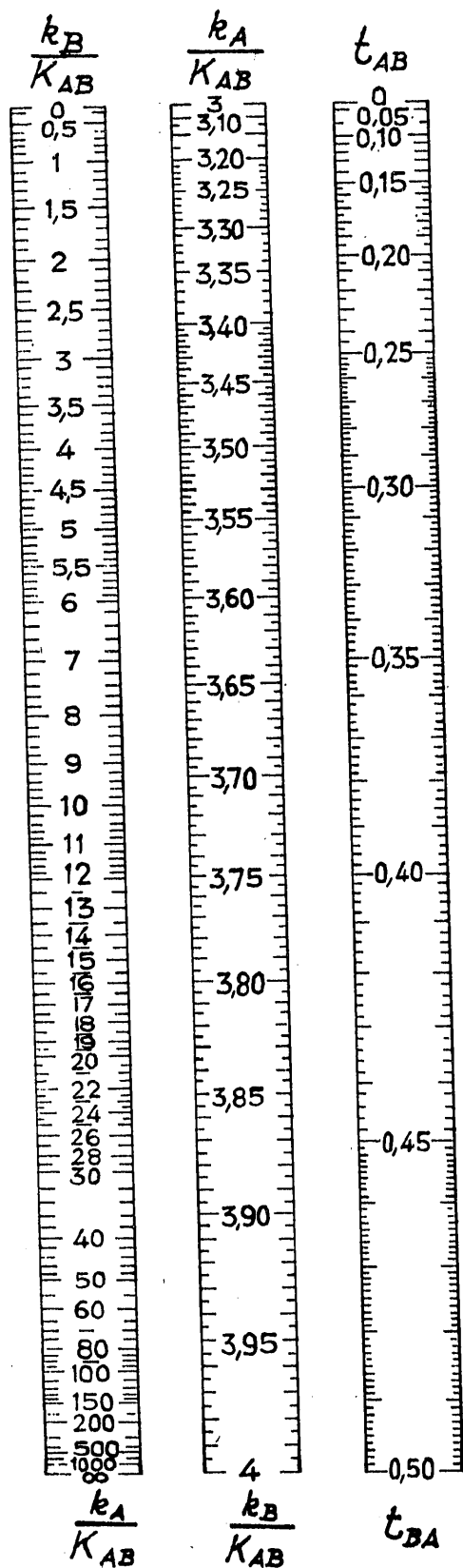
Análogamente, la distancia focal  $\beta$  nos define la rigidez del empotramiento  $k_B$ , el factor de transmisión  $t_{AB}$  y la rigidez del extremo  $k_A$ :

$$k_B = \frac{6\beta}{1-3\beta} K_{AB}; \quad [41]$$

$$t_{AB} = \frac{\beta}{1-\beta}; \quad [42]$$

$$k_{A(AB)} = \frac{6(1-\beta)}{2-3\beta} K_{AB}; \quad [43]$$

fórmulas y relaciones que recogemos en la adjunta figura 45.



Abaco XII para la determinación de los valores característicos en estructuras de malla múltiple.

El examen de todas estas fórmulas ya nos indica que, en cuanto en una de estas estructuras en malla cerrada hayamos ido acotando las abscisas de los puntos fijos, habrá quedado esta estructura preparada para recibir cualquier solicitación, cuyo efecto directo sobre la barra cargada podremos tomarlo de los ábacos dados anteriormente, y cuya distribución y transmisión al resto de la estructura es también directa y definitiva.

(Examinando esa figura 45 vemos que, por ejemplo, conocidas las dos abscisas focales  $\alpha$  y  $\beta$  de una barra, queda también conocida la rigidez total  $K_A$  y  $K_B$  de los dos nudos de los que dicha barra forma parte.

La rigidez total del nudo  $A$ , suma de las rigideces de todos los extremos de barras que en él concurren, será:

$$K_A = k_{A(B)} + k_{A(C, A, D, A, E)} = \left\{ \frac{6(1-\beta)}{2-3\beta} + \frac{6\alpha}{1-3\alpha} \right\} K_{AB} \quad [44]$$

y análogamente:

$$K_B = k_{B(A)} + k_{B(F, B, G, B, H)} = \left\{ \frac{6(1-\alpha)}{2-3\alpha} + \frac{6\beta}{1-3\beta} \right\} K_{AB} \quad [45]$$

La aplicación de esta ecuación [44] a las diversas barras  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ , concurrentes en un mismo nudo  $A$ , han de darnos el mismo valor  $K_A$  de la rigidez total de este nudo, lo que podrá servir como prueba de los valores obtenidos para las abscisas de los puntos fijos de las diversas barras.)

El lector encontrará facilitado el empleo de todas estas fórmulas, mediante el adjunto ábaco XII con el que podrá leer, con suficiente aproximación para la práctica usual, los coeficientes numéricos de todas esas expresiones [41] a [45] (I).

\* \* \*

Hemos recordado, de pasada, que en estas estructuras en malla cerrada es práctica general no llevar las propagaciones de momentos a más allá de dos barras a partir de los extremos de la barra en la que incide la carga, evitando así volver a recorrer ésta.

(I) Señalemos, por el momento, la total identidad entre el ábaco I dado inicialmente y el presente ábaco XII (su diferencia estriba solamente en las escalas-base adoptadas en su trazado, a fin de facilitar la lectura en las zonas que, en estructuras cerradas, serán de más frecuente empleo).

Uno y otro, aunque los valores de entrada sean diversos, no son más que la expresión de las relaciones genéricas dadas directamente por la figura 2.<sup>a</sup>. Según se acentúen y destaquen unas u otras relaciones, como proponen unos u otros autores, se llega a tres tipos de método de cálculo, artificialmente diferenciados.

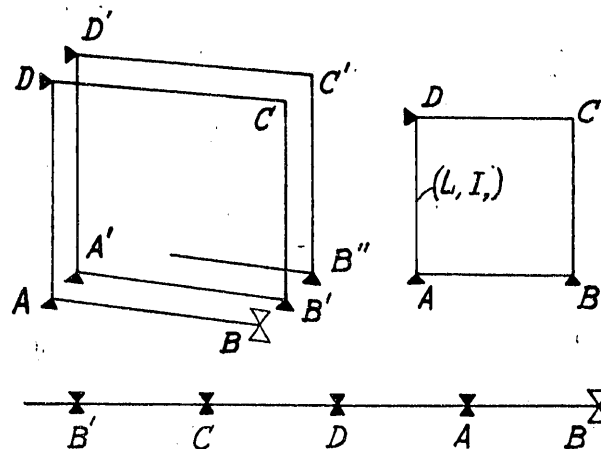


Fig. 46. — Estudio de la célula simple.

Una estimación del error al que esta misma simplificación conduce en la determinación de los diversos elementos  $k$ ,  $\alpha$  y  $t$ , puede darlo el estudio de la célula cerrada simple, en la que, al faltar la disipación por distribución en otras células o elementos, ha de resultar más acusada esta cesación prematura de la propagación: una célula cerrada como la representada en la figura 46, de barras de igual longitud e inercia, en nada se diferencia, a estos efectos, del caso representado en la figura 5.<sup>a</sup> (viga continua indefinida de tramos iguales), y los valores allí obtenidos sirven para ver el error cometido. Por ejemplo, para la rigidez  $k_{B(A)}$  (fig. 46), se obtendrán los siguientes valores, según el número de tramos considerados y según el tipo de sustentación del elemento extremo:

| Número de tramos considerado | Rigidez cuando el extremo final está |                  | Error en % del valor exacto |            |
|------------------------------|--------------------------------------|------------------|-----------------------------|------------|
|                              | empotrado                            | articulado       | empotrado                   | articulado |
| 1                            | $4 \frac{EI}{L}$                     | $3 \frac{EI}{L}$ | + 15,47                     | - 13,40    |
| 2                            | 3,5                                  | 3,4286           | + 1,04                      | - 1,02     |
| 3                            | 3,4666                               | 3,4615           | + 0,07                      | - 0,07     |
| 4                            | 3,4643                               | 3,4639           | + 0,01                      | - 0,01     |
| ...                          | ...                                  | ...              | ...                         | ...        |
| $\infty$                     | 3,4641                               |                  | 0                           |            |

Es decir, el error es ya tan sólo de un uno por ciento, en cuanto consideramos dos vanos; baja a menos del uno por mil, al considerar tres, y a sólo un uno por diez mil, al considerar cuatro vanos.

Si, en vez de la rigidez, lo que se estudia es la abscisa unitaria  $\alpha$  o el factor de transmisión  $t_{BA}$ , se comprueba que basta con que sean tres los vanos que sustituyan a esa viga de tramos indefinidos, para que los errores resulten menores de cinco milésimas.



en uno u otro sentido, según hayamos considerado para ese tercer vano las dos sustentaciones extremas de empotramiento o apoyo perfectos.

Notemos, además, que si en vez de partir de estas sustentaciones extremas, a las que corresponden las rigideces iniciales  $4EI/L$  y  $3EI/L$ , respectivamente, partimos de un cierto empotramiento intermedio, al que corresponda el valor  $3,5EI/L$ , nos basta con sólo dos vanos para alcanzar ese grado de aproximación. (Es decir, en el caso de la figura 46, nos hubiera bastado con tomar en el empotramiento elástico  $D$ , de la barra  $AD$ , ese valor medio  $3,5EI/L$ ).

La rápida convergencia hacia los valores exactos, que el ejemplo de la figura 5.<sup>a</sup> ha servido para poner de manifiesto, justifica la serie de expresiones aproximadas que, formuladas a continuación para casos particulares de estructuras múltiples, resultan asimismo aplicables a los casos corrientes de estructuras de edificación.

La estructura de la figura 47 está constituida por pilares de igual altura  $h$  e inercia constante  $I_h$ , y vigas de luz  $v$  e inercia  $I_v$ , también constantes.

La rigidez de los pilares y de las vigas las expresaremos del modo simplificado siguiente:

$$K_{\text{viga}} = \frac{EI_v}{v} = E \cdot V. \quad \left( V = \frac{I_v}{v} \right);$$

$$K_{\text{pilar}} = \frac{EI_h}{h} = E \cdot H. \quad \left( H = \frac{I_h}{h} \right),$$

y la relación entre las rigideces de viga y pilar la denominaremos:

$$x = \frac{K_{\text{viga}}}{K_{\text{pilar}}} = \frac{V}{H}. \quad [46]$$

La sustentación real de una viga intermedia,  $AB$ , de esta estructura podrá asimilarse a la sustentación representada en la figura 48, y con ello considerarla como formando parte de una estructura en malla abierta, cuyos elementos característicos sabemos de-

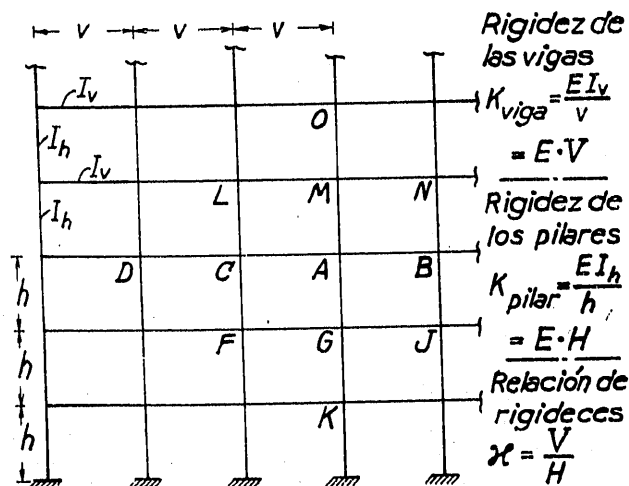


Figura 47.

terminar. Por ejemplo, la rigidez de los nudos  $M$  y  $G$  tiene por valor:

$$k_{M(M,L,M,O,M,N)} = \frac{4EI_v}{v} + \frac{4EI_h}{h} + \frac{4EI_v}{v} = 4E(H + 2V),$$

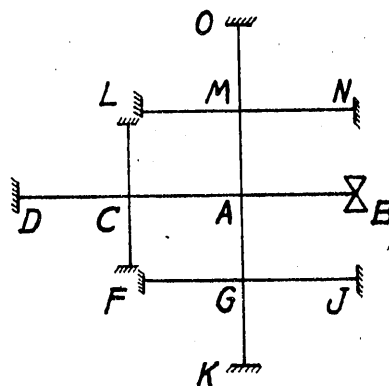


Fig. 48 — Estructura parcial en malla abierta.

y la del extremo de la barra  $AM$  (ver expresión [8]):

$$k_{A(AM)} = 4EH \frac{3 + \frac{4(H+2V)}{H}}{4 + \frac{4(H+2V)}{H}} = \frac{7H+8V}{2H+2V} EH = E \frac{7+8x}{2(1+x)} H.$$

Para la rigidez del extremo  $A$  de la barra  $AC$  tendremos, análogamente:

$$k_{A(AC)} = \frac{8H+7V}{2H+2V} EV = E \frac{8+7x}{2(1+x)} V,$$

resultando en definitiva, como valor de la rigidez de la sustentación donde empotra la barra  $AB$ , la expresión:

$$k_{A(AM,AC,AG)} = E \frac{14H^2 + 24HV + 7V^2}{2(H+V)} = E \frac{14 + 24x + 7x^2}{2(1+x)} H; \quad [47]$$

como distancia focal  $\alpha$  de esta barra  $AB$ , la expresión:

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{14H^2 + 24HV + 7V^2}{14H^2 + 28HV + 11V^2} = \frac{1}{3} \frac{14 + 24x + 7x^2}{14 + 28x + 11x^2}; \quad [48]$$

como factor de transmisión  $t_{BA}$ :

$$t_{BA} = \frac{1}{2} \frac{14H^2 + 24HV + 7V^2}{14H^2 + 30HV + 13V^2} = \frac{1}{2} \frac{14 + 24x + 7x^2}{14 + 30x + 13x^2}; \quad [49]$$

y, finalmente, como rigidez del extremo  $B$  de la barra  $BA$ :

$$k_{B(AB)} = 4E \frac{14H^2 + 30HV + 13V^2}{14H^3 + 32HV + 15V^2} V =$$

$$= 4E \frac{14 + 30x + 13x^2}{14 + 32x + 15x^2} V. \quad [50]$$

El orden de exactitud proporcionado por estas fórmulas puede contrastarse comparando los valores dados por ellos con los valores exactos deducidos para el caso particular de igualdad de rigideces (es decir,  $V = H$ , o sea  $x = 1$ ) (1).

Para facilitar el empleo de estas expresiones [48], [49] y [50], se ha preparado el gráfico de la figura 49. El esquema que acompaña esta figura representa la determinación de los valores  $\beta$ ,  $t_{AB}$  y  $k_A$ , correspondientes a una viga. (El mismo gráfico da también los valores correspondientes a una columna,

(1) Estos valores exactos tienen por expresión:

$$\alpha = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}; \quad t = 4 - \sqrt{13}$$

y la rigidez de extremo de barras:

$$k = \frac{2(2 + \sqrt{13})}{3} K_{\text{barra}}.$$

sin más que sustituir  $V$  por  $H$  y entrar con un valor  $\frac{1}{x} = \frac{H}{V}$  en vez de entrar con el valor  $x = \frac{V}{H}$ .

Se aprecia en este gráfico la pequeña excursión que experimentan los valores de  $\beta$ ,  $t$  y  $k$ , aun para relaciones  $x$  muy distintas, es decir, aun para relaciones entre las rigideces de las vigas y de las columnas muy diversas. En la práctica, el valor de entrada  $x$  se mueve en la zona media de la escala de abscisas, y, por tanto, la variación de dichos valores es todavía menor.

A esto se debe el que tales fórmulas, deducidas para una estructura tan particular como la de la figura 47, conserven su carácter de aproximadas en los casos prácticos en los que las vigas, y más aún las columnas, tendrán distintas rigideces: al determinar las características de la barra  $AB$ , por ejemplo, bastará tomar como valor  $H$  la media aritmética de las rigideces de las dos columnas concurrentes en el nudo  $B$ .

Si se trata de una viga intermedia del piso de azotea, puede asimilarse su sustentación a la que le correspondería como dintel de un pórtico indefinido constituido por vigas de igual rigidez,  $EV$ , y pilares de igual rigidez,  $EH$  (fig. 50). Es éste un caso en que resultan sencillas las expresiones exactas de los va-

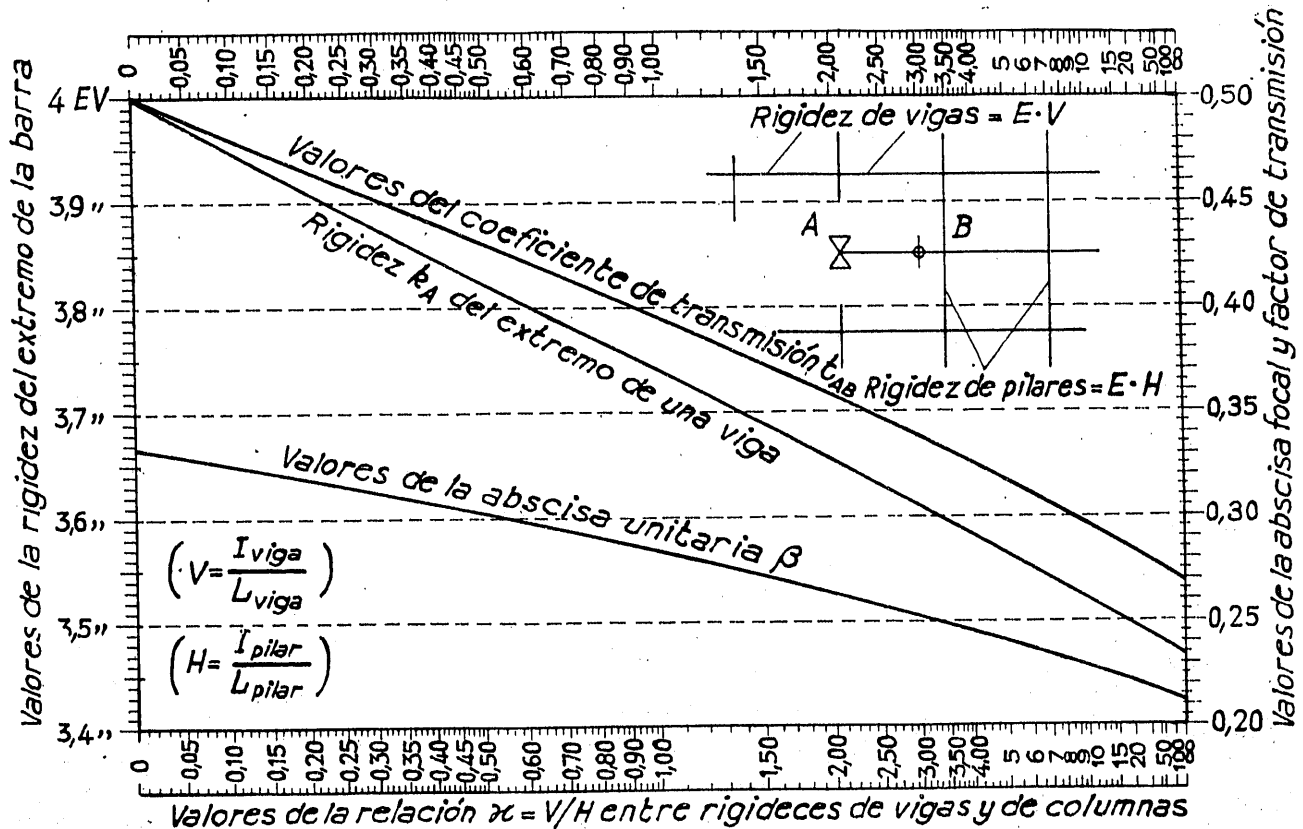


Fig. 49. — Características de la sustentación elástica de una viga intermedia perteneciente a una estructura indefinida de mallas múltiples.

lores característicos. Si los pies de los pilares se suponen perfectamente empotrados, la viga queda

caracterizada por:

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{\frac{1+3z}{1+z}}}{6}; \quad [51]$$

$$t_{BA} = \frac{3 - \sqrt{\frac{1+3z}{1+z}}}{3 + \sqrt{\frac{1+3z}{1+z}}}, \quad [52]$$

$$k_{B(BA)} = \frac{2 \left( 3 + \sqrt{\frac{1+3z}{1+z}} \right)}{1 + \sqrt{\frac{1+3z}{1+z}}} E V, \quad [53]$$

y el pilar caracterizado, a su vez, por:

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{(3 + \sqrt{z})z}{(1 + \sqrt{z}) + 2(3 + \sqrt{z})z}, \quad [54]$$

$$k_{C(CA)} = \frac{3(1 + \sqrt{z}) + 4(3 + \sqrt{z})z}{(1 + \sqrt{z}) + (3 + \sqrt{z})z} E H, \quad [55]$$

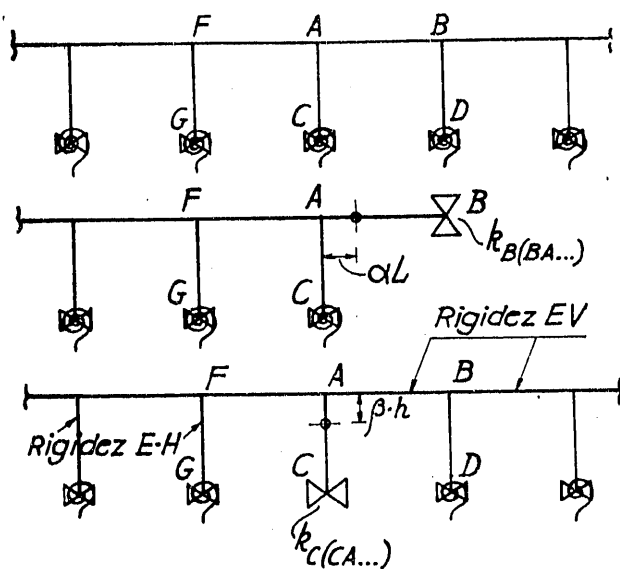


Fig. 50. — Asimilación de las vigas de cubierta al caso del pórtico uniforme indefinido.

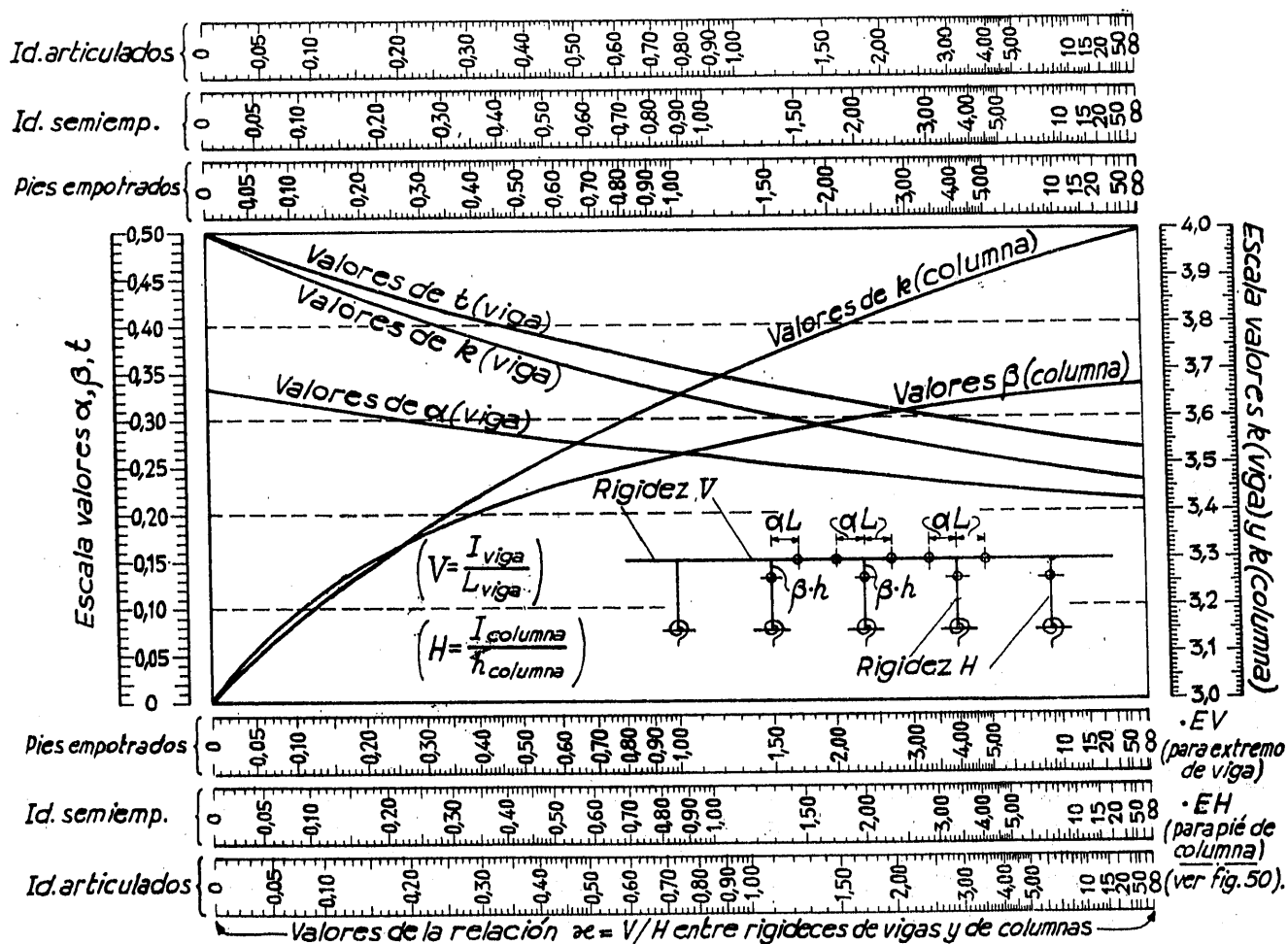


Fig. 51. — Determinación de las características del pórtico indefinido para diversas sustentaciones en la base de los pilares.

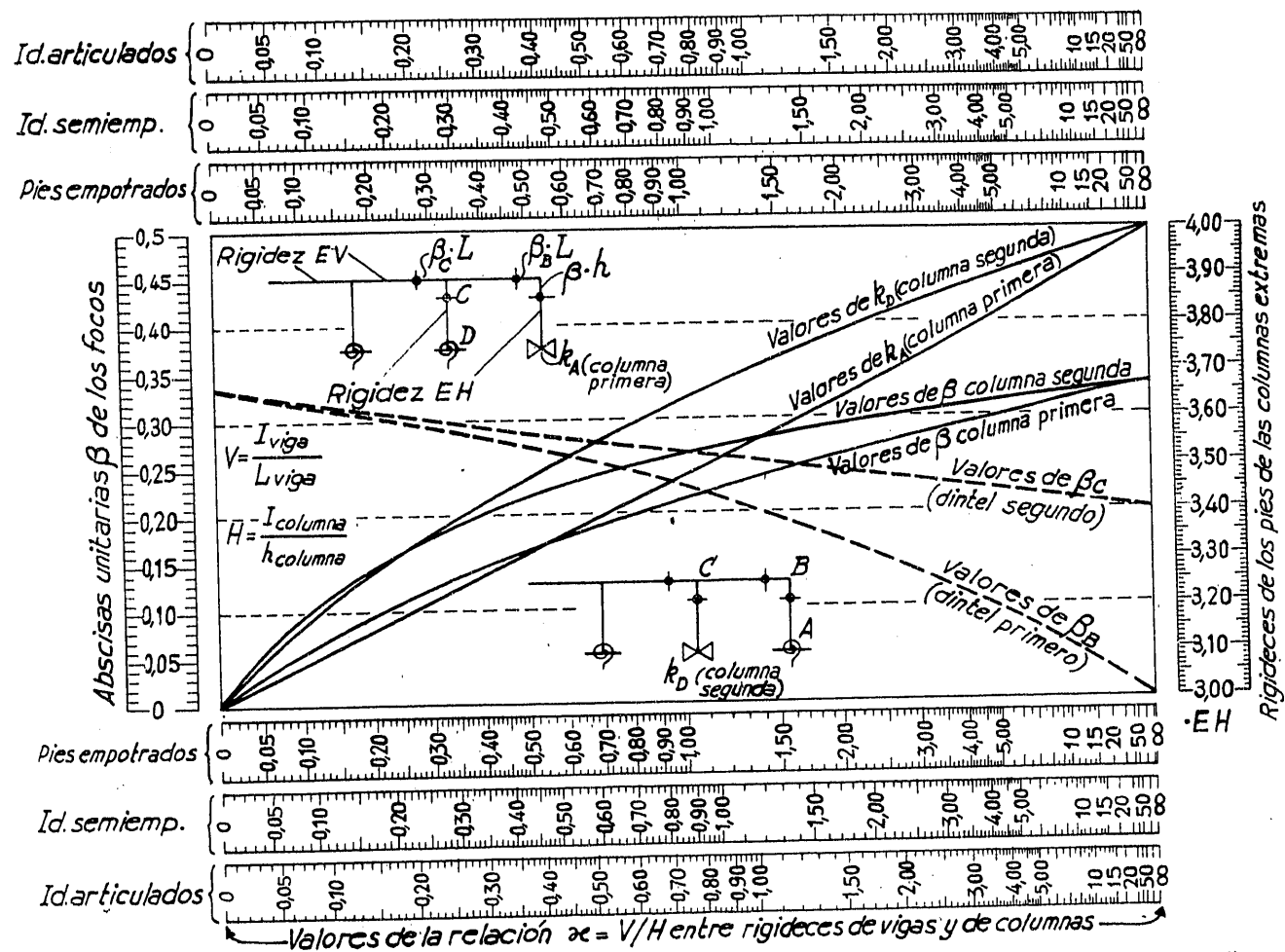


Fig. 52. — Determinación de las características de los pilares y dinteles extremos de un pórtico indefinido (para diversas sustentaciones en la base de los pilares del pórtico).

valores todos que pueden leerse en las curvas de la figura 51. Unas expresiones análogas corresponden al caso en que, en vez del empotramiento perfecto de los pilares, sea un semiempotramiento, o sea una articulación de sus pies la que se les suponga. También quedan recogidos los valores correspondientes a estas hipótesis por esa misma figura 51, mediante el artificio de una triple escala de abscisas: Con el valor  $\alpha = V/H$  entrando en la escalilla superior, se obtendrán los valores de  $\alpha$ ,  $t$ ,  $k_B$  y los de  $\beta$  y  $k_C$ , correspondientes al empotramiento perfecto de los pies de los pilares. Entrando con dicho valor de  $\alpha$  en la escala intermedia de abscisas, los mismos cinco valores correspondientes al semiempotramiento, y si se entra en la escala inferior los correspondientes al caso de articulación perfecta. Las diferencias son pequeñas, y en estructuras de edificación resultará más aproximada la primera de estas tres hipótesis.

(Estas mismas expresiones y la figura 51, son aplicables a las columnas exteriores y vigas que en ellas insertan, sin más que cambiar  $V$  por  $H$  y entrar con valores  $1/\alpha$  en vez del valor  $\alpha$ ).

Finalmente, la figura 52 recoge los datos corres-

pondientes a los pilares de esquina de última planta. Sus valores, cuando se parte del pórtico indefinido con pilares empotrados, son:

$$\beta = \frac{1}{3} \frac{(3 + \sqrt{\alpha}) \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha}) + (3 + \sqrt{\alpha}) \alpha}, \quad [56]$$

$$k_{A(B)} = 4 \frac{3(1 + \sqrt{\alpha}) + 2(3 + \sqrt{\alpha}) \alpha}{4(1 + \sqrt{\alpha}) + 2(3 + \sqrt{\alpha}) \alpha} EH, \quad [57]$$

y mediante el mismo artificio anterior, han quedado también representados en dicha figura 52 estos valores para los casos en que se considere este pilar como pilar extremo de un pórtico indefinido con pilares semiempotrados o con pilares articulados.

El mayor interés de todos estos gráficos y fórmulas es el de poner de evidencia lo estrecho de los límites entre los que, en estructuras normales de edificación, varían las condiciones de sustentación de las piezas, y cómo sin mayores cálculos pueden ser estimadas estas condiciones *a priori*.

(Continuará.)