

## ESTABILIDAD DE DOS CHIMENEAS DE EQUILIBRIO RESPECTIVAMENTE SOLIDARIAS A LAS GALERIAS DE LLEGADA Y DESAGÜE

Por L. ESCANDE, Ingeniero I. E. T., Director de E. N. S. E. H. T. y  
R. HURON, Director de Conferencias de la Facultad de Ciencias,  
Profesor de E. N. S. E. H. T.

*Presentan los ilustres autores un estudio teórico del problema planteado en el epigrafe, que, aplicado a diversos casos particulares, produce resultados que estudian y comentan satisfactoriamente.*

## Introducción.

La mayoría de las modernas centrales se alimentan mediante un canal de llegada, funcionando a presión y, por consiguiente, disponen de una chimenea de equilibrio situada en el origen de la conducción forzada. Algunas son subterráneas y su canal de desagüe puede, en ciertas condiciones, ponerse en carga: se prevé generalmente, en este caso, una chimenea de equilibrio a la salida de turbinas y en el origen del citado canal de desagüe.

En el presente estudio examinaremos las condiciones de estabilidad de la regulación de una turbina, funcionando entre dos chimeneas de equilibrio, colocadas, respectivamente, en el final del canal de llegada y en el origen del desagüe (fig. 1.<sup>a</sup>). Su-

pondremos dichas chimeneas de sección constante y del tipo corriente, sin estrangulamiento.

## CAPÍTULO I

### Planteamiento de las ecuaciones del problema.

*Símbolos.*

$l'_0$  = diferencia de cotas de niveles estáticos aguas arriba y abajo.

$P_{10}$ ,  $P_{20}$  = pérdidas de carga en las galerías de llegada ( $P_{10}$ ) y de desagüe ( $P_{20}$ ), para el caudal de régimen permanente considerado:  $Q_0$ .

$H_0$  = diferencia de cotas entre niveles de agua de las chimeneas de equilibrio, una vez establecido el régimen permanente de caudal  $Q_0$ .

$Z_1, X_1$  = cotas de nivel, aguas arriba, en el instante  $t$ , por encima del nivel estático ( $Z_1$ ) o dinámico, del régimen permanente ( $X_1 = Z_1 + P_{10}$ ) correspondiente.

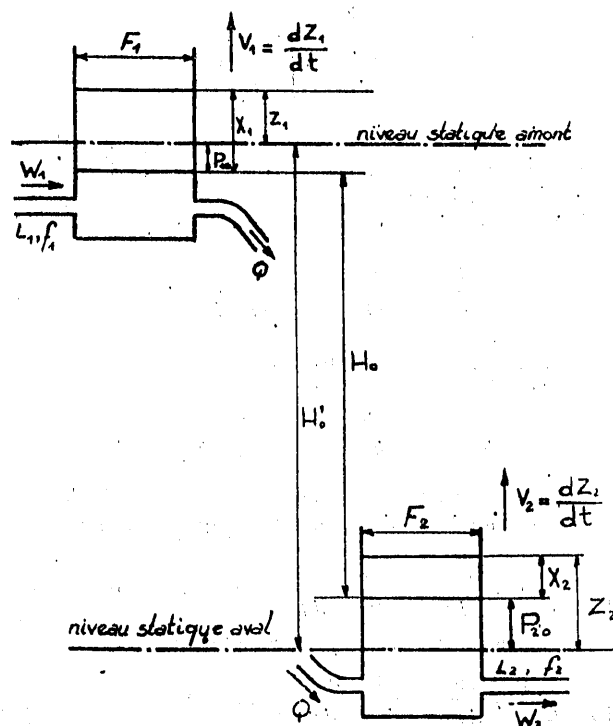
$Z_2, X_2$  = cotas de nivel, aguas abajo, en el instante  $t$ , por encima del nivel estático ( $Z_2$ ) o dinámico, del régimen permanente ( $X_2 = Z_2 - P_{20}$ ) considerado.

*Aspecto del problema.*

Cuando se presenta una variación de régimen, tendente a finalizar en régimen permanente de caudal  $Q_0$ , aparecen oscilaciones en las dos chimeneas de equilibrio. Como consecuencia, el salto bajo el cual funcionan las turbinas en el instante  $t$  deja de ser  $H_0$  para ser:

$$H_0 + X_1 - X_n.$$

Con un sistema de regulación normal interviene el mecanismo del regulador y modifica el valor del caudal, al objeto de mantener constante la potencia hi-

Figura 1.<sup>a</sup>

dráulica, en el supuesto de que la eléctrica permanece invariable.

Despreciando las pequeñas variaciones de rendimiento en la tubería y turbina, con motivo de la variación del caudal, se puede determinar el caudal  $Q$ , en el instante  $t$  por la ecuación:

$$Q_0 H_0 = Q (H_0 + X_1 - X_2). \quad [1]$$

El regulador modifica así el caudal en función de las oscilaciones, y las variaciones del caudal, a su vez, repercuten en las oscilaciones; el problema consiste en determinar las condiciones de estabilidad del conjunto, mediante la amortiguación más o menos rápida de las oscilaciones de nivel y caudal.

### Introducción de las magnitudes relativas.

Supongamos un paro instantáneo y total de las turbinas y que las pérdidas de carga no intervienen.

Los sistemas de llegada y desagüe pueden, en dicho caso, ser considerados independientemente el uno del otro. Se producirán oscilaciones en las cámaras  $C_1$  y  $C_2$ . Sus amplitudes y períodos respectivos son designados por:

$$\begin{array}{cc} Z_{1*} & Z_{2*} \\ T_1 & T_2 \end{array}$$

Siendo  $Q$  el gasto en el instante  $t$ , tendremos:

$$U_{10} = V_{10} = \frac{Q_0}{F_1}; \quad W_{10} = \frac{Q_0}{f_1}; \quad U_1 = \frac{Q}{F_1};$$

$$W_1 = \frac{Q}{f_1}; \quad V_1 = \frac{dZ_1}{dt}.$$

$$U_{20} = V_{20} = \frac{Q_0}{F_2}; \quad W_{20} = \frac{Q_0}{f_2}; \quad U_2 = \frac{Q}{F_2};$$

$$W_2 = \frac{Q}{f_2}; \quad V_2 = \frac{dZ_2}{dt}.$$

Sabemos además que:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g} \frac{F_1}{f_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{g} \frac{F_2}{f_2}}.$$

$$Z_{1*} = W_{10} \sqrt{\frac{L_1}{g} \frac{f_1}{F_1}} = U_{10} \frac{T_1}{2\pi}.$$

$$Z_{2*} = W_{20} \sqrt{\frac{L_2}{g} \frac{f_2}{F_2}} = U_{20} \frac{T_2}{2\pi}.$$

Si  $P_1, P_2; P_{10}, P_{20}$  representan las pérdidas de carga en el canal de llegada y de desagüe, para el

caudal  $Q$  y para el  $Q_0$ , se pueden introducir las magnitudes relativas clásicas de Calame y Gaden:

$$z_1 = \frac{Z_1}{Z_{1*}}; \quad x_1 = \frac{X_1}{X_{1*}}; \quad p_{10} = \frac{P_{10}}{Z_{1*}};$$

$$p_1 = \frac{P_1}{Z_{1*}}; \quad h_{10} = \frac{H_0}{Z_{1*}}.$$

$$z_2 = \frac{Z_2}{Z_{2*}}; \quad x_2 = \frac{X_2}{Z_{2*}}; \quad p_{20} = \frac{P_{20}}{Z_{2*}};$$

$$p_2 = \frac{P_2}{Z_{2*}}; \quad h_{20} = \frac{H_0}{Z_{2*}}.$$

$$u_1 = \frac{U_1}{U_{10}}; \quad v_1 = \frac{V_1}{V_{10}}; \quad w_1 = \frac{W_1}{W_{10}}; \quad t'_1 = \frac{t}{T_1}.$$

$$u_2 = \frac{U_2}{U_{20}}; \quad v_2 = \frac{V_2}{V_{20}}; \quad w_2 = \frac{W_2}{W_{20}}; \quad t'_2 = \frac{t}{T_2}.$$

### Ecuaciones del sistema.

La ecuación [1] puede escribirse teniendo en cuenta el hecho de que prácticamente  $X_1$  y  $X_2$  son muy pequeños con relación a  $H_0$ :

$$u_1 = \frac{U_1}{U_{10}} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{H_0}{H_0 + X_1 - X_2} = \frac{1}{1 + \frac{X_1}{H_0} - \frac{X_2}{H_0}} \approx$$

$$\approx 1 - \frac{X_1}{H_0} + \frac{X_2}{H_0}.$$

$$u_1 \approx 1 - \frac{\frac{X_1}{Z_{1*}}}{\frac{H_0}{Z_{1*}}} + \frac{\frac{Z_{2*} X_2}{Z_{1*} Z_{2*}}}{\frac{H_0}{Z_{1*}}} \approx 1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}}. \quad [2]$$

$$m = \frac{Z_{2*}}{Z_{1*}} = \sqrt{\frac{L_2 f_1 F_1}{L_1 f_2 F_2}}.$$

$m$  es una constante que únicamente depende de las dimensiones de las obras y no del caudal de régimen  $Q_0$  considerado.

De un modo análogo, para  $u_2$  obtendremos:

$$u_2 = \frac{U_2}{U_{20}} = \frac{Q}{Q_0} \approx 1 - \frac{1}{m} \frac{x_1}{h_{20}} + \frac{x_2}{h_{20}}. \quad [3]$$

Siendo  $u_1 = u_2$ , tendremos:

$$1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} = 1 - \frac{1}{m} \frac{x_1}{h_{20}} + \frac{x_2}{h_{20}}. \quad [4]$$

Por otra parte, las ecuaciones clásicas de las oscilaciones en las chimeneas de equilibrio dan:

$$\text{Para } C_1 \left\{ \begin{array}{l} v_1 \frac{dv_1}{dz_1} + \frac{1}{2\pi} \frac{du_1}{dt'_1} + z_1 + p_1 = 0; \\ w_1 = v_1 + u_1; \quad p_1 = p_{10} w_1^2; \quad z_1 = x_1 - p_{10}. \end{array} \right. \quad [5]$$

$$\text{Para } C_2 \left\{ \begin{array}{l} v_2 \frac{dv_2}{dz_2} - \frac{1}{2\pi} \frac{du_2}{dt'_2} + z_2 - p_2 = 0; \\ w_2 = u_2 - v_2; \quad p_2 = p_{20} w_2^2; \quad z_2 = x_2 + p_{20}. \end{array} \right. \quad [5']$$

Las ecuaciones [4], [5] y [5'] constituyen las del sistema.

### Transformación del sistema.

Se tiene  $dz_1 = dx_1$ ;  $dz_2 = dx_2$ , y de [2] obtenemos:

$$\frac{du_1}{dt'} = -\frac{1}{h_{10}} \frac{dx_1}{dt'} + \frac{m}{h_{10}} \frac{dx_2}{dt'} = -\frac{1}{h_{10}} \frac{dx_1}{dt'} + \frac{1}{k} \frac{1}{h_{10}} \frac{dx_2}{dt'};$$

siendo  $k = \frac{F_2}{F_1}$ , y habiendo tenido en cuenta que:

$$dt' = \frac{dt}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{dt}{T_2} = \frac{T_2}{T_1} dt = k m dt';$$

Por otra parte:

$$v_1 = \frac{V_1}{U_{10}} = \frac{V_1}{2\pi} \frac{T_1}{Z_{1*}} = \frac{1}{2\pi} \frac{dZ_1}{dt} \frac{T_1}{Z_{1*}} = \frac{1}{2\pi} \frac{dz_1}{dt'} = \frac{1}{2\pi} \frac{dx_1}{dt'}.$$

Además, entre [5] y [2] tenemos:

$$p_1 = p_{10}(v_1 + u_1)^2 = p_{10} \left( v_1 + 1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} \right)^2;$$

en donde, sustituyendo el último valor hallado para  $v_1$ , pasamos a:

$$p_1 = p_{10} \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \frac{dx_1}{dt'} - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} \right)^2;$$

suponiendo pequeños los valores  $x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt'}$ , al igual que en la teoría clásica de Thoma, relativa a una sola chimenea de equilibrio dispuesta en el extremo final del canal de llegada, tendremos que:

$$p_1 \approx p_{10} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \frac{dx_1}{dt'} - \frac{2x_1}{h_{10}} + m \frac{2x_2}{h_{10}} \right).$$

Además tenemos:

$$v_1 \frac{dv_1}{dz_1} = v_1 \frac{dv_1}{dt'} \frac{dt'}{dz_1} = v_1 \frac{dv_1}{dt'} \frac{1}{2\pi v_1} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 x_1}{dt'^2}.$$

Sustituyendo valores en la primera de las ecuaciones [5] se tiene finalmente:

$$\frac{d^2 x_1}{dt'^2} - 2\pi \left( \frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right) \frac{dx_1}{dt'} + 4\pi^2 \left( 1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right) x_1 = -\frac{2\pi}{h_{10}} \left( \frac{1}{k} \frac{dx_2}{dt'} + 4\pi m p_{10} x_2 \right). \quad [6]$$

Análogamente, la primera de las ecuaciones [5'] se transforma en:

$$\frac{d^2 x_2}{dt'^2} - 2\pi \left( \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right) \frac{dx_2}{dt'} + 4\pi^2 \left( 1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right) x_2 = -\frac{2\pi}{h_{20}} \left( k \frac{dx_1}{dt'} + 4\pi \frac{p_{20}}{m} x_1 \right); \quad [6']$$

siendo:

$$t'_1 = k m t'_2.$$

*Observación.*—Estas ecuaciones, aunque bajo diferente aspecto, equivalen a las que expone M. Jaeger en su estudio general sobre la estabilidad de chimeneas de equilibrio, aparecido en la *Schweizerische Bauzeitung* de noviembre y diciembre de 1943.

## CAPÍTULO II

### Condiciones de estabilidad.

#### Nueva forma de las ecuaciones del problema.

Para estudiar la estabilidad es conveniente tener la misma variable independiente  $t$ , en las dos ecuaciones.

Teniendo en cuenta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt_i} &= \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{dt_i} = T_i \frac{dx_i}{dt}; \\ \frac{d^2 x_i}{dt_i^2} &= \frac{d}{dt} \left( T_i \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{dt}{dt_i} = T_i^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \end{aligned} \right\} \left( i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right),$$

y que además, según hemos visto anteriormente:

$$mk = \frac{T_2}{T_1}; \quad k = \frac{F_2}{F_1};$$

el sistema adquiere la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + b_1 x_1 &= A_1 \frac{dx_2}{dt} + B_1 x_2; \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_2 \frac{dx_2}{dt} + b_2 x_2 &= A_2 \frac{dx_1}{dt} + B_2 x_1; \end{aligned} \right\} [7]$$

en el cual los coeficientes son:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{2\pi}{T_1} \left( \frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right); \\ b_1 &= \frac{4\pi^2}{T_1^2} \left( 1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right); \\ a_2 &= -\frac{2\pi}{T_2} \left( \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right); \\ b_2 &= \frac{4\pi^2}{T_2^2} \left( 1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right); \\ A_1 &= -\frac{2\pi}{h_{10}} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{T_2}{T_1^2}; \\ B_1 &= -8\pi^2 \frac{p_{10}}{h_{10}} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{T_2}{T_1^2}; \\ A_2 &= -\frac{2\pi}{h_{20}} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{T_1}{T_2^2}; \\ B_2 &= -8\pi^2 \frac{p_{20}}{h_{20}} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{T_1}{T_2^2}. \end{aligned} \right\}$$

Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad.

Pongamos:

$$X_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x_1(t) dt;$$

$$X_2(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x_2(t) dt.$$

Las funciones  $X_1$  y  $X_2$  son las transformadas de Laplace, de las funciones desconocidas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . De acuerdo con las fórmulas clásicas del cálculo diferencial, el sistema [7] pasa a ser:

$$\left. \begin{aligned} X_1(p^2 + a_1 p + b_1) - X_2(A_1 p + B_1) &= p x_1(0) + x'_1(0) - a_1 x_1(0) - A_1 x_2(0); \\ X_2(p^2 + a_2 p + b_2) - X_1(A_2 p + B_2) &= p x_2(0) + x'_2(0) - a_2 x_2(0) - A_2 x_1(0). \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

Sabemos que el estudio de la estabilidad se basa entonces en el de las raíces de la ecuación:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p^2 + a_1 p + b_1 & -(A_1 p + B_1) \\ -(A_2 p + B_2) & p^2 + a_2 p + b_2 \end{vmatrix} = 0; \quad [10]$$

raíces que deben tener sus partes reales todas negativas.

Desarrollando el determinante [10] se obtiene la ecuación de cuarto grado:

$$p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0; \quad [11]$$

en la que:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -2\pi \left[ \frac{1}{T_1} \left( \frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right) + \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right) \right]; \\ a_2 &= 4\pi^2 \left[ \frac{1}{T_1^2} \left( 1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right) + \frac{1}{T_2^2} \left( 1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right) + \frac{2}{T_1 T_2} \left( 2p_{10} p_{20} - \left( \frac{p_{10}}{h_{20}} + \frac{p_{20}}{h_{10}} \right) \right) \right]; \\ a_3 &= -\frac{8\pi^2}{T_1 T_2} \left[ \frac{1}{T_1} \left( \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} + \frac{4p_{10} p_{20}}{h_{10}} \right) + \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} + \frac{4p_{10} p_{20}}{h_{20}} \right) \right]; \\ a_4 &= \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{p_{10}}{h_{10}} + \frac{p_{20}}{h_{20}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que, [11], tenga sus raíces con partes reales negativas; es decir, para que el sistema hidráulico estudiado sea estable, son entonces (condiciones de Routh):

$$\left. \begin{aligned} a_1 > 0 \quad a_2 > 0 \quad a_3 > 0 \quad a_4 > 0 \\ I' = a_2^2 - a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) < 0. \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

El gran número de parámetros que intervienen hacen que el estudio general de las condiciones [13], a partir de los valores [12], sea muy complicado; sin embargo, la sustitución por valores numéricos permite llegar a la obtención de resultados en todos los casos.

1.ª observación. — Para el caso que conviniese conservar las características absolutas del sistema hidráulico, damos a continuación, sin desarrollar los cálculos, los valores de los coeficientes  $a_i$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2g}{Q_0} \left[ P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right] - \frac{Q_0}{H_0} \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right); \\ a_2 &= 4g^2 \frac{P_{10} P_{20}}{Q_0^2} \cdot \frac{f_1}{L_1} \cdot \frac{f_2}{L_2} - \frac{2g}{H_0} \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) + \frac{1}{F_2} \left( P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right) + g \left( \frac{f_1}{L_1 F_1} + \frac{f_2}{L_2 F_2} \right); \\ a_3 &= \frac{2g^2}{Q_0} \frac{f_1}{L_1} \frac{f_2}{L_2} \left[ \frac{P_{10}}{F_2} + \frac{P_{20}}{F_1} \right] - \frac{g Q_0}{F_1 F_2 H_0} \left[ \frac{f_2}{L_2} + \frac{f_1}{L_1} \right] - \frac{4g^2 P_{10} P_{20}}{H_0 Q_0} \frac{f_1}{L_1} \frac{f_2}{L_2} \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right); \\ a_4 &= \frac{g^2 f_1 f_2}{F_1 F_2 L_1 L_2} \left( 1 - \frac{2P_{10}}{H_0} - \frac{2P_{20}}{H_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

2.<sup>a</sup> observación. — La condición  $\alpha_1 > 0$  exige la condición necesaria:

$$\frac{p_{10}}{h_{10}} + \frac{p_{20}}{h_{20}} < \frac{1}{2}, \quad [15]$$

que en la práctica se cumple sobradamente.

Sabemos que, en el caso de una sola chimenea de equilibrio, la condición de Thoma fija un límite inferior para la sección horizontal de chimenea.

En nuestro caso se obtiene una condición análoga mediante  $\alpha_1 > 0$ . A partir de las fórmulas [14] se obtiene:

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} < \frac{2gH_0}{Q_0^2} \left[ P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right]. \quad [16]$$

Si tenemos en cuenta que las secciones límites de Thoma relativas a los sistemas aguas arriba y abajo, independientemente considerados, vienen dadas, respectivamente por las expresiones:

$$F_{10} = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_0}{f_1} \right)^2 \frac{L_1 f_1}{H_0 P_{10}};$$

$$F_{20} = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_0}{f_2} \right)^2 \frac{L_2 f_2}{H_0 P_{20}};$$

vemos que la condición [16] puede, además, expresarse:

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} < \frac{1}{F_{10}} + \frac{1}{F_{20}}. \quad [16']$$

Así, pues, si cada sistema hidráulico, aisladamente considerado, satisface la condición de Thoma ( $F_1 > F_{10}$ ,  $F_2 > F_{20}$ ), la condición necesaria [16] se cumple.

No obstante, esta doble comprobación de la condición de Thoma no es suficiente para asegurar la estabilidad.

En efecto, si cada chimenea de equilibrio está en el límite de su condición propia de Thoma, el sistema hidráulico es inestable (1). Se tiene entonces [12]:

$$\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} = 0; \quad \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} = 0. \quad [17]$$

En esas condiciones,  $\alpha_3$  se convierte siempre en un valor negativo:

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2} p_{10} p_{20} \left( \frac{1}{T_1 h_{10}} + \frac{1}{T_2 h_{20}} \right).$$

(1) Esta propiedad es general, pues  $-\alpha_3$  es la suma de raíces de la ecuación [11]. Si esta suma es nula, se tiene  $R(\sum p_i) = 0$  y forzosamente existen raíces con partes reales positivas.

Resultando, por tanto, que las dos condiciones de Thoma:

$$\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \leq 0, \quad \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \leq 0,$$

no son suficientes, aun cuando sea necesario que una, por lo menos, de las chimeneas satisfaga dicha condición, según se deduce inmediatamente del examen de la condición [16'].

3.<sup>a</sup> observación. — En el caso en que la altura de salto sea suficientemente grande para que la influencia de las oscilaciones del nivel de agua en las dos chimeneas de equilibrio sea despreciable, el sistema evidentemente es siempre estable.

Es interesante señalar que las condiciones [13] ponen de manifiesto esta consideración.

Supongamos en efecto que se tiene:

$$\frac{1}{h_{10}} = 0; \quad \frac{1}{h_{20}} = 0;$$

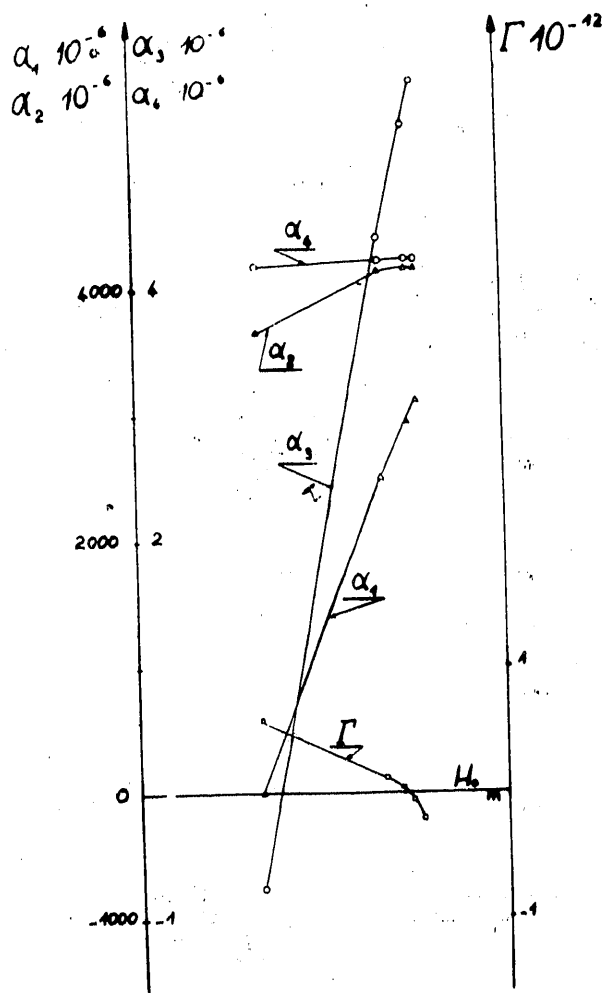


Gráfico I.

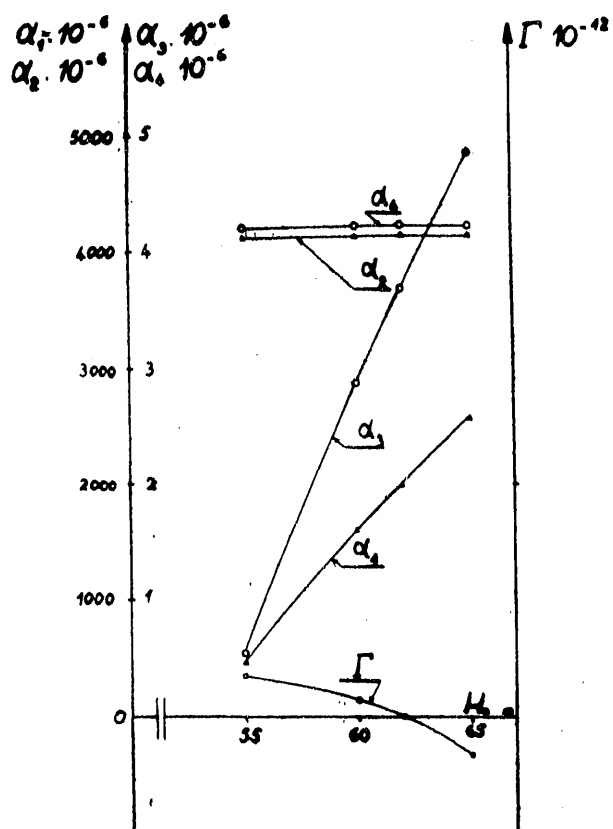


Gráfico II.

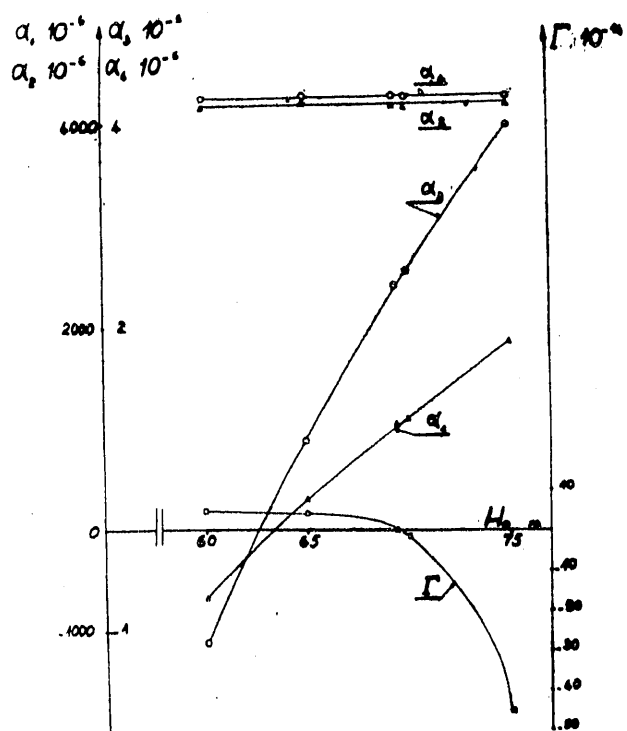


Gráfico IV.

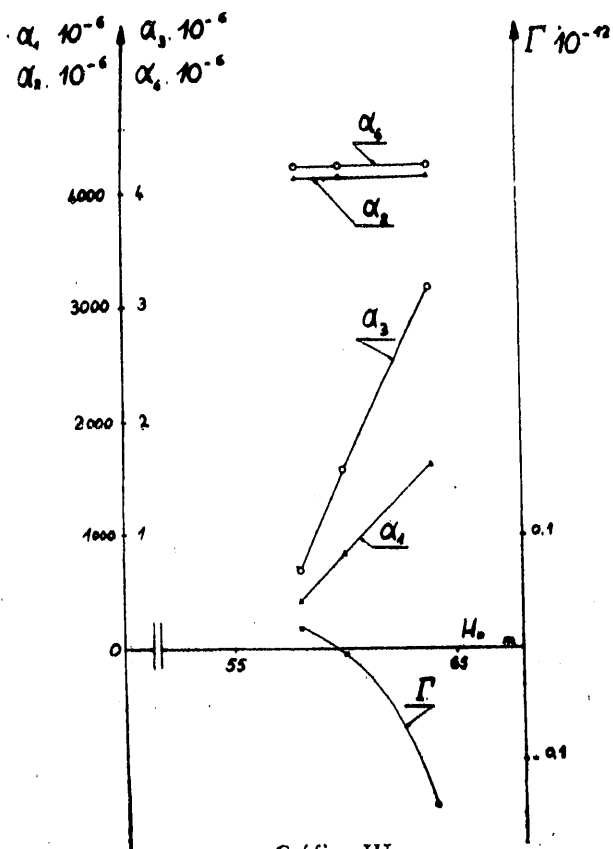


Gráfico III.

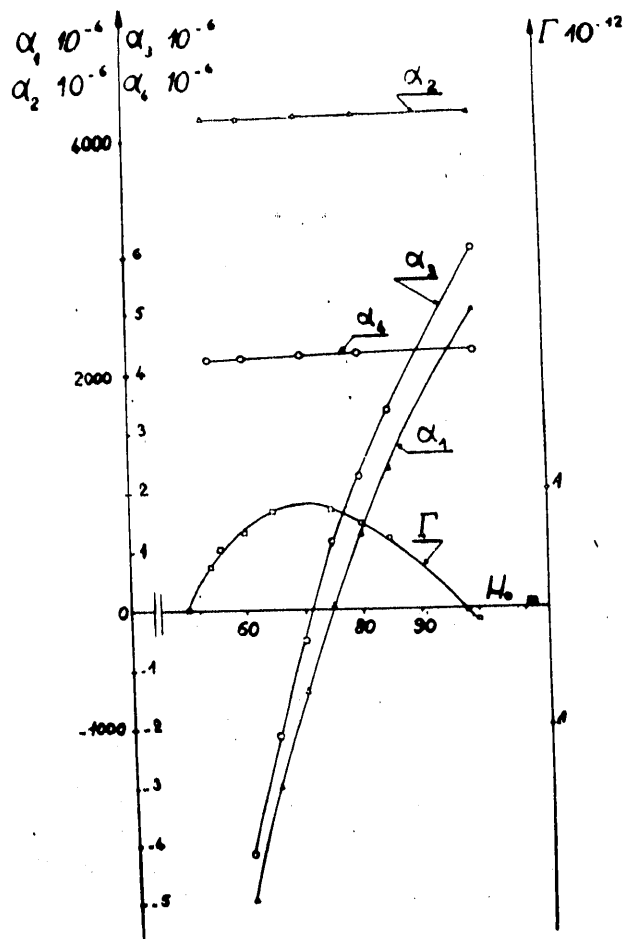


Gráfico V.

se deduce:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4 \pi \left( \frac{P_{10}}{T_1} + \frac{P_{20}}{T_2} \right) > 0; \\ \alpha_2 &= 4 \pi^2 \left( \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{4 P_{10} P_{20}}{T_1 T_2} \right) > 0; \\ \alpha_3 &= \frac{16 \pi^3}{T_1 T_2} \left( \frac{P_{20}}{T_1} + \frac{P_{10}}{T_2} \right) > 0; \\ \alpha_4 &= \frac{16 \pi^4}{T_1^2 T_2^2} > 0; \end{aligned}$$

y después de varias operaciones:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \alpha_3^2 - \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) = - \\ &- \frac{256 \pi^6}{T_1 T_2} \left[ p_{10} p_{20} \left( \frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{4 P_{10} P_{20}}{T_1 T_2} \left( p_{10} p_{20} \left( \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \right) + \frac{P_{10}^2 + P_{20}^2}{T_1 T_2} \right) \right], \end{aligned}$$

o sea:

$$\Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) < 0.$$

### CAPÍTULO III

#### Aplicación.

En un proyecto dado se iniciará por calcular las secciones  $F_1$  y  $F_2$  de las chimeneas, aguas arriba y abajo, sin preocuparse del problema de la estabilidad y teniendo en cuenta solamente la limitación de la amplitud de las oscilaciones a un valor conveniente.

Se obtendrá así un sistema determinado de valores de:

$$\begin{array}{cccccc} Q_0 & & & & & \\ L_1 & f_1 & P_{10} & F_1 & Z_{1*} & T_1 \\ L_2 & f_2 & P_{20} & F_2 & Z_{2*} & T_2. \end{array}$$

Quedará sólo comprobar si las cinco condiciones de estabilidad son satisfechas:

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \alpha_3 > 0 \quad \alpha_4 > 0 \quad \Gamma < 0.$$

En el caso que no lo sean conviene iniciar nuevamente el cálculo, partiendo de valores superiores para las secciones  $F_1$  y  $F_2$ .

\* \* \*

Hemos querido examinar, en diversos casos particulares, cuáles son los valores límites  $H_{OL}$  del salto de régimen permanente  $H_0$ , por debajo de los cuales el sistema permanece inestable, y comparar dichos valores con los de las alturas límites  $H_{OL_1}$  y  $H_{OL_2}$ ,

proporcionados por la condición de Thoma, para el sistema de llegada, por un lado ( $H_{OL_1}$ ) y para el de desagüe por otro ( $H_{OL_2}$ ). Hemos partido de los datos siguientes, mantenidos constantes:

$$Q_0 = 20 \text{ m.}^3/\text{s.}$$

$$\begin{array}{ll} L_1 = 1000 \text{ m.} & L_2 = 700 \text{ m.} \\ f_1 = 10 \text{ m.}^2 & f_2 = 10 \text{ m.}^2 \\ F_1 = 40,8 \text{ m.}^2 & F_2 = 79,3 \text{ m.}^2 \\ Z_{1*} = 10 \text{ m.} & Z_{2*} = 6 \text{ m.} \end{array}$$

y hemos calculado  $H_{OL}$ ,  $H_{OL_1}$  y  $H_{OL_2}$ , para cinco grupos distintos de valores de pérdida de carga  $P_{10}$ ,  $P_{20}$ , expresados asimismo en valores relativos  $p_{10}$ ,  $p_{20}$ :

| Caso | $P_{10} \text{ m.}$ | $P_{20} \text{ m.}$ | $p_{10}$ | $p_{20}$ |
|------|---------------------|---------------------|----------|----------|
| 1    | 1                   | 0,36                | 0,10     | 0,06     |
| 2    | 0,91                | 0,36                | 0,091    | 0,06     |
| 3    | 0,833               | 0,36                | 0,0833   | 0,06     |
| 4    | 0,70                | 0,36                | 0,070    | 0,06     |
| 5    | 0,50                | 0,36                | 0,050    | 0,06     |

Los gráficos I, II, III, IV, V, representan las curvas de variación de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ , y ponen de manifiesto los valores de  $H_{OL}$  obtenidos en cada caso, así como los de  $H_{OL_1}$  y  $H_{OL_2}$ , calculados por medio de la fórmula de Thoma.

El cuadro que sigue, da para cada uno de los cinco casos estudiados los valores límites  $H_{OL}$ ,  $H_{OL_1}$ ,  $H_{OL_2}$ :

| Caso | $H_{OL} \text{ m.}$ | $H_{OL_1} \text{ m.}$ | $H_{OL_2} \text{ m.}$ |
|------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1    | 61,8                | 50                    | 50                    |
| 2    | 62                  | 55                    | 50                    |
| 3    | 59,7                | 60                    | 50                    |
| 4    | 69,5                | 71,4                  | 50                    |
| 5    | 93                  | 100                   | 50                    |

El examen de los resultados obtenidos demuestra que si  $H_{OL_1} = H_{OL_2}$ , su valor común es inferior a  $H_{OL}$ . Si  $H_{OL_1}$  y  $H_{OL_2}$  son distintos,  $H_{OL_1}$  es superior a ambos o está comprendido entre ellos, aunque siempre es superior al menor de los dos.

Ello está conforme con los resultados teóricos generales obtenidos en la segunda parte: si la condición de Thoma se cumple exacta ( $F_1 = F_{10}$ ,  $F_2 = F_{20}$ ) e independientemente para cada sistema hidráulico, no hay estabilidad; por otra parte, cuando existe estabilidad, la condición de Thoma queda satisfecha sobradamente por lo menos en uno de los dos sistemas.