

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,
Ingeniero de Caminos.

Continuando su exposición de la directa aplicabilidad del método de los puntos fijos, desarrolla aquí el autor los problemas de efecto de temperatura y movimiento de apoyos, y hace resaltar la seguridad y ventaja que ofrecen los métodos que, como éste, permiten el inmediato conocimiento de las deformaciones a lo largo de todo el proceso de cálculo.

El estudio de los efectos debidos a variación de temperatura o a traslación de los apoyos, objeto de las líneas que siguen, puede reducirse al de estados parciales, cuyo conocimiento es directo gracias al ábaco XI y sistema [40], y al de estructura solicitada por fuerza actuando en un nudo (fig. 22).

Pero indiquemos de entrada que todos esos estados parciales han sido ya estudiados al resolver dicho problema de estructura solicitada por fuerza aplicada en un nudo. Y que este estudio de la acción de la temperatura y de la traslación de los apoyos se reduce, por consiguiente, a realizar meras combinaciones de resultados ya conocidos.

* * *

En las figuras siguientes se han representado las deformaciones debidas a estos efectos, tomando, para su más clara representación, como valor de la variación unitaria por temperatura, ϵt , o como magnitud del movimiento del apoyo, Δ , unos valores sumamente elevados y de magnitud comparable con las propias dimensiones de la estructura.

Quizás convenga advertir, para el más fácil examen de dichas figuras, que tanto estas variaciones de temperatura como estos movimientos experimentados por los apoyos son, por hipótesis de partida, infinitesimos de primer grado en el sentido matemático de la palabra, pues solamente en esta hipótesis resulta válido el principio de independencias y superposición de causas y efectos en que se basa la Elasticidad (1).

(1) Gráficamente se pone esto de manifiesto en la figura 25. Por ejemplo, el movimiento de la sección AB está, cinemáticamente, definido por las dos rotaciones instantáneas φ_1 y φ_2 alrededor de los centros O_1 y O_2 . Si estas rotaciones tienen un valor finito, el movimiento resultante no solamente depende de dichas rotaciones, sino que también depende del orden en que las hagamos actuar, pues cada una de estas rotaciones hace variar la posición a partir de la cual tendrá lugar la otra rotación.

Análoga dependencia encontraremos al componer movimientos de traslación con algún movimiento de giro si éste tiene valor finito. El orden de aplicación hace variar el efecto total.

En resumen: si las deformaciones que por la aplicación de fuerzas se producen en una pieza elástica fuesen consideradas como rotaciones finitas, la intercambiabilidad en el orden de aplicación de las fuerzas no existiría, y la acción de cada fuerza sería distinta según cuáles otras estuviesen aplicadas.

Por esto, aunque las variaciones de longitud o los asientos alcancen en el dibujo magnitudes tan considerables, su superposición y combinación con las deformaciones elásticas debidas a las tensiones internas

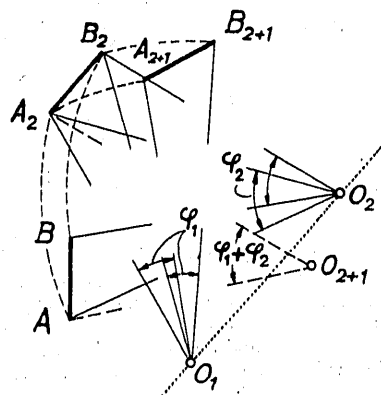
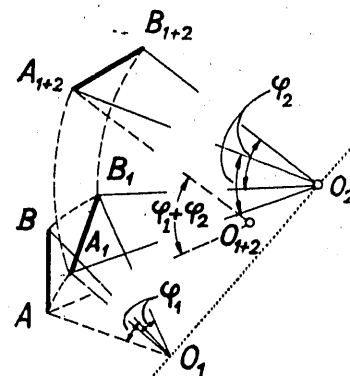


Fig. 25. — Una suma de rotaciones finitas no cumple el principio de superposición. El movimiento resultante depende del orden en que se apliquen las rotaciones.

Para que el principio de superposición de causas y efectos sea válido, es menester que las rotaciones instantáneas sean rotaciones infinitesimales en el sentido matemático de la palabra. Es decir, rotaciones que produzcan en cada punto movimientos que puedan considerarse como traslaciones infinitamente pequeñas, de dirección normal a la recta de unión del punto y del centro instantáneo. Un movimiento compuesto

ha de hacerse teniendo presente que tanto unas como otras son infinitesimales.

Así, en la figura 27-a), en la que se representa la deformación del pórtico de los anteriores ejemplos para un aumento de temperatura tal que $\epsilon t = 1/4$,

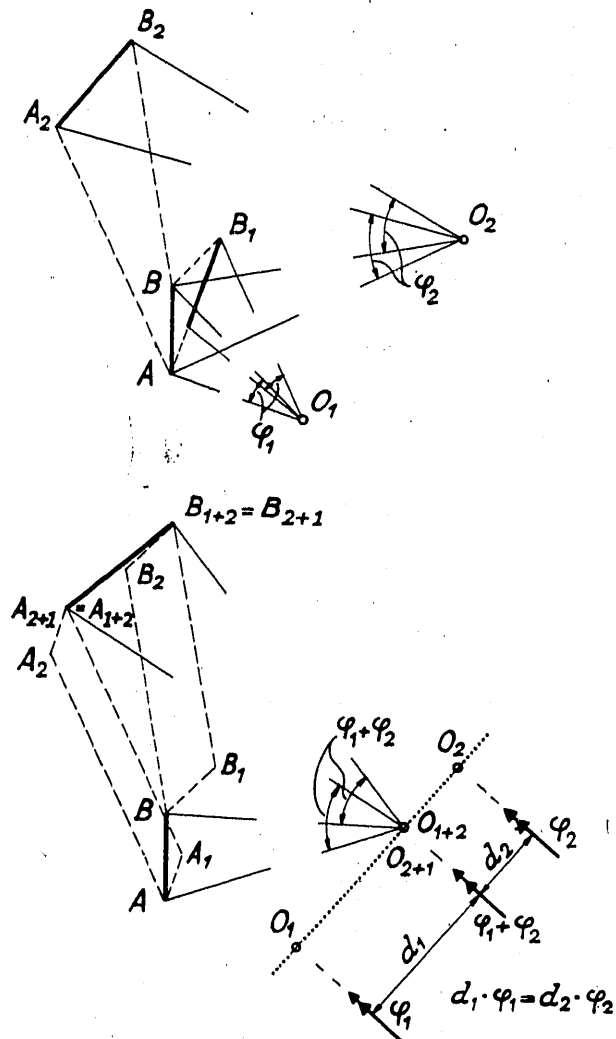


Fig. 26. — La suma de unas rotaciones infinitesimales tiene un valor perfectamente determinado. Es una rotación cuyo ángulo es la suma de los distintos ángulos y cuyo centro puede definirse como el centro de gravedad de los distintos centros de las rotaciones cuando a éstos se les atribuye como pesos los valores de sus respectivas rotaciones.

de estas traslaciones es una traslación perfectamente definida y por completo independiente del orden en que se apliquen las traslaciones que la componen. Dicha traslación total equivale a una rotación, también infinitesimal, suma de esas rotaciones infinitesimales producidas por las diversas fuerzas.

En la figura 26 se ha representado el movimiento total realizado por un elemento, AB , debido a dos rotaciones infinitesimales O_1 y O_2 . Los centros de giro en esta figura son los mismos que en la figura 25; pero al ser concebidos como infinitesimales, vemos que dicho movimiento total está perfectamente definido y es por completo independiente del orden en que hagamos la aplicación de los giros parciales.

no debe de olvidarse que no se ha hecho sino representar a una escala inverosímilmente grande unas deformaciones que son infinitesimales. En esta figura se ha procedido primeramente a liberar el extremo A de la estructura y permitido que ésta se dilate libremente por efecto de la temperatura. Esta deformación por temperatura se obtiene como una radiación, de centro en el extremo fijo D , en la que la longitud de cualquier rayo pasa a ser $L(1 + \epsilon t)$. El pórtico $ABCD$ pasa a ocupar el lugar $A'B'C'D$. Superponiendo después a esta deformación la debida a las reacciones hiperestáticas, cuyos valores son, como veremos:

$$V_A = \frac{7470}{4927} \epsilon t \frac{EI}{L^2}; \quad H_A = \frac{9360}{4927} \epsilon t \frac{EI}{L^2},$$

llegamos así a la deformada definitiva $AB''C''D$.

En la figura 27-b), el proceso seguido ha sido el inverso: Se han obtenido primeramente las deformaciones debidas a las reacciones hiperestáticas, lo que da lugar a la elástica $A'''B'''C'''D$, deformada que, bajo el aumento posterior de temperatura, pasa a ser la misma $AB''C''D$ de la figura anterior. (Las distancias DA' , DA y DA''' , pese a su aparente diferencia en el dibujo, difieren entre sí tan sólo en un infinitésimo de primer orden. El aumento por temperatura de DA''' (fig. 27-b)) es idéntico al experimentado por DA en la figura 27-a). Y la deformación elástica del punto A' , en esta figura, debida a la aplicación de las reacciones hiperestáticas, idéntico a su vez al experimentado por la misma causa por el punto A en la 27-b).

En el estudio de estructuras sometidas a una variación uniforme de temperatura, cabe distinguir entre: a), estructuras en las que no se produce alteración alguna de tensiones (fig. 28-a)) y no requieren estudio; b), estructuras en las que el movimiento de los nudos puede determinarse exclusivamente por relaciones geométricas (fig. 28-b)), y c), estructuras en las que, para la determinación de estos movimientos de los nudos, es menester utilizar, además de las geométricas, alguna condición elástica (fig. 28-c)).

El grupo b) está, en realidad, constituido por las estructuras denominadas no traslacionales y por aquellas traslacionales que sean perfectamente simétricas. Partiendo de un nudo inmóvil, o de un punto de movimiento nulo por estar situado en el eje de simetría, se determina la posición que han de tomar todos los restantes. En función de estos movimientos conocidos de los nudos, se deduce directamente, por aplicación del grupo [40], ó ábaco XI, el estado de tensiones que en estas estructuras provoca una variación de temperatura.

En general, la estructura pertenecerá al grupo c) y queda indeterminada la posición que la variación de temperatura hace tomar a la estructura; nos tro-

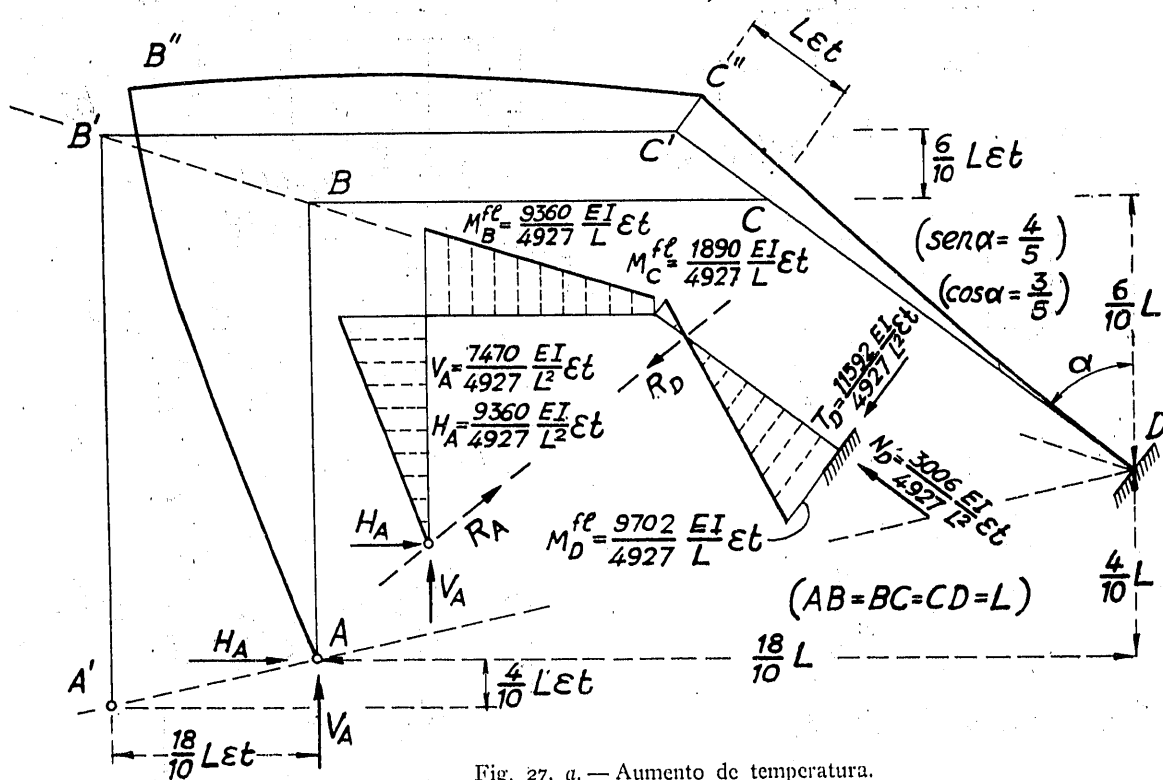


Fig. 27, a. — Aumento de temperatura.

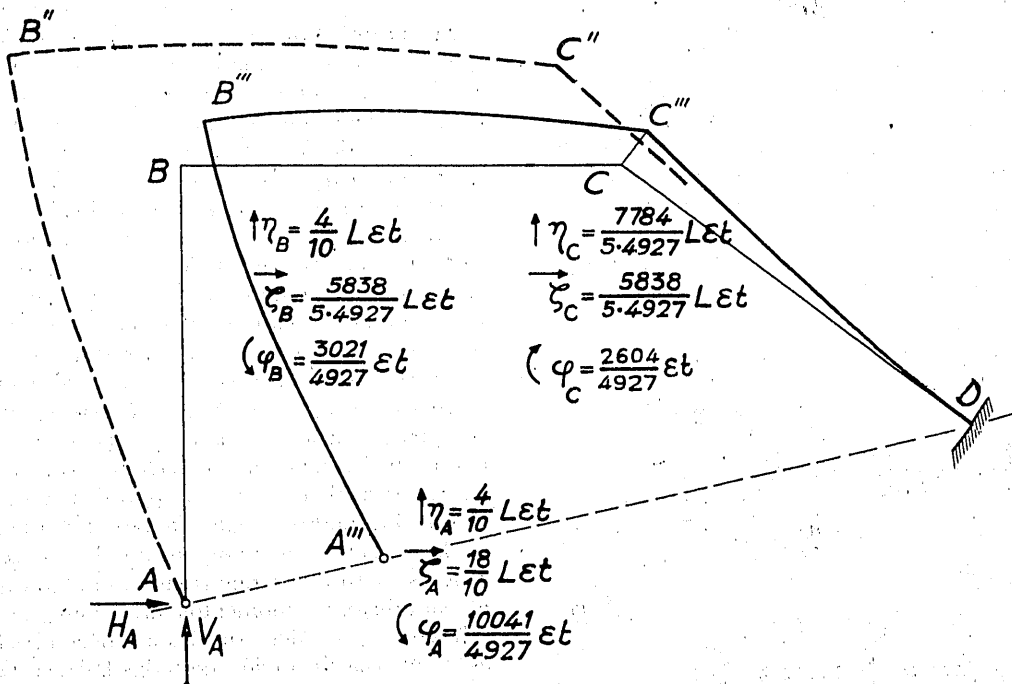


Fig. 27, b. — Aumento de temperatura.

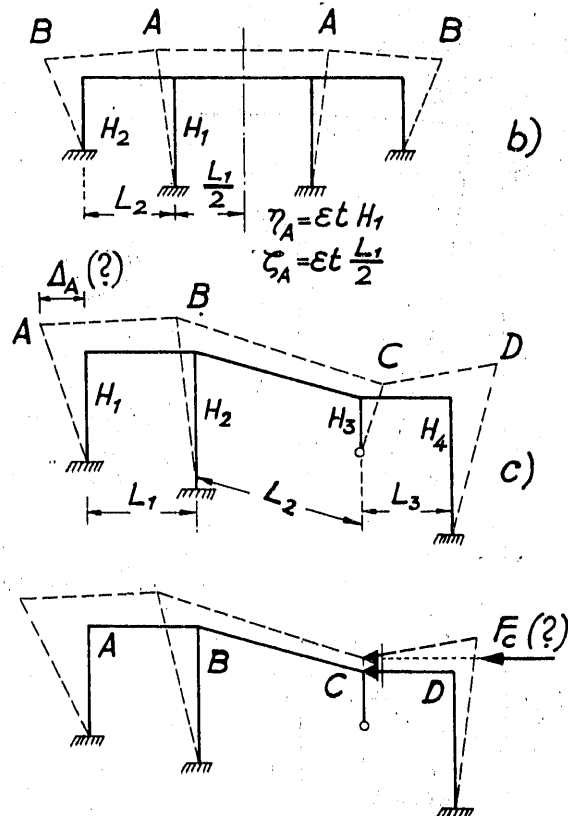
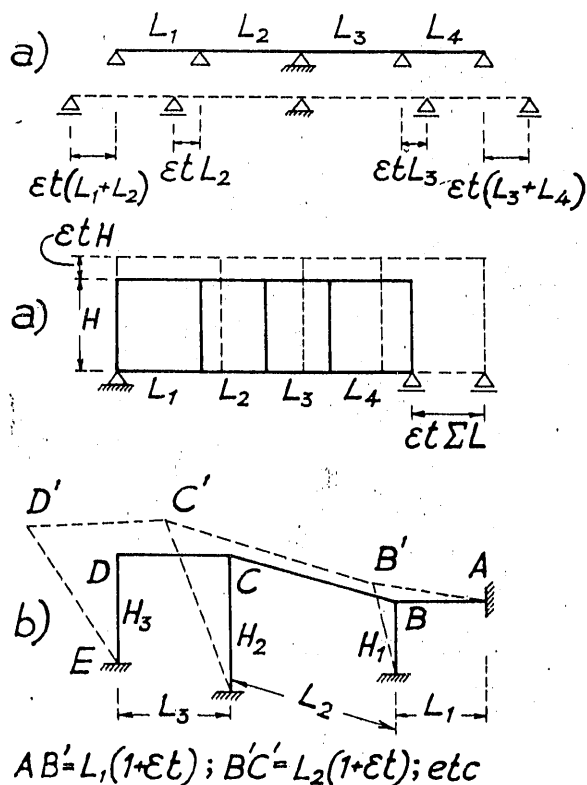


Fig. 28. — Estructuras sometidas a una variación uniforme de temperatura. En los casos c) las incógnitas traslaciones, se sustituyen por incógnitas fuerzas de guiado.

pezamos con tantas componentes de traslación incógnitas como posibilidades de movimiento tengan estas estructuras traslacionales.

Para su estudio habremos de reducirlos al caso b), aplicando para ello tantas fuerzas incógnitas (es decir, tantos apoyos deslizantes ficticios) como grados de libertad de movimiento de nudos tengan, y reemplazar así el problema por otros cuya resolución nos es ya conocida (ver fig. 28).

En la figura 29, el pórtico que venimos utilizando

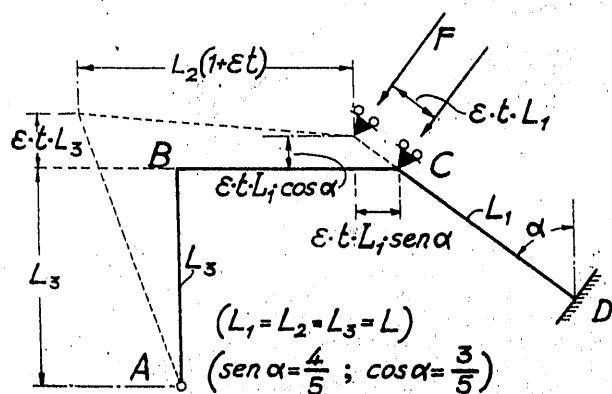


Fig. 29. — La introducción de una fuerza, F , que guía el movimiento del nudo C permite conocer la posición que, por aumento de temperatura, alcanzarán todos los nudos.

nos representa, por ejemplo, una célula de una estructura múltiple con un sólo grado de movilidad. Basta que coartemos, mediante un apoyo deslizante, el movimiento del nudo C , para que resulte determinado el movimiento de los nudos de esta célula y de todos los nudos de las restantes células. Resulta así que, cuando a la barra CD la obligamos a dilatarse según su propia dirección, entre los nudos B y C del dintel y entre los A y B del pilar articulado se producen unas traslaciones normales, relativas, de valor Δ_2 y Δ_3 , respectivamente (y análogamente se determinarían las desnivelaciones normales relativas entre los extremos de todas las restantes barras de la estructura).

Empleando la forma expositiva habitual en los métodos de aproximaciones sucesivas, diríamos que, rompiendo la continuidad de la estructura, vamos deformando, mediante traslaciones sin giro de nudos, las diversas barras, hasta lograr una deformada en la que los nudos ocupan la posición que, por efecto de la variación de temperatura, les corresponde. En esta estructura así deformada (fig. 30-a)), no existe el equilibrio de momentos alrededor de cada nudo, y hay que proceder por ello a darles libertad de giro, es decir, a la liberación de todas las coacciones (o sea, a la superposición en cada nudo de unos pares iguales y contrarios a los antes aplicados), en tanto que, además, se les mantiene inmovilizados por la acción de una cierta fuerza, F . Se llega así al estado de

equilibrio elástico correspondiente a la acción conjunta de la temperatura y de una fuerza, F ; es decir, se llega al diagrama de la figura 30-c).

En el método de puntos fijos, esas sucesivas desnivelaciones relativas entre extremos no son sino un

mismo tipo de sollicitación de barra, y los momentos que en los extremos de cada barra produce su desnivelación normal relativa, Δ , son dados directamente, como ya vimos, por las sencillas expresiones [40], o bien se pueden tomar del ábaco XI. En 30-b) se indican los dos diagramas de momentos correspondientes a la desnivelación del dintel y a la del pilar, respectivamente. (Diagramas que, por otra parte, ya están hallados (ver fig. 19), al estudiar el caso fundamental de estructura sometida a la acción de fuerza aplicada en un nudo.) La suma de estos dos diagramas da el 30-c).

Como siempre, es también aquí innecesaria la determinación de los valores de las fuerzas que nos han venido impidiendo la traslación de nudos en todas las diversas etapas. Basta con deducir del diagrama final de momentos cuál es, por condición de estática, el valor que ha de tener la reacción de ese único apoyo deslizando con el que hemos coartado el único grado de movilidad de esta estructura.

Determinado el valor de esta fuerza, resta solamente (fig. 30-d)), trazar el diagrama de momentos que en la estructura produce una fuerza igual y contraria (es decir, dar a F (ver fig. 22) el valor particular correspondiente a este caso), para tener por superposición de los 30-c) y 30-d) el correspondiente a estructura sometida exclusivamente a variación de temperatura.

La cuestión del efecto de una posible traslación de los apoyos tiene estrecha semejanza con lo acabado de exponer:

Estos asientos quizás lleguen a alcanzar valores sensibles. Sin embargo, la Elasticidad ha de operar con ellos considerándolos como infinitesimales, pues solamente así quedan dentro del campo de validez los principios en que ella se basa.

Sobre los casos que, en este estudio de los efectos de la traslación de un cierto apoyo, pueden presentarse, cabría su agrupación en una lámina análoga a la de la figura 28, distinguiendo entre casos en los que: a), el movimiento del apoyo no produce deformación elástica en la estructura; casos b), en los que, por consideraciones geométricas, se puede determinar cuál es la posición que tomarán los nudos afectados por dicho movimiento; y casos c), en los que es menester recurrir, para esa determinación, al planteamiento de una condición elástica.

En los casos b) (por ejemplo, asiento de un apoyo de una viga continua, movimiento de un apoyo en una estructura no traslacional, asiento simétrico en elementos de una estructura traslacional simétrica), el estudio se reduce a ir anotando los valores de las desnivelaciones normales relativas entre los dos extremos de cada una de las barras afectadas. Y a una reiterada aplicación de las expresiones [40], ó, en la práctica, a una reiterada lectura del ábaco XI, que nos van dando los valores de los momentos flectores

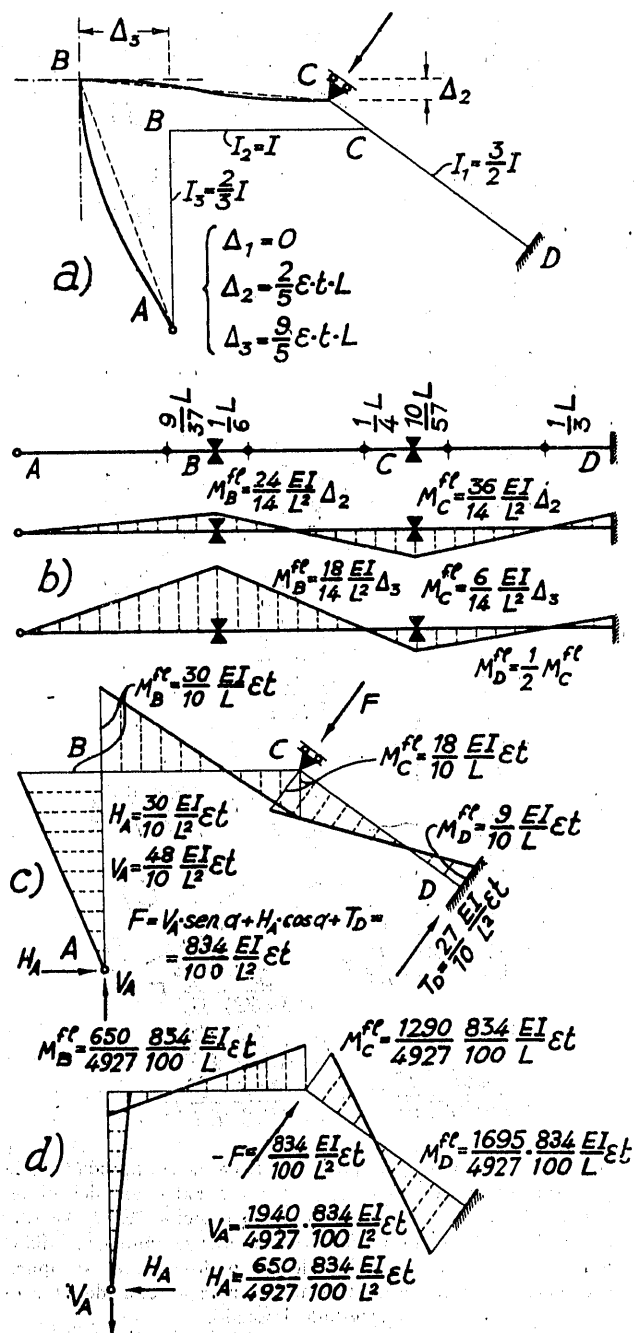


Fig. 30. — Detalle del proceso de cálculo: El diagrama c) corresponde a la acción simultánea de la variación de temperatura y de una fuerza F que guía la deformación. El d) es el diagrama (ya conocido, fig. 22), debido a la acción de una fuerza $-F$. La superposición de ambos diagramas da el diagrama real correspondiente a la variación de temperatura representado en la anterior figura 27, a).

producidos en los extremos de cada barra y que, distribuidos entre las barras adyacentes y transmitidos al resto de la estructura, van formando los diversos diagramas, uno por cada barra afectada, que integran el diagrama de momentos buscado.

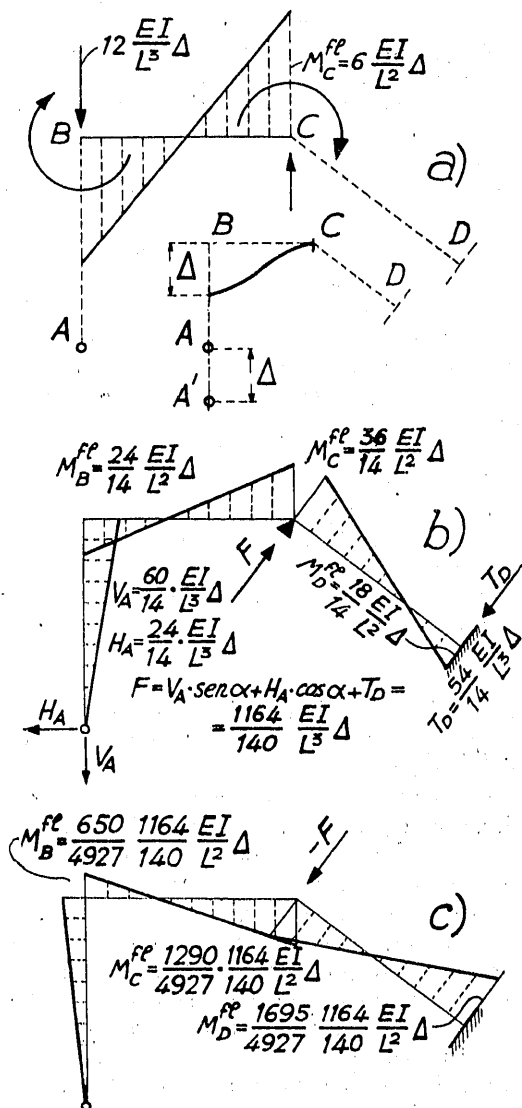


Fig. 31. — Descenso del apoyo A. Considerado el dintel como único elemento dotado de flexibilidad, el diagrama a) recoge las solicitaciones equivalentes a un descenso vertical del apoyo. En b) se devuelve la flexibilidad a las restantes piezas, y simultáneamente se aplica una fuerza, F , que impide la traslación de nudos. (El valor de esta fuerza se obtiene, como siempre, a posteriori por una de las condiciones de la estática). En c) se anota el diagrama correspondiente a una fuerza igual y contraria. (Se observará que el diagrama b) viene dado directamente por el ábaco XI, y que el diagrama c) es el del caso, ya estudiado, de traslación de nudos.)

El caso general c), en el que la posición a tomar por los nudos es indeterminada, se reduce a este anterior mediante la introducción de las fuerzas de fijación de nudo necesarias para convertir a la estructura

en no traslacional. Fuerzas a eliminar posteriormente mediante la aplicación de otras iguales y contrarias.

En las siguientes figuras 31 y 32 se recoge gráficamente el proceso de cálculo para un asiento vertical del apoyo A, desarrollándolo de acuerdo con la forma expositiva hoy acostumbrada.

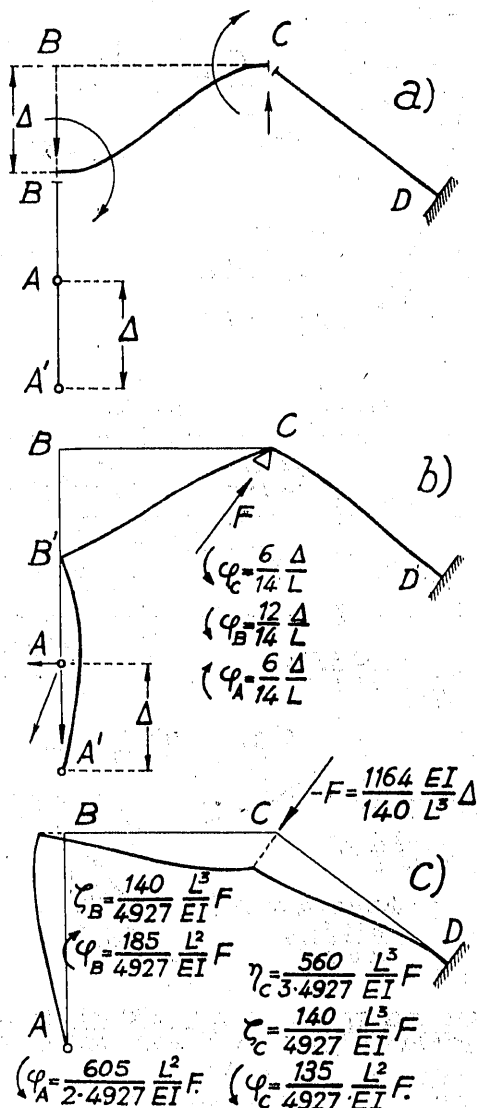


Fig. 32. — Descenso del apoyo A: Rota la continuidad de la estructura, una desnivelación entre los extremos del dintel (ver a)), lleva dicho apoyo a su nueva posición. En b) se restablece la continuidad y simultáneamente se impide, mediante la fuerza F , la traslación de los nudos. En c) se aplica una fuerza, F , igual y contraria. La superposición de b) y c) da el estado buscado.

Pero el lector podrá observar que la preparación, tanto de éstas como de las anteriores figuras, estaba ya hecha desde que, al estudiar el caso básico de estructura sometida a fuerza aplicada en un nudo, se abordó este problema como sucesiva desnivelación

entre extremos de las diversas barras. La resolución de este caso de asiento de apoyo no es otra cosa que una reunión de datos ya logrados: los diagramas *b*), correspondientes a un descenso normal relativo entre extremos del dintel, y los diagramas *c*), correspondientes a la acción de una fuerza igual y contraria a la que mantenía los nudos inmovilizados en la posición alcanzada en *b*). La superposición de ambas parejas de diagramas nos da los de deformación y de momentos flectores representados en la figura 33.

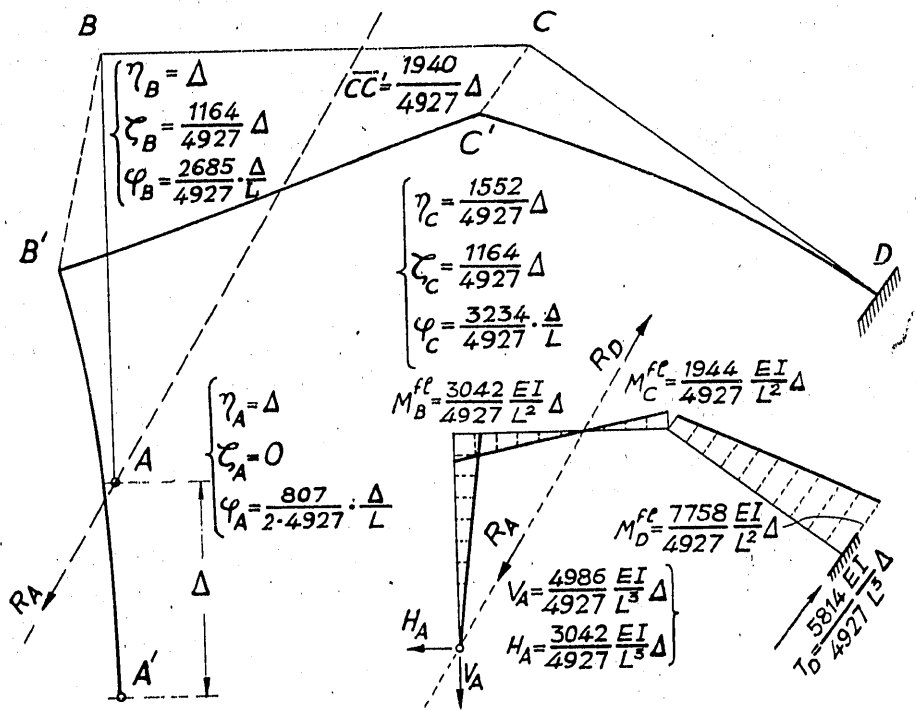


Fig. 33. — Deformaciones, momentos flectores y reacciones debidas a un descenso vertical del apoyo *A*. (Son la suma de los diagramas *b*) y *c*) de las anteriores figuras 31 y 32.)

Y que en definitiva, como se indicó al pie del ábaco XI, basta con el conocimiento de los puntos fijos para que, por la sola aplicación reiterada de dicho ábaco, podamos resolver el caso fundamental de traslaciones debidas a la aplicación de una fuerza en un nudo (en el caso de estructuras traslacionales), y todos los casos de variación de temperatura y de asiento de apoyos (tanto si las estructuras son traslacionales como si no lo son).

* * *

Quedaría incompleto el estudio de los efectos de la deformabilidad, siempre presente, de las cimentaciones, si no se abordase también el del efecto que en la estructura produce el giro de las secciones de apoyo supuestas inicialmente, en cómodo apriorismo, como perfectamente empotradas.

Esta cuestión resulta espinosa en los métodos de

aproximaciones sucesivas, y en la mayoría de sus exposiciones queda, efectivamente, silenciada esta cuestión por los autores.

En el método de los puntos fijos, su resolución es sencillísima.

Al ir recorriendo la estructura, haciendo aplicación de las fórmulas de recurrencia [11], [12] y [14], es decir, al hacer el trabajo inicial de determinación de las sucesivas rigideces de nudos y de los factores de transmisión, han quedado también deter-

minados todos los elementos necesarios para la resolución de esta cuestión.

En el pórtico del ejemplo, en la figura 6.^a, y partiendo de la extremidad articulada *A*, se fueron marcando los valores de las rigideces de los nudos, los puntos fijos y los factores de transmisión, que nuevamente representamos en la figura 34-a). Se obtuvo así, como rigidez del nudo *D*, el valor:

$$k_D = \frac{141}{28} \frac{EI}{L} \text{ (m. Kg.)}.$$

El apoyo *D*, al girar θ radianes, ejerce, pues, en el extremo *D* de la barra *CD*, un par de valor:

$$M_D = k_D \cdot \theta = \frac{141}{28} \cdot \frac{EI}{L} \cdot \theta \text{ (m. Kg.)}.$$

Par flector cuyo efecto en el resto de la estructura podemos evaluar mediante los factores de transmi-

sión, o podemos directamente dibujar, mediante los puntos fijos. Como también se obtienen de modo directo las deformaciones producidas en los nudos:

$$\theta_D = \theta; \quad \theta_C = \frac{M_C^{fI}}{k_C} = \frac{9}{28} \theta;$$

$$\theta_B = \frac{M_B^{fI}}{\theta_B} = \frac{3}{28} \theta; \quad \theta_A = 2 \theta_B = \frac{6}{28} \theta.$$

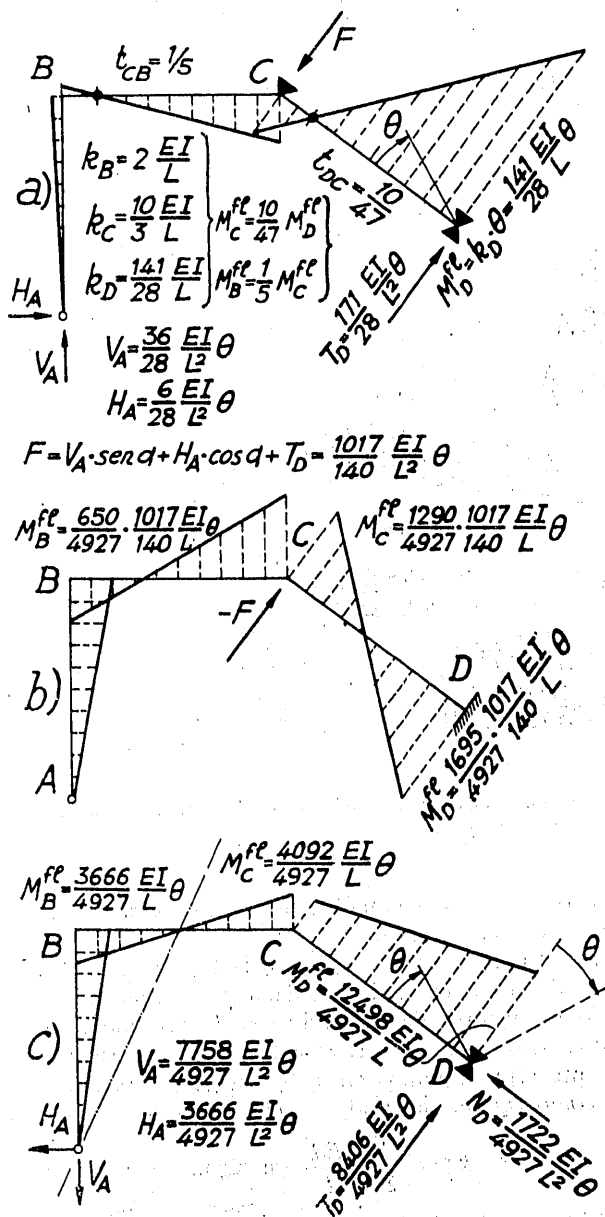


Fig. 34. — Cálculo del efecto que produce en la estructura un giro del apoyo. El diagrama a), efecto debido al giro cuando la estructura tiene impedida la traslación de nudos, es precisamente lo estudiado inicialmente: rigideces de nudo y factores de transmisión (ver fig. 6.a). Mediante el b) permitimos la traslación de nudos, y el diagrama c) nos da, finalmente, todos los valores característicos de las tensiones producidas por el giro del cimiento D.

En estructuras no traslacionales, la determinación del efecto de la rotación de un apoyo es, como vemos, siempre directa, pues este giro del apoyo no es otra cosa que la materialización de la hipótesis de deformación elástica (giro del extremo de una barra cuyo otro extremo está elásticamente empotrado), que dió origen a los conceptos de rigidez, factor de transmisión y punto fijo de los que nos venimos sirviendo.

Cuando la estructura es traslacional, como es el caso del presente ejemplo, nos bastará determinar cuál es (fig. 34-a)) la fuerza o fuerzas que han mantenido provisionalmente la inmovilidad de los nudos, para que, mediante los diagramas correspondientes (fig. 34-b)) a la acción de fuerzas iguales y contrarias, se obtengan, por superposición (fig. 34-c)), los correspondientes a la acción que un determinado giro del apoyo ejerce sobre la estructura libremente deformable.

* * *

Se ha aludido anteriormente al cómodo apriorismo de que siempre, en los proyectos, estén dotadas las estructuras de unas articulaciones perfectas o de unos empotramientos asimismo perfectos, aun a sabiendas de que nunca nos será dado alcanzar tanta perfección. Deliberadamente se incurre con ello en errores de tipo sistemático, cuya trascendencia, en cada caso, no siempre es fácil de intuir y que hacen de entrada ilusorio ese pretendido rigor que con todos los cálculos posteriores se quiere alcanzar.

Invocando la necesidad de este rigor, no se deja hoy día de tener siempre en cuenta la posibilidad de traslación de nudos, aun en caso de cargas normales, e incluso se supervaloriza este efecto no haciendo entrar en cuenta la presencia de las fábricas de los paños de cerramiento. Son también abordados, en algunos casos, las traslaciones de apoyos, procurando tener en cuenta las deformaciones plásticas de las cimentaciones.

Pero se rehuye, sistemáticamente, la cuestión de qué tanto esos apoyos articulados como esos apoyos de empotramiento perfecto son, en la realidad, unos empotramientos elásticos cuya rigidez está lejos siempre de alcanzar esas rigideces extremas, $k = 0$ ó $k = \infty$, que son consubstanciales, hoy por hoy, con la práctica de los métodos de aproximaciones sucesivas.

Esta limitación, de tener que aceptar una u otra de las hipótesis extremas, no existe en el método de los puntos fijos, para el cual no supone dificultad alguna el que todos los apoyos de la estructura tengan ese carácter real de articulación elástica.

Tanto nos da entrar en las fórmulas de recurrencia con el valor $k_A = 0$, como acabamos de hacer en esta figura 34-a), como entrar con un valor k_A cualquiera.

En nada varían los cálculos a efectuar, y en cambio, en todos los estados de sollicitación que vayamos estudiando, esos apoyos nos aparecerán tomando unos

momentos flectores, que son precisamente los correspondientes a la deformación angular provocada en los mismos y no los correspondientes a aquellas hipotéticas sustentaciones.

Cierto que la fijación de esas rigideces, es decir, del valor de la relación entre un par flector aplicado al cimiento y el giro sufrido por el cimiento, no es cuestión que la mecánica del suelo pueda fácilmente cifrarnos. Pero una estimación, por grosera que sea, resultará más satisfactoria que renunciar de antemano a que la cimentación de la estructura se asemeje en nuestro proyecto a la que ha de tener en la realidad.

Quede, después de todo esto, a la consideración del lector juzgar por sí mismo sobre si el método de los puntos fijos no cumple más satisfactoriamente esas cualidades de: "fácil, elástico en la extensión e intensidad de su aplicación, y, lo que es más importante, adecuado al fenómeno físico que aborda", que otros métodos a los que también se atribuyen esas cualidades.

* * *

Otro extremo a considerar, que guarda íntima relación con lo acabado de exponer, es la ventaja que, desde el punto de vista elástico, ofrecen los métodos que explícitamente pueden operar con las deformaciones.

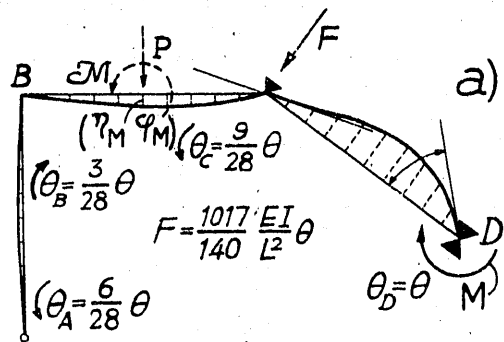
Continuamente hemos venido viendo cómo el conocimiento de las rigideces reales con que opera el método de los puntos fijos, permite ir conociendo los valores de los giros, y ha sido sencillo el dibujo exacto de las deformadas en todos los estados parciales y solicitaciones estudiados, y fácil el proporcionar así al lector unas imágenes más claras y de más fuerza expresiva que ninguna exposición verbal.

El cálculo de algunas de estas deformadas tiene particular interés como herramienta del estudio elástico de la estructura. Por ejemplo, esta última elástica, debida al giro del apoyo D , es al mismo tiempo la línea de influencia del momento flector que en el empotramiento D produce una causa cualquiera aplicada en un punto también cualquiera de la estructura (1).

La deformada dibujada en la figura 35-a) es la correspondiente a estructura con nudos inmovilizados. Esta deformada será, por tanto, la línea de influencia del momento flector M_B^f para estructura asimismo inmovilizada. (En dicha figura aparecen indicadas algunas expresiones de la identidad entre trabajos elásticos en que se basa este método de Land. En parti-

cular, podrá observarse que los momentos flectores producidos en D por la acción de un par aplicado en los nudos B y C , momentos cuyos valores son, respectivamente:

$$M_D^f = \frac{3}{28} \mathcal{M}; \quad M_D^f = \frac{9}{28} \mathcal{M}$$



$$(P \cdot \eta_M = M \cdot \theta_P)$$

$$(\mathcal{M} \cdot \varphi_M = M \cdot \theta_M)$$

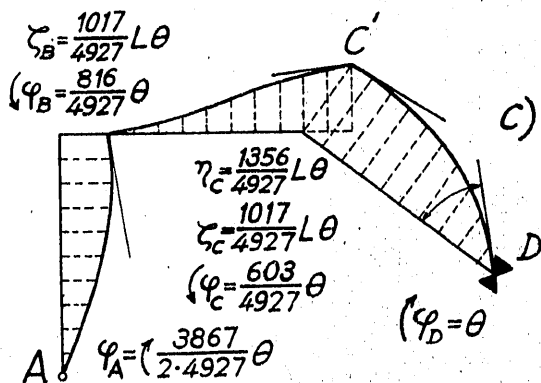
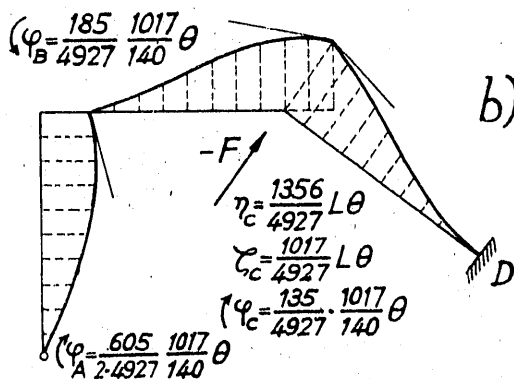


Fig. 35.— Estudio del efecto producido por el giro del apoyo D : La deformada a) corresponde a estructura inmovilizada por una fuerza F . La b) es la deformación que toma la estructura al aplicar una fuerza igual y contraria. La suma c) de ambas es la deformada de la estructura real.

(1) Este método general de obtención de las líneas de influencia del momento flector y de los esfuerzos en una sección por pura aplicación del principio de reciprocidad entre trabajos indirectos, es debido a R. Land, que lo expuso en 1887. No sabemos bien por qué este método aparece atribuido, entre nosotros, a Müller-Breslau. Quizás sea debido a que así lo afirman, erróneamente, Cross y Morgan en su *Continuous frames*.

(ver figuras 7-a) y 7-b)), corresponden, efectivamente, con los valores de los giros:

$$\theta_B = \frac{3}{28} \theta; \quad \theta_C = \frac{9}{28} \theta,$$

experimentados por esos nudos B y C al dar a la sección D el giro θ (ver figura 35-a)).

Y a su vez la deformada representada en la figura 36, correspondiente a estructura libremente deformable, nos dará la línea de influencia del momento flector producido en D cuando una causa cualquiera actúa sobre la estructura real.

En las anteriores figuras 22, 23 y 24, se estudió la acción sobre la estructura de una fuerza, P , aplicada en el nudo C , y de un par M actuando alternativamente en los nudos B y C . Los momentos flectores M_D correspondientes a estos tres casos de carga tienen idéntica expresión que la traslación de C y los giros de los nudos B y C producidos al girar (fig. 36) la sección D . Ello comprueba la exactitud de estas soluciones dadas.

Muchas más comprobaciones podrá ir haciendo el lector, mediante este mismo teorema de Maxwell, de todas las anteriores figuras, y hacerlo con toda comodidad, pues, al darle en ellas las deformaciones, se le han dado unos resultados que corresponden a la manifestación física de las propiedades elásticas de la estructura.

Ver si estos resultados verifican o no el principio de reciprocidad, es una prueba no solamente fácil de hacer, sino que es de valor probatorio decisivo) (1).

(1) No son tan fáciles las comprobaciones, ni tan seguras, si lo que se tiene a la vista es solamente el diagrama de los momentos flectores y reacciones.

Supongamos que para el cálculo de cualquiera de los diagramas de los casos anteriores se hubiese adoptado un método general, por ejemplo, el de Castigliano, para determinar, como pareja de hiperestáticas, las dos componentes de la reacción del apoyo A . Partiendo de estos valores de las reacciones en el extremo A , y caminando hacia el extremo D , vamos dibujando el diagrama de momentos, teniendo en cuenta también la fuerza o fuerzas solicitantes conforme las vayamos encontrando en nuestro recorrido, hasta determinar

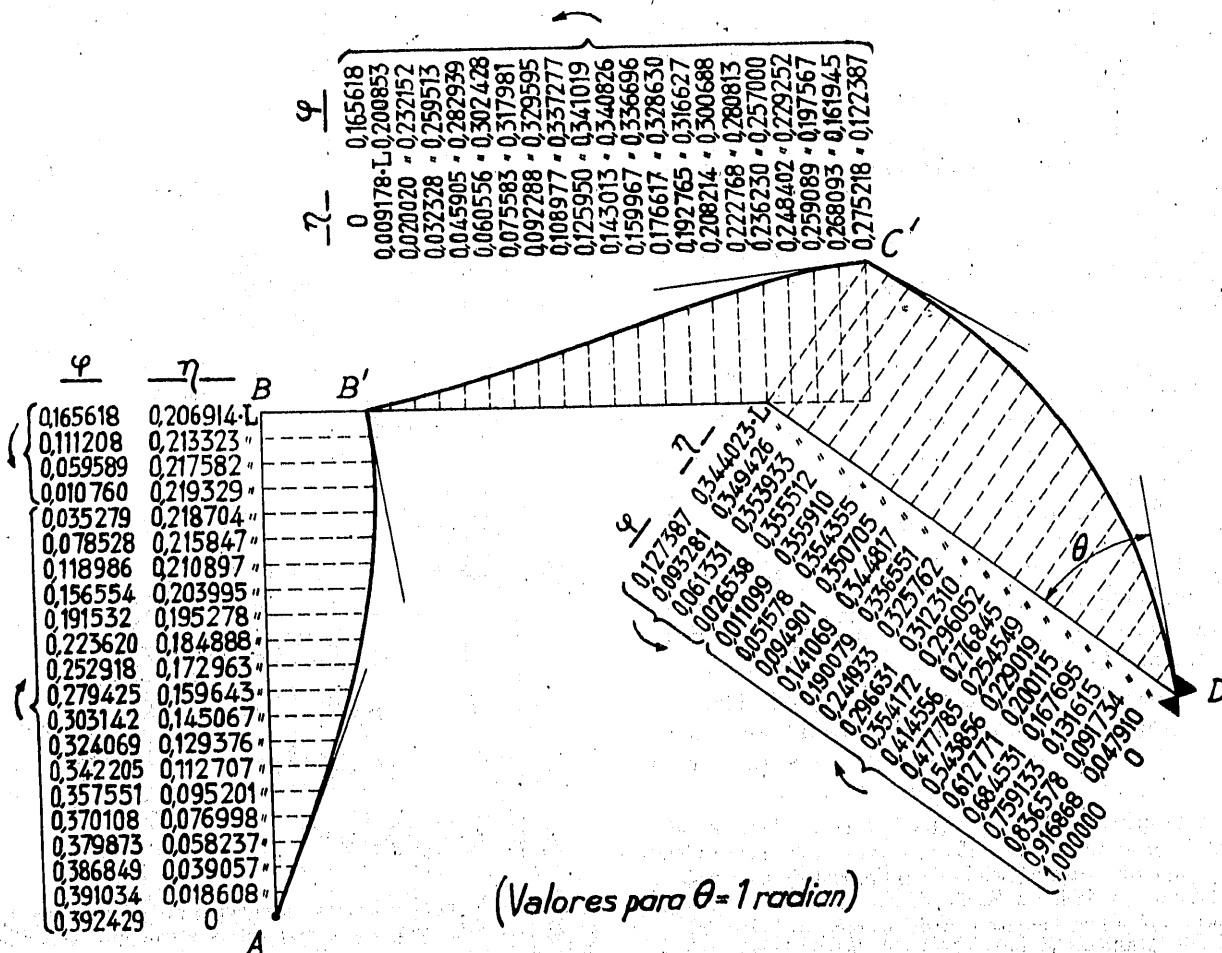


Fig. 36. — Deformaciones debidas a un giro del apoyo D . Y también líneas de influencia del momento flector en dicha sección D .

Observemos, además, que en esta figura 36 se ha tomado para el giro θ un ángulo unidad ($\theta = 1$ radian).

el momento en la sección D . Las demás componentes de la reacción en este apoyo se obtendrán por proyección de todas las anteriores fuerzas.

Para asegurarnos, podemos recurrir a la determinación de los esfuerzos axiales y cortantes en cada barra, estudiar el equilibrio de éstas y el equilibrio de los nudos. Todo resultará concordante y el diagrama parecerá cada vez más correcto, aunque, como por otra parte sucede con molesta frecuencia, los valores obtenidos para las hiperestáticas hayan sido erróneos, y, por consiguiente, todo ese diagrama sea elásticamente falso.

Y es que solamente en esa etapa previa de integración del trabajo elástico, su derivación respecto a las incógnitas V_A y H_A y la resolución del sistema que expresa que sus recorridos son nulos, es donde se venía teniendo en cuenta el carácter elástico de la estructura. Una vez halladas, y con ello hecha isostática la estructura, nos limitamos, cuando trazamos el diagrama de momentos y determinamos las restantes reacciones, a aplicar las condiciones de la estática del cuerpo rígido. Y todas las comprobaciones sobre el diagrama no son sino distintas expresiones de la aplicación de las tres ecuaciones del equilibrio estático a diversos trozos, considerados asimismo rígidos, de la estructura.

Si recordamos esto es para renovar la atención sobre la necesidad que existe, en todos aquellos métodos cuyo proceso de cálculo no deja huellas elásticas visibles, de que los resultados hayan de ser comprobados no solamente por las condiciones de la estática, sino que deben ser también objeto de comprobación mediante condiciones elásticas. Es decir, que necesitan, para que sus resultados puedan darse como rigurosamente válidos, un estudio elástico complementario.

Estudio comprobatorio que, como veremos, es sencillo de hacer si se recurre al más sintético y fecundo de los modos de tratar los problemas elásticos: el de la escuela suiza de 1875. (No resulta tan lejana esta fecha si se piensa que la más fundamental de las ecuaciones, la que liga la deformación y el momento flector en una sección, fué dada por Jacobo Bernoulli en 1694.)

Con ello, los valores que nos expresan los ángulos girados por los diversos puntos de la estructura y los valores que nos expresan los recorridos de cualquier punto de las barras, medidos según direcciones normales a cada una de dichas barras, son, asimismo, los valores que nos expresan el momento flector M_D^f , producido por la aplicación en cada punto de un par $\mathcal{M} = 1$, o los producidos por una fuerza $F = 1$ normal a cada barra. (Es el mismo artificio que se acostumbra a emplear en la presentación del principio de Maxwell al dar a los pares y fuerzas el valor unidad.)

La figura es así una tabla completísima de las líneas de influencia: nos da el momento M_D^f cuando, en cualquiera de los sesenta puntos anotados, aplicamos un par o aplicamos una fuerza.

Y la anterior figura 33, de la deformación producida por un descenso vertical del apoyo A , constituye, asimismo, por este teorema de Land, una completa línea de influencia de la reacción vertical, V_A , que en este apoyo producirá cualquier causa, momento o fuerza, actuando en cualquier punto de la estructura.

El estudio de la traslación horizontal de este apoyo nos hubiera conducido, asimismo, a una deformada utilizable como línea de influencia de la reacción horizontal H_A .

A este empleo de las deformadas como líneas de influencia, se presta de modo especial el método de los puntos fijos, pues, como ya hemos señalado, su operación primera, recorrido de la estructura para determinación de rigideces, es precisamente un estudio, y una valoración, de la transmisión de las deformaciones a lo largo de la estructura.

(Continuará.)