

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,

Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un más claro y lógico proceso para el estudio de los efectos debidos a la movilidad de los nudos. Conocidos los puntos fijos, la sucesiva desnivelación entre los dos extremos de cada barra conduce, mediante operaciones directas, al diagrama buscado. Y pone de manifiesto la identidad del proceso seguido por los métodos de aproximaciones sucesivas con el que venían ya siguiendo los métodos directos.

IV

En la anterior exposición se ha examinado solamente el caso de estructuras con nudos inmóviles (1). Ver cómo tienen en cuenta los métodos directos la libertad de traslación de los nudos es el objeto de lo que sigue.

* * *

Algunas consideraciones previas sobre cuáles son las limitaciones que a esta libertad de traslación hemos, implícitamente, impuesto creo que no resultarán ociosas.

El alcance de la hipótesis inicial de que las piezas solamente sufren deformación por la acción de los momentos flectores y se comportan como cuerpos rígidos frente a los esfuerzos axiales y a los esfuerzos de corte, no se reduce al de facilitar una mayor sencillez operatoria, sino que dicha hipótesis imprime un carácter muy particular a la estructura al convertir a ésta en una mezcla del cuerpo elástico, a estudiar por el principio de la superposición, y del cuerpo rígido de la mecánica racional. Esa hipótesis condiciona por completo cuanto sobre las traslaciones de nudos luego se dice y se deduce siguiendo consideraciones puramente geométricas.

Una cierta barra, AB , de estas estructuras está sometida (fig. 17-a)) a la acción de una fuerza, F . Refiramos las deformaciones de la barra a su extremidad B , por ejemplo. Haciendo el traslado de dicha fuerza (de componentes T y N) a todos y cada uno de los puntos de la fibra media de la barra, se irán obteniendo las características de tensión, M'' , N y T , en cada sección, con las que la Resistencia de Materiales estudia las deformaciones elementales. En estas piezas, tan particulares, solamente el momento flector M'' produce deformación elástica, que en cada

elemento de longitud, ds , será un giro relativo entre sus caras de valor:

$$d\theta = M_x'' \cdot \frac{ds}{EI}, \quad [31]$$

alrededor del centro de gravedad de estas secciones. (A todas cuantas fuerzas F , F_1 , F_2 ... que, pasando por el punto p tengan igual componente tangencial, T , les corresponderá un diagrama de momentos flectores idéntico y provocarán, por tanto, idéntica deformación.)

Si, como indica la figura 17-b), imaginamos abatido noventa grados el diagrama de momentos flectores y representamos, en vez de los valores M_x'' , los valores $\frac{M_x''}{EI}$, el área rayada de base ds y de altura $\frac{M_x''}{EI}$ es precisamente el valor del giro elemental [31].

Este diagrama sirve, pues, como diagrama de los vectores que representan las rotaciones de los diversos trozos elementales. Su área total nos da la suma de todas las rotaciones elementales; es decir, la rotación Θ_B^A que la sección A ha experimentado respecto a la sección de referencia B :

$$\Theta_B^A = \Sigma \frac{M_x''}{EI} ds = \frac{M_A'' + M_B''}{2} \cdot \frac{L}{EI}. \quad [32]$$

(Este ángulo es también, por consiguiente, el que forman entre sí las tangentes en los extremos A y B , a la elástica de la barra.) Dicha rotación [32] tendrá lugar alrededor del centro de gravedad de todos esos vectores; es decir, alrededor de un punto π de la fibra media de la barra. (La posición de este punto está acotada en la figura 17-a), y en dicha figura se ha señalado también cómo esta posición de π es función puramente geométrica de la posición del punto de paso, p , de la fuerza solicitante.)

En la figura 17-c) aparece representada la elástica de la barra, tanto si como referencia tomamos el ex-

(1) Y dentro de ellas el de estructuras en malla abierta. Por el momento continuaremos refiriéndonos a este tipo de estructuras, dejando para después las de malla cerrada

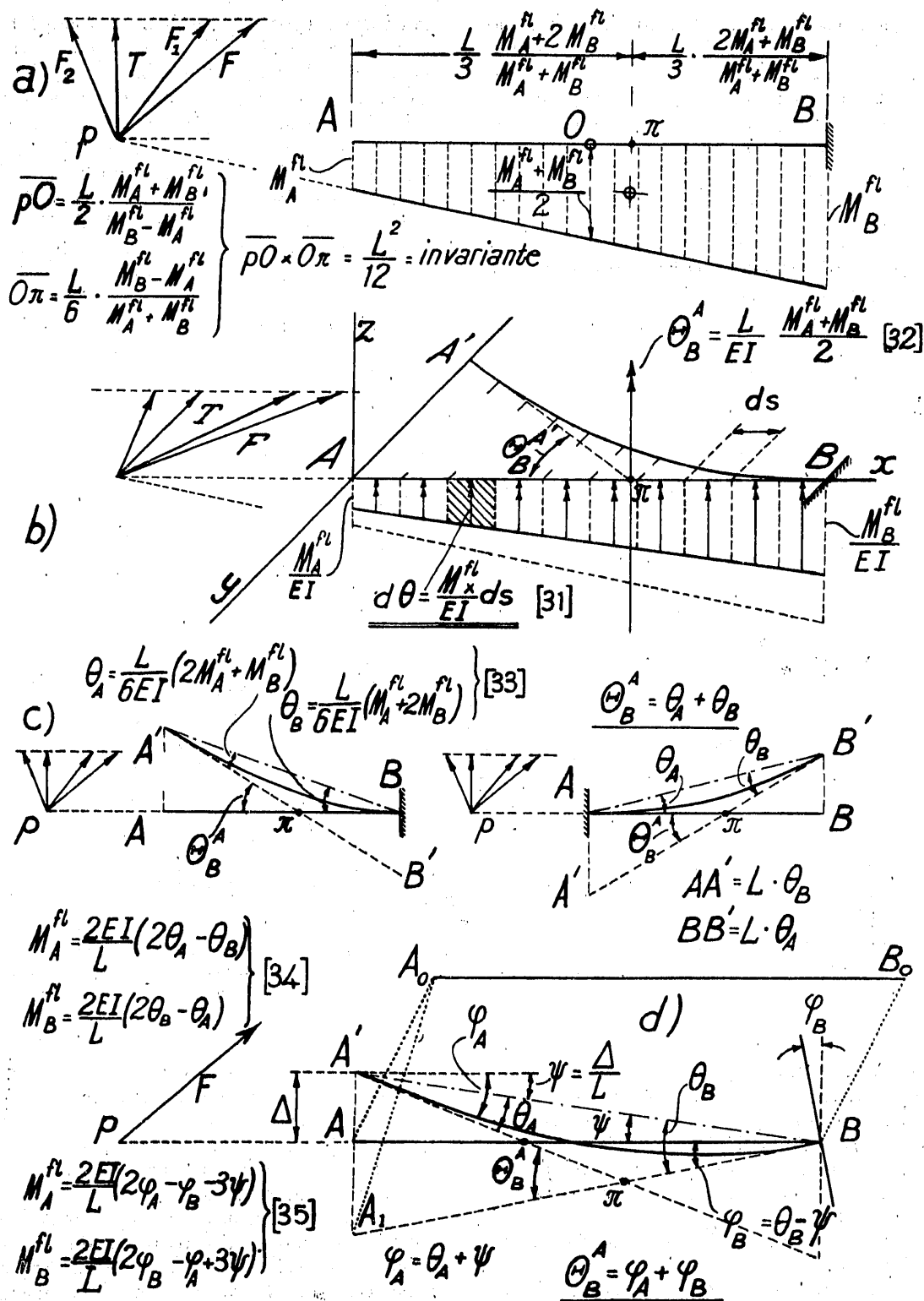


Fig. 17. — Pieza recta sometida a una ley lineal de momentos flectores. En a) se anotan algunos valores geométricos del trapecio. La b) recoge la idea base de la Estática gráfica, resultando, como consecuencia inmediata de a) y b) los grupos [33] y [34] de la figura c); que ligán los momentos flectores y los giros relativos de los extremos. Al introducir Otto Mohr, en 1892, como incógnitas el "giro ψ de la barra" y los valores φ_A y φ_B de los giros absolutos obtuvo, figura d), el sistema [35], que varios lustros después sería presentado como originalísimo *slope deflection method*.

tremo B como si es el extremo A el considerado como fijo. Tanto en uno como en el otro caso cada punto de la fibra media de la barra sufre como movimiento el debido a una rotación cuyo centro es siempre otro punto del eje de la barra. Como quiera que, condición básica de la elasticidad, todos estos giros y movimientos son infinitesimales, cada punto de la fibra media se ha movido según una dirección normal al eje de la barra y en particular las secciones A y B toman las posiciones A' y B' , definidas por las traslaciones AA' y BB' normales a la barra y por el valor θ_B^A del giro experimentado por dichas secciones.

En general, la barra no tendrá ninguna de sus

tantáneas, cuyos centros han de estar forzosamente situados sobre AB . Y en particular, vemos que el recorrido relativo $A'A'$ realizado por el extremo A ha de tener lugar según una dirección normal a la primitiva orientación que tenía la barra.

Si consideramos una célula de una estructura con un solo grado de movilidad, como la de la figura 18, formada por piezas rectas y de este especialísimo material, que sólo se deforma bajo la acción de los momentos flectores, podemos conocer sin estudio elástico ninguno la relación entre los recorridos de los nudos.

Dado que este recorrido ha de tener forzosamen-

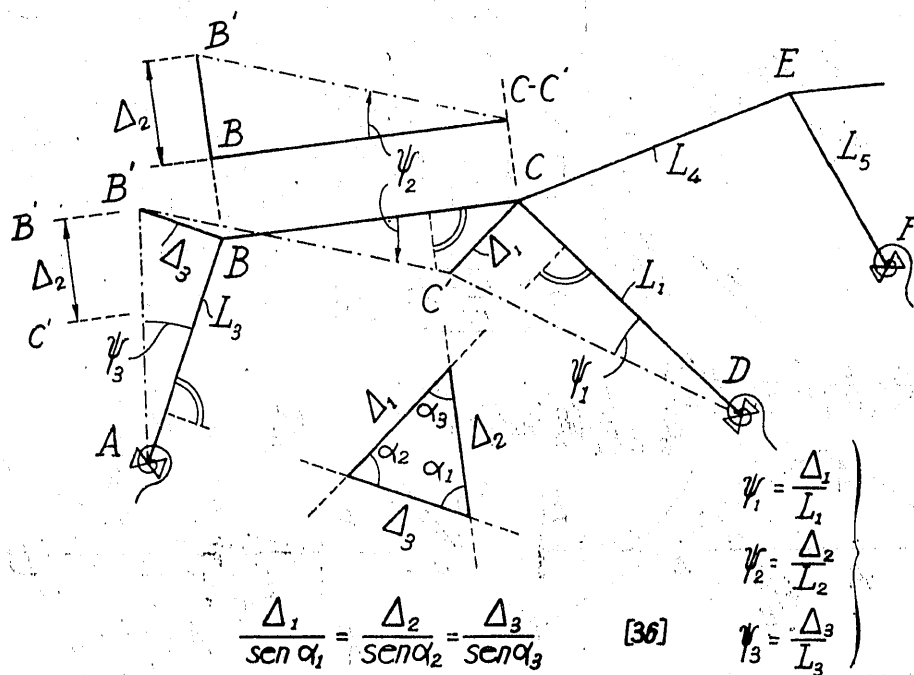


Fig. 18. — Al no existir deformaciones por esfuerzos normales ni tangenciales, las tres barras de la célula $ABCD$ (sea cualquiera la causa que actúe sobre la estructura $ABCDEF$, y el punto de la misma en el que esté aplicada), se deformarán de modo que las traslaciones normales relativas entre sus extremos estarán en la relación [36], constante y dependiente tan sólo de la orientación de dichas barras.

extremidades rígidamente sujeta, sino que a consecuencia de las deformaciones del resto de la estructura, por ejemplo, de la parte situada a la derecha de B (fig. 17-d)), pasa la barra desde la situación inicial A_0B_0 a la situación A_1B , y a este movimiento de arrastre que sufren los puntos de la barra vienen a sumarse los debidos a las deformaciones que en ella misma provoca la fuerza F , hasta hacerla tomar la elástica final $A'B$.

El giro instantáneo del extremo B_0 , que es el que ha arrastrado la barra en su movimiento, podemos descomponerlo en una traslación paralela (A_0A , B_0B) y un giro alrededor de B .

Una vez efectuada dicha traslación paralela los diversos puntos de la fibra media de AB experimentarán, pues, como movimiento unas rotaciones ins-

te una dirección normal a la de la barra, basta trazar tres rectas cualesquiera ortogonales con las tres barras de la célula para tener definida la relación $\Delta_1:\Delta_2:\Delta_3$ [36], que han de guardar entre sí. (E idénticamente se obtendrá la relación $\Delta_1:\Delta_4:\Delta_5$ de la siguiente célula, etc., etc.).

Observemos, además, que tanto en A como en B el empotramiento elástico representado (fig. 18), puede variar desde la articulación pura al empotramiento perfecto. Las barras pueden ser de inercia constante o de inercia variable. Las cargas a que sometamos la estructura pueden ser cualesquiera y pueden estar aplicadas en nudos o en puntos de las barras también cualesquiera. Las elásticas serán diversas en cada caso; pero, con tal que las barras sean rectas, siempre se verificará entre los recorridos de los nu-

dos esa relación [36], que tan sólo depende de la dirección de las barras y ni siquiera de la longitud que éstas tengan. (Cuando se introduce el concepto del "giro Ψ de la barra", estos giros Ψ vienen ya afectados, por su misma definición, por la longitud de las barras correspondientes).

En todas las posteriores figuras, en las que los nudos se han podido trasladar libremente, se ha cuidado de representar los centros alrededor de los cuales tienen lugar las rotaciones instantáneas de dichos nudos. Como se verá, es distinto para cada caso de sollicitación el giro por ellos experimentado (ángulos φ), y la posición del centro (radios r), alrededor de los cuales tienen éstos lugar. Pero entre los recorridos de los diversos nudos, es decir, entre los productos $\Delta = \varphi \cdot r$, se ha de verificar necesariamente la relación geométrica [36] antes obtenida. (Creemos más claro establecer directamente esta relación, como indica la figura 18, que el hacerlo recurriendo al concepto de movimiento de una cadena cinemática).

Vemos, pues, que la libertad de movimiento de los nudos, cuando solamente hay deformaciones por la acción de los momentos flectores, está restringida por una condición geométrica sumamente sencilla.

* * *

Antes de continuar, puede resultar de interés poner de manifiesto la sencillez con que, mediante la anterior figura 17, son deducibles las diversas ecuaciones elásticas de la barra recta. Las distancias $A\pi$ y πB (fig. 17-a)) son conocidas por geometría elemental. El giro total entre extremos Θ_B^A tiene el valor [32]. Los movimientos de A y B , respecto a la tangente en B y a la tangente en A , respectivamente, tendrán, por tanto, los valores:

$$AA' = \frac{L^2}{6EI} (M_A^{f'l} + 2M_B^{f'l}) = \theta_B \cdot L;$$

$$BB' = \frac{L^2}{6EI} (2M_A^{f'l} + M_B^{f'l}) = \theta_A \cdot L,$$

valores que nos definen los ángulos θ_B y θ_A que la cuerda de la elástica forma con las tangentes a dicha elástica en B y en A .

A estos ángulos θ_A y θ_B se les denominaba, por W. Ritter, *Ablenkungswinkel*, término poco afortunado, pero que al menos los identifica plenamente. En la figura les hemos denominado "giros relativos", queriendo con ello recordar que son los ángulos que las tangentes a la elástica forman con la cuerda de ésta:

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{L}{6EI} (2M_A^{f'l} + M_B^{f'l}); \\ \theta_B &= \frac{L}{6EI} (M_A^{f'l} + 2M_B^{f'l}). \end{aligned} \right\} \quad [33]$$

A su vez, los momentos flectores los podemos expresar, en función de estos giros relativos, mediante el sistema equivalente:

$$\left. \begin{aligned} M_A^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_A - \theta_B); \\ M_B^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (2\theta_B - \theta_A). \end{aligned} \right\} \quad [34]$$

Al estudiar Otto Mohr los esfuerzos secundarios en estructuras metálicas trianguladas, ideó el expresar estos giros relativos en función de los giros absolutos φ_A , φ_B (*Knotendrehwinkel*) y del giro Ψ , al que denominó *Stabdrehwinkel*, y que continuamos denominando "giro de la barra", aunque sería más apropiado el denominarle "giro de la cuerda". Con esta denominación resultaría más patente que entre los ángulos θ_A y θ_B que toman los extremos respecto a la cuerda y estos ángulos, φ_A , φ_B y Ψ , existen, por definición, las relaciones:

$$\varphi_A = \theta_A + \Psi, \quad \varphi_B = \theta_B - \Psi,$$

y las igualdades:

$$\varphi_A + \varphi_B = \theta_A + \theta_B = \Theta_B^A.$$

Introducidas estas relaciones en el grupo [34], tenemos el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} M_A^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (2\varphi_A - \varphi_B - 3\Psi); \\ M_B^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (2\varphi_B - \varphi_A + 3\Psi); \end{aligned} \right\} \quad [35]$$

que es con el que opera Axel Bendixen ya desde 1914, y todos los posteriores continuadores de este "método de las deformaciones" (1).

(1) Al escribir estos grupos se han tomado como positivos los momentos y giros tal como aparecen en la figura 17. Si se adopta el convenio de signos de estos autores, es positivo el momento dextrórum $M_A^{f'l}$ y negativo el sinistrórum $M_B^{f'l}$. Positivos los giros dextrórum θ_A y φ_A , y negativos los θ_B y φ_B . Para el ángulo Ψ el convenio es el inverso: son positivos los giros de barra contrarios al movimiento de las agujas del reloj.

Con este convenio el grupo [35] toma la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} M_A^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (2\varphi_A + \varphi_B + 3\Psi); \\ M_B^{f'l} &= \frac{2EI}{L} (\varphi_A + 2\varphi_B + 3\Psi). \end{aligned} \right\} \quad [35-bis]$$

lo que facilita grandemente la aplicación práctica de estos "métodos de deformaciones", que el japonés Takabeya ha logrado automatizar, en 1930, de tal modo que directamente se escriben las tablas de los coeficientes de las ecuaciones.

La adopción por Mohr para el cálculo de estructuras metálicas trianguladas de los ángulos φ_A , φ_B y Ψ , en vez de los θ_A y θ_B , no supone aumento en el número de incógnitas, pues los giros ψ son, en dicho caso, conocidos: en primera aproximación se consideran las barras unidas por articulaciones perfectas y quedan sometidas exclusivamente a esfuerzos axiales. Determinados los valores de estos esfuerzos por un Cremona, el diagrama de Williot da las variaciones de forma de la estructura y de ellas se deduce el giro ψ de cada barra. En segunda aproximación se deducen, partiendo del grupo [35], los giros de cada nudo y los momentos a que quedan sometidas las barras. (Es éste uno de los ejemplos más típicos de estudio elástico mediante la superposición de las propiedades elásticas que la Resistencia de Materiales tiene que personalizar y distinguir para poder abordar el cálculo de las deformaciones elementales. Al equilibrio elástico de la estructura, cuando el material de ésta sólo se deforma por esfuerzos normales, se le superpone el equilibrio de esa misma estructura supuesta constituida ahora por un material deformable únicamente por momentos flectores).

En el cálculo de estructuras no trianguladas no se considera más deformación, en general, que la debida a los momentos flectores. En pocos casos, y muy particulares, pueden conocerse *a priori* esos valores de los giros de las barras. Pero ya hemos visto que en estructuras de un solo grado de movilidad (1) es conocida la relación que ha de existir entre las traslaciones de todos sus nudos, y por tanto, que basta fijar la traslación de uno sólo para que conozcamos las de todos los restantes, sea cual sea su número. Es decir, supuesto conocido el "giro" de una sola de las barras, quedan fijados todos los "giros de barra" restantes.

Estas estructuras podrán estudiarse superponiendo dos estados: 1.º, la estructura, sometida a sus cargas solicitantes, está, además, sometida a una fuerza P , que la inmoviliza, y 2.º, la estructura está solamente sometida a una fuerza $-P$, igual y contraria. La superposición nos conduce así al estado real: la estructura, sin coacción ninguna, sometida únicamente a sus cargas de sollicitación.

Durante el proceso de resolución del primer estado no tenemos que preocuparnos de cuál es el valor de esa fuerza P . Nos basta con saber, mientras operamos, que es una fuerza tal que, inmovilizando los nudos, hace nulos los "giros de las barras". Quedan así como incógnitas los n giros de los n nudos. (En los "métodos de deformaciones" se plantearían para encontrarlos las n ecuaciones resultante de ex-

presar que en cada nudo ha de ser nula la suma de los momentos que sobre el nudo ejercen todas las barras que en él concurren). Con el método de los "puntos fijos", ya hemos visto cómo se resuelve este problema de estructuras sin traslaciones sin que sea necesario el planteamiento de ecuación ninguna. Una vez resuelto este problema elástico y hallado el diagrama de los momentos flectores, única causa de deformación de estas estructuras, es cuando por aplicación de una cualquiera de las condiciones de la Estática, generalmente la de nulidad de proyecciones de fuerzas, encontramos cuál es el valor de esa amable y desconocida fuerza F que nos ha estado impidiendo la traslación de los nudos.

El segundo estado se resuelve, tanto en "puntos fijos" como en "aproximaciones sucesivas", por una superposición y una falsa posición (1): supuesta conocida una traslación Δ_* de un nudo, quedan en función de ella conocidas todas las restantes. Se imaginan aplicadas primeramente unas sollicitaciones que, pieza por pieza, van deformando a las diversas barras sin producir en ellas giro de nudos, hasta lograr una deformada *que es correcta en cuanto a la relación entre traslaciones, aunque no lo es en cuanto a los giros*. Por esto, a continuación, esta estructura así deformada es sometida a la acción simultánea de unas sollicitaciones idénticamente contrarias a las anteriores y de una fuerza F_* (fuerza que no necesitamos, por el momento, conocer), que mantiene los nudos de la estructura en la posición a la que primeramente habían sido trasladados. La superposición de los momentos de estos dos casos (es decir, de los momentos que produjeron la traslación sin giro y que nos son conocidos *a priori* en función de Δ_* y de los debidos a los giros sin traslación y que son los que ya sabemos deducir), nos da el diagrama de momentos para el estado de estructura que deseábamos: estructura sometida solamente a una fuerza F_* , que produce unas traslaciones Δ_* . (Como siempre, el valor de F_* se obtiene, una vez conocido el diagrama de momentos, por aplicación de una de las ecuaciones de la Estática).

Finalmente y por simple proporcionalidad, de este diagrama se deduce el correspondiente precisamente al valor particular $-P$ de la fuerza, que es el que necesitábamos hallar. Las deformaciones Δ y los mo-

(1) En los "métodos de deformaciones" no suele recurrirse a esta duplicidad de estados, pues este segundo tiene el mismo número, $n+1$, de incógnitas que el caso inicial. A las n ecuaciones dadas por la nulidad de momentos alrededor de cada nudo se agrega, como ecuación complementaria, la que resulta de expresar una condición cualquiera de las de la Estática. En cada caso de carga se plantea, pues, directamente un sistema de $n+1$ ecuaciones entre los $n+1$ giros incógnitos.

(1) O sea, en estructuras en las que la traslación de todos y cada uno de sus nudos puede ser impedida mediante la aplicación, en uno cualquiera de dichos nudos, de una biela, o, lo que es lo mismo, de un apoyo deslizante, o dicho aún de otro modo, mediante la aplicación en uno cualquiera de los nudos de una fuerza de dirección arbitraria.

nientos flectores correspondientes a este valor particular serán:

$$\Delta = -\frac{F}{F_*} \Delta_* \quad M^{fl} = -\frac{F}{F_*} M_*^{fl}$$

y queda así determinado el segundo estado.

* * *

La primera parte, como hemos venido viendo, nos la resuelve, cómoda y rápidamente, el "método de los puntos fijos". Y esta segunda también se resuelve, directamente e incluso sin cálculos, gracias al conocimiento de los puntos fijos (1).

En la parte izquierda de la figura 19 se ve claramente uno de los modos de llevar a cabo el estudio de esta segunda etapa: estructura solicitada por

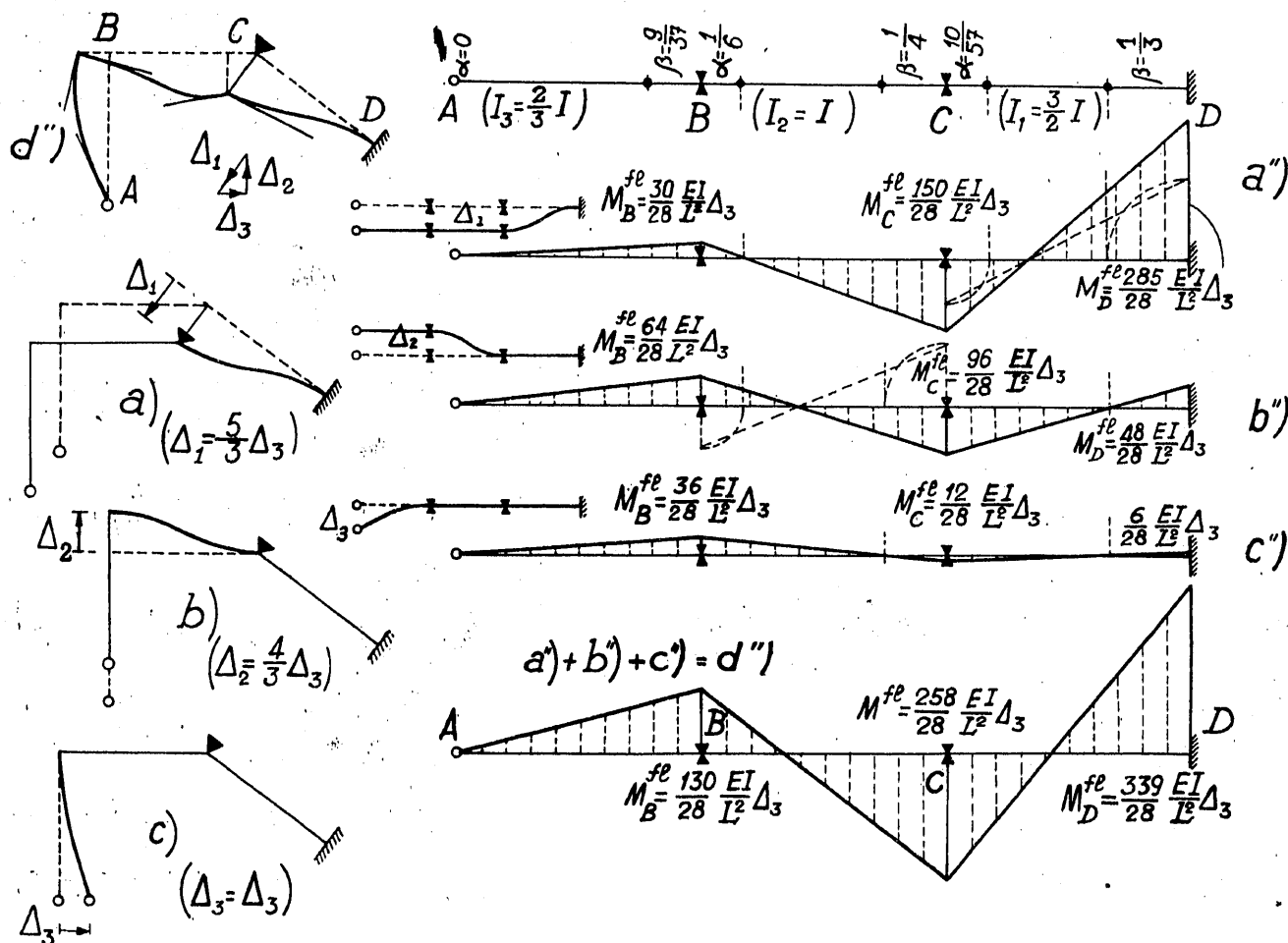


Fig. 19. — El caso de traslación de nudos, bajo la acción de una fuerza F , aplicada en un nudo cualquiera de la estructura, se reduce, gracias a los puntos fijos, al de distribución directa de los momentos flectores que un mismo tipo de carga induce en las diversas barras.

El problema de estructura con movilidad simple de nudos queda, pues, reducido al del estudio del efecto que en la estructura supuesta inmovilizada ejercen todas las posibles solicitaciones a aplicar (y determinación final de la fuerza F , que ha estado impidiendo, en cada caso, las traslaciones), y al estudio del efecto que en la estructura ejerce una cierta fuerza F_* (aplicada en el mismo nudo y en la misma dirección en que veníamos obteniendo las fuerzas F , que en cada caso de carga nos inmovilizaban la estructura).

una fuerza F en un nudo. Suelto el extremo A,

(1) Todo ello se realiza de un modo mucho más simple del que la longitud de los anteriores párrafos hace temer. Pero hemos creído que interesaba exponer el detalle del proceso íntimo que se sigue y el porqué de estas superposiciones de estados, por ser este proceso el mismo que adoptan y siguen los métodos de aproximaciones sucesivas y porque además, en la exposición de estos métodos, lo frecuente es que esta superposición de unas solicitaciones con las de sus iguales y contrarias quede oculta bajo la receta de: distribución del momento descompensado, cambiado de signo, en cada nudo.

vamos deformando una por una las barras; en tanto mantenemos, o consideramos, que tanto da, como indeformables todas las restantes, haciendo que entre los extremos de cada barra se produzcan unas traslaciones normales, sin giro de los nudos, de valor Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 (figs. 19, a, b y c). Para lograrlo, basta con que en los extremos de cada barra apliquemos unos pares de valor:

$$\frac{6EI}{L^2} \Delta, \quad [37]$$

y unas fuerzas de valor:

$$\pm \frac{12EI}{L^3} \Delta$$

(aunque nada nos interesa saber cuáles son los valores de tales fuerzas, pues, por ejemplo, en vez de aplicar estas dos fuerzas, normales a la barra flexible y en sus dos extremos, podemos reemplazar su efecto por el de una fuerza, de dirección prefijada, aplicada en un nudo escogido de antemano).

Caben ahora dos caminos: uno es el de superponer a cada una de estas posiciones, a, b y c de la estructura otras posiciones (a', b' y c', que en esta figura no se han representado), en las que, inmovilizada en los estados a, b, c, antes alcanzados mediante la aplicación de unas ciertas fuerzas, se encuentra además sometida a unos pares $\frac{6EI}{L^2} \Delta$ de valor igual y contrario a los iniciales. La superposición de $a + a' = a''$; $b + b' = b''$ y de $c + c' = c''$, nos conduce al estado buscado d'', en el que la estructura bajo la sola acción de una fuerza F se ha deformado, de modo que las traslaciones son precisamente las Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 inicialmente fijadas. (Este valor de F se deduce, como siempre, a posteriori).

Este proceso es el más directo si empleamos las propiedades específicas de los puntos fijos, pues, como más adelante se detalla, es posible obtener directamente mediante ellos los diagramas de momentos de los estados a'', b'' y c'' y basta su suma d'' para tener la solución buscada.

El otro camino, utilizando también elementos del método de los puntos fijos, es el seguido por Max Ritter. La superposición de a, b y c (fig. 19) nos da un estado en el que la estructura, sometida a todos esos pares $\frac{6EI}{L^2} \Delta$ conocidos y a unas fuerzas de fijación (reducibles a una sola y que, como venimos repitiendo, no necesitamos conocer), se ha deformado realizando sus nudos las traslaciones Δ prefijadas, pero en cuyos nudos no hay equilibrio de momentos. Y a este estado a) + b) + c) se superpone el estado que en la estructura produciría la aplicación, a un tiempo, de una cierta fuerza, capaz de mantener esas anteriores traslaciones, y de toda una serie de pares iguales y contrarios a los anteriores. Como re-

sultado de la superposición, llegamos igualmente al buscado: estructura sometida únicamente a la acción de una fuerza aplicada en un nudo y deformada de modo que las traslaciones son las Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 fijadas de antemano (1).

* * *

La determinación de cuáles son los momentos a que quedan realmente sometidos los extremos de una barra que, por su enlace con los restantes elementos estructurales, se encuentra elásticamente empotrada, cuando es *exclusivamente* esta barra la que sufre una traslación relativa de sus extremos, de valor Δ , es abordable de muchos modos. Pero quizá el más sencillo sea recurriendo a los grupos [22] y [23] de W. Ritter, que dejaron resuelto el caso general de viga directamente cargada. La carga sobre la barra consiste, en este caso, en la aplicación de dos pares que tienen el bien conocido valor:

$$\mathcal{M} = \frac{6EI}{L^2} \Delta. \quad [37]$$

Esta carga produce sobre la viga, cuando a ésta se la considera como simplemente apoyada, los giros característicos (ver figs. 11 y 3.^a):

$$\alpha_0 = \mathcal{M} \frac{L}{6EI}; \quad \beta_0 = -\mathcal{M} \frac{L}{6EI}, \quad [38]$$

es decir, unos giros:

$$\alpha_0 = \frac{\Delta}{L}; \quad \beta_0 = -\frac{\Delta}{L} \quad [38']$$

(como directamente hubiera podido escribirse).

Por tanto, las ordenadas M^a y M^b de la línea de cierre serán (ver figura 22 bis):

$$M^a = \alpha \frac{6EI}{L^2} \Delta; \quad M^b = -\beta \frac{6EI}{L^2} \Delta, \quad [39]$$

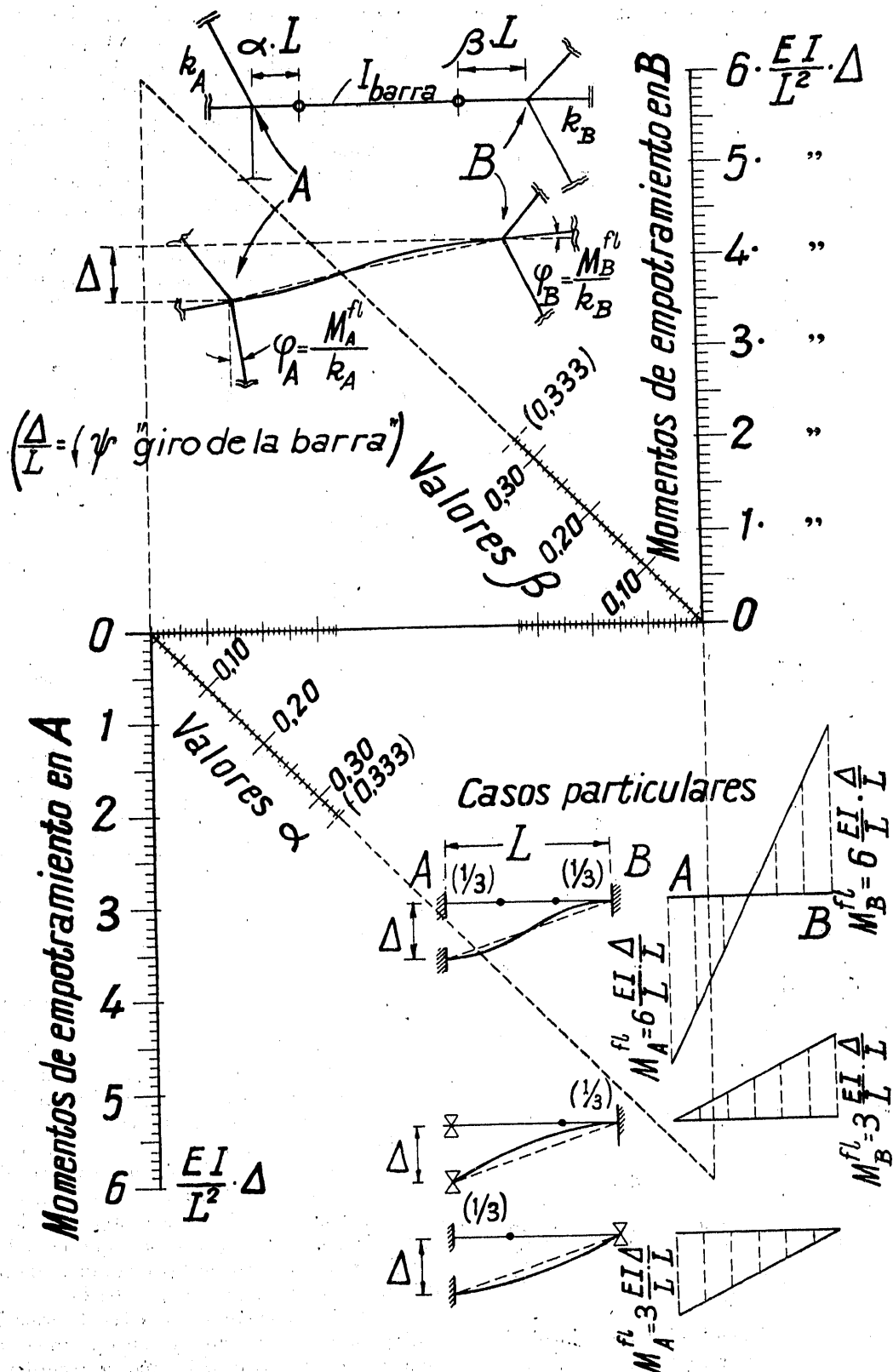
y los momentos de empotramiento elástico, M_1 y M_2 , buscados valdrán (ver [23]):

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \Delta; \\ M_2 &= -\frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \Delta; \end{aligned}} \quad [40]$$

expresiones cuyo cálculo es ciertamente bien sencillo.

Y aún se hace más sencillo mediante el ábaco XI,

(1) Se nos dirá que éste es precisamente (aunque no acostumbren a mostrarlo con claridad), el camino adoptado por los métodos de aproximaciones sucesivas. Exacto. Pero no está de más el precisar que fué Max Ritter, desde el año 1911, el que nos lo dejó abierto, y tanto para estructuras con un grado de movilidad, *einstöckige Rahmen*, como para las de múltiple grado de movilidad, *mehrstöckige Rahmen*.



Abaco XI.—Viga elásticamente empotrada, uno de cuyos extremos experimenta una traslación, perpendicular al eje de la barra, de valor Δ . (Resuelve este ábaco los casos de acción de una fuerza sobre un nudo, variaciones de temperatura, asientos de apoyos y, en general, todos aquellos que pueden reducirse a deformaciones sucesivas de la estructura consistentes en una traslación relativa entre extremos de cada barra.)

que adjuntamos, que permite leer, sin necesidad de cálculo alguno, los valores de estos coeficientes:

$$\frac{6\alpha}{1-\alpha-\beta}, \quad \frac{6\beta}{1-\alpha-\beta},$$

para todos los posibles valores de las abscisas unitarias α y β de los puntos fijos; es decir, para todos los posibles grados de empotramiento elástico de la barra.

Los diagramas a''), b'') y c'') de la anterior figura 19 no son más que la aplicación directa, barra tras barra, de este grupo [40], o del ábaco XI equivalente, al mismo pórtico de los ejemplos anteriores.

En la parte superior de esta figura se han representado las posiciones de los puntos fijos, obtenidos en la inicial figura 6.^a, y recordado asimismo cuáles son los valores del momento de inercia de cada barra. Las traslaciones relativas entre nudos de cada barra han sido expresadas todas ellas en función de la traslación Δ_3 entre los nudos A y B . Todos los momentos flectores nos vienen así expresados en función de la inercia tipo I y de la traslación Δ_3 .

Por ejemplo, los momentos M_C^{fl} y M_D^{fl} del diagrama a'') valen (operando con el grupo [40]):

$$M_C^{fl} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{\frac{3}{2}I}{1 - \frac{10}{57} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{5}{3} \Delta_3 =$$

$$= \frac{150}{28} \frac{EI}{L^2} \Delta_3 = 5,3571 \frac{EI}{L^2} \Delta_3;$$

$$M_D^{fl} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{10}{57} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{5}{3} \Delta_3 = -$$

$$- \frac{285}{28} \frac{EI}{L^2} \Delta_3 = -10,1786 \frac{EI}{L^2} \Delta_3$$

(o bien podemos leer en el ábaco XI, como coeficientes de M_C^{fl} y M_D^{fl} , los valores 2,14 y -4,07, respectivamente, y los momentos flectores se deducen del modo siguiente:

$$M_C^{fl} = 2,14 \frac{EI_{CD}}{L^2} \Delta_1 = 2,14 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{EI}{L^2} \Delta_3 =$$

$$= 5,35 \frac{EI}{L^2} \Delta_3;$$

$$M_D^{fl} = -4,07 \frac{EI_{CD}}{L^2} \Delta_1 = -4,07 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{EI}{L^2} \Delta_3 = -$$

$$-10,17 \frac{EI}{L^2} \Delta_3,$$

valores, como vemos, suficientemente aproximados).

En la figura 19 se ha representado, además, una sencilla construcción geométrica, con la que fácilmente se comprueban esos valores, obtenidos mediante el grupo [40] o mediante el ábaco, pues como se

ve en dichas ecuaciones, la relación entre los momentos M_1 y M_2 es la misma que existe entre las abscisas unitarias α y β de los puntos fijos.

Conocido el momento M_C^{fl} , basta con hacer su transmisión a los nudos siguientes para completar el diagrama de momentos. (El valor de M_B^{fl} , obtenido como producto de M_C^{fl} por el factor de transmisión, es asimismo comprobable gráficamente de modo inmediato).

De un modo análogo se determinan los diagramas b'' y c'' , correspondientes a la traslación relativa entre extremos de las barras BC y AB , respectivamente.

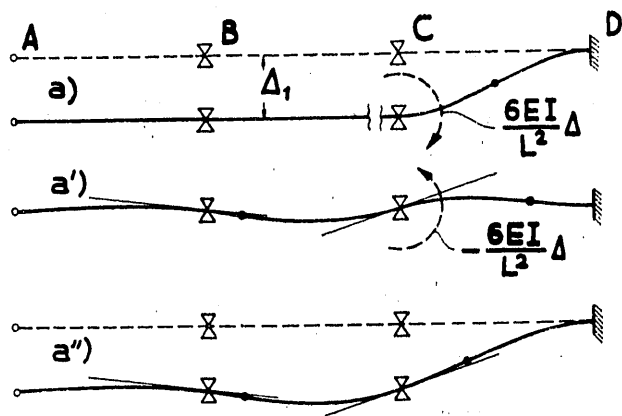


Fig. 20. — Representación del proceso seguido por M. Ritter y por los métodos de aproximaciones sucesivas. En a), traslación, sin giro, de los nudos. En a'), giro, sin traslación, de los nudos. (Esta segunda operación es la denominada: distribución del momento descompensado, cambiado de signo.) La suma de ambos, a''), da el estado real ocasionado por el descenso relativo entre los apoyos C y D . (Las ecuaciones [40] y el ábaco XI permiten llegar directamente a este estado.)

Todos estos diagramas los hemos representado como si con las barras del pórtico hubiésemos formado una viga continua (fig. 19), en la que, subiendo o bajando unos u otros apoyos, vamos haciendo que barra tras barra experimente entre sus nudos las traslaciones normales Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 prefijadas. Y en la figura 20 hemos representado, con esta misma forma de viga continua, la deformación inicial a) (traslación sin giro de nudos), la deformación intermedia a') (es decir, cuando mantenidas fijas las anteriores traslaciones los nudos pueden ya girar) y la deformación suma de ambas a'') = a) + a'), que es a la que corresponde el primero de los diagramas de momentos directamente obtenidos de las ecuaciones [40].

Tanto los momentos como las deformaciones obtenidas son los correctos, y con este modo de representarlas no hemos tratado sino de recordar, una vez más, el hecho de que durante el proceso de cálculo no nos debemos de preocupar de cuáles son los valores, ni en qué nudo ni con qué dirección están apli-

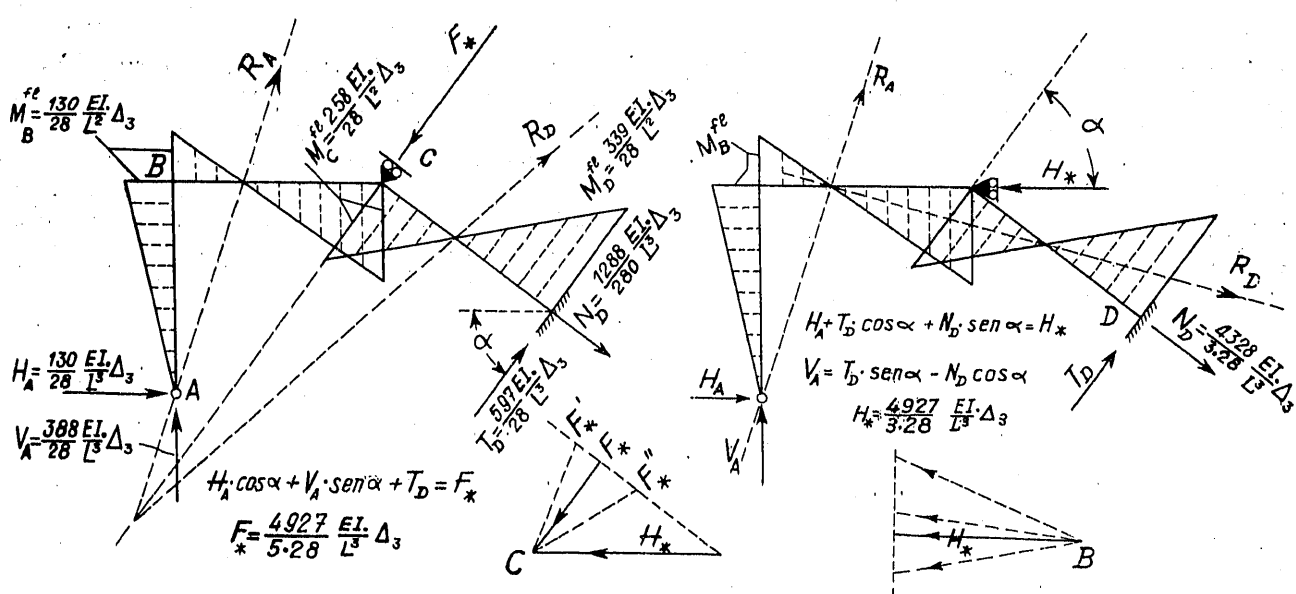
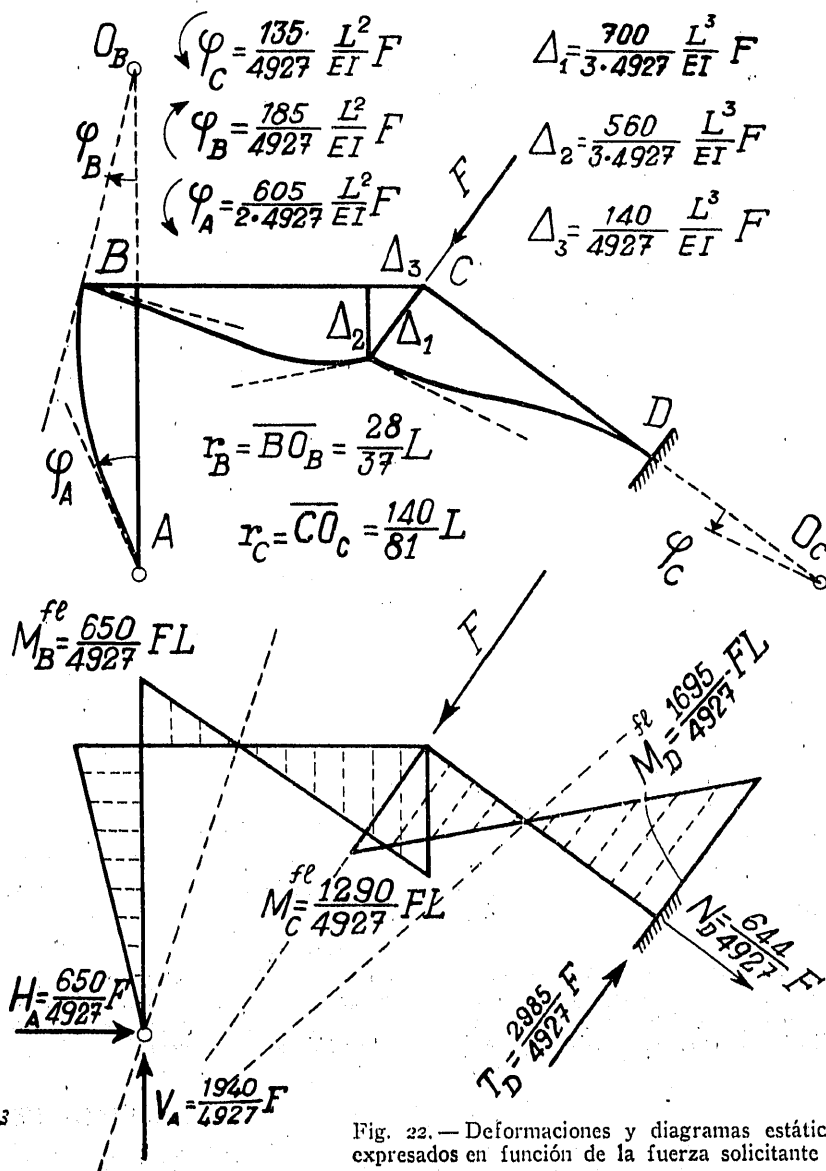


Fig. 21.—Entre las infinitas fuerzas que, aplicadas en el nudo B o en el nudo C, pueden producir en el pórtico las traslaciones Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , se han determinado los valores correspondientes a dos direcciones, F_* y H_* de fuerza (o biela o apoyo deslizante) aplicada en C.



cadast esas fuerzas de fijación intermedias que han permitido primeramente las traslaciones sin giro de nudos y después el giro de los mismos.

Es solamente en el momento final cuando es necesario volver a representar la estructura en su forma real (fig. 21), para obtener, mediante una de las condiciones de la Estática el valor de esa fuerza que ha deformado la estructura, haciendo que las traslaciones de sus nudos sean las Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 dadas.

Los resultados consignados en esta figura 21 no son todavía de directa aplicación, pues los momentos vienen expresados en función del recorrido atribuido a uno de los nudos y es menester tenerlos expresados en función, por ejemplo, de la fuerza F . Esta conversión, que es la *falsa posición* antes aludida, queda hecha en la figura 22 (al tener en cuenta la relación que la figura 21 nos da entre el recorrido Δ_3 y la fuerza F).

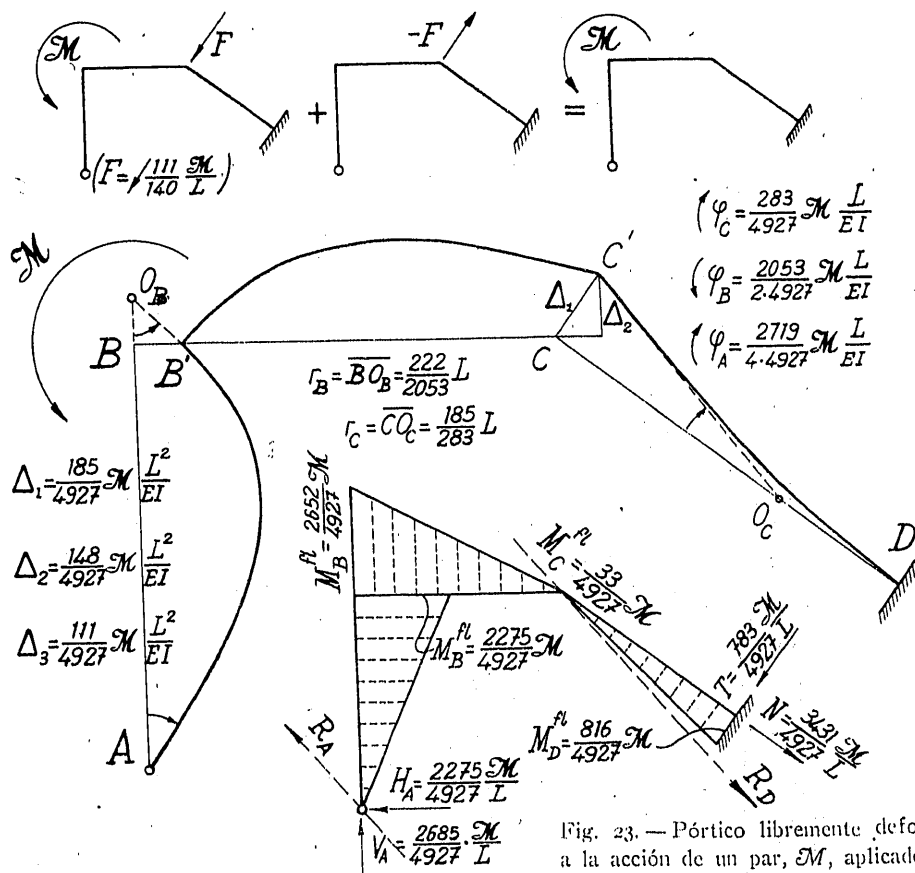


Fig. 23. — Pórtico libremente deformable sometido a la acción de un par, M , aplicado en el nudo B .

En realidad, como se anota al pie de la figura 21, estas deformaciones y este diagrama de momentos flectores a ellas correspondiente, pueden ser producidos por tantas infinitudes de fuerzas como nudos tengan estas estructuras (estructuras que por ahora son de un solo grado de movilidad; es decir, *einstöckige Rahmen*). Entre los valores de todas estas fuerzas existen las sencillas relaciones que se indican gráficamente en dicha figura y que permiten pasar del valor de una determinada fuerza, a conocer cuál debe ser el de otra de dirección dada que produzca iguales deformaciones y que puede estar aplicada en el mismo o en otro nudo cualquiera (1).

Es precisamente esta figura de las deformaciones y diagrama de momentos provocados por la aplicación de una fuerza F en un nudo la que nos completa el conocimiento que de la estructura nos daba la figura 6.^a. Cualquier caso de carga de la estructura es resuelto directamente, como ya vimos, por el "método de los puntos fijos" si a la estructura se la inmoviliza mediante una fuerza (cuyo valor F se deduce *a posteriori* en cada caso de carga). Basta sumar a las deformaciones y momentos así obtenidos los correspondientes a la aplicación de una fuerza $-F$ (fig. 22), para obtener los momentos y defor-

no hay interés en conocer las fuerzas de fijación si de entrada hubiéramos hecho notar que en estas estructuras las elipses de elasticidad propias de cada nudo son elipses de generadas a un segmento.

maciones que en la estructura produce realmente el caso de carga considerado.

Así, por ejemplo, en las figuras 7.^a y 8.^a quedaron anotados los momentos y deformaciones que en el pórtico producía la aplicación de un par M en el nudo B cuando al pórtico se le impedía la traslación de sus nudos. Y también, si como fuerza de fi-

El idéntico proceso nos conduce (fig. 24) al conocimiento de los momentos y deformaciones que sufre el pórtico cuando es solicitado por un par aplicado en el nudo C : en las figuras 7.^a y 10.^a quedó estudiado el efecto de este par, en tanto sus nudos quedaban inmovilizados por la fuerza allí consignada. Dando a F en la figura 22 el valor que ahora co-

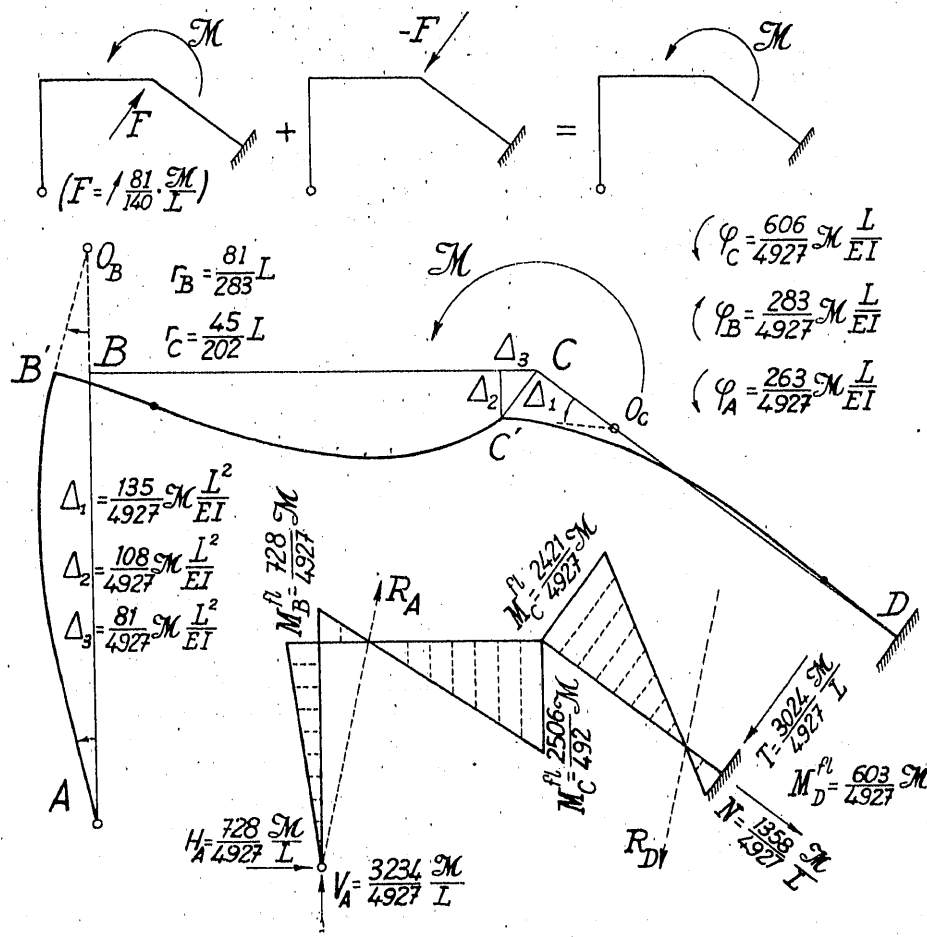


Fig. 24. — Pórtico libremente deformable, sometido a la acción de un par, M , aplicado en el nudo C .

jación tomábamos una aplicada en C y normal a CD , vimos que su valor resultaba ser:

$$F = \frac{111}{140} \cdot \frac{M}{L},$$

y dirigida en sentido descendente. Si en las expresiones de la figura 22 damos a F el valor:

$$F = -\frac{111}{140} \cdot \frac{M}{L},$$

igual y contrario y superponemos estas deformaciones y estos momentos flectores con los consignados en las figuras 7.^a y 8.^a, obtendremos los resultados definitivos anotados en la figura 23: pórtico libremente deformable sometido a un par aplicado en el nudo B .

responde, la superposición de uno y otro estado nos da el resultado real buscado.

* * *

Ha quedado puesta de manifiesto la utilidad que en el estudio de estas estructuras traslacionales en malla abierta son capaces de prestar los "puntos fijos" si adecuadamente se utilizan sus propiedades (i).

Idéntica utilidad prestan, como veremos, en el estudio de los efectos de temperatura y movimiento de apoyos.

(Continuará.)

(i) Y con ello, desvirtuada esa gratuita afirmación de que el método de los puntos fijos conviene solamente en el caso de estructuras no traslacionales, que se lee en diversos autores; por ejemplo, R. Guldán: *Rahmentragwerke und Durchlaufträger*. 4.^a edición, 1949.