

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,

Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor una interesante serie de ábacos mediante los cuales, utilizando las propiedades de los puntos fijos, se determinan directamente, sin necesidad de cálculo u operación alguna, los momentos de empotramiento elástico en los casos de sobrecargas variables más frecuentes en la práctica.

(Continuación.)

Estos ábacos III y IV dan, como vemos, la solución para una infinidad de sustentaciones elásticas de la viga, pero para un solo tipo de carga sobre la viga.

Lo frecuente será el tener que considerar tipos en los que la carga es variable y, por tanto, nos son necesarios ábacos que cubran esta infinidad de posiciones de la carga sobre la viga y, simultáneamente, la infinidad de sustentaciones elásticas posibles para la viga.

La figura 13 resume uno de los caminos que permiten lograrlo. La fuerza móvil P produce en la viga isostática, para una cierta posición (fig. 13-a), unos giros:

$$\alpha_0 = \frac{P L^2}{6 E I} \cdot \xi (1 - \xi) (2 - \xi) \quad \text{radianes} \quad [30]$$

$$\beta_0 = \frac{P L^2}{6 E I} \cdot \xi (1 - \xi) (1 + \xi) \quad \text{radianes}$$

que son función de la abscisa $x = \xi \cdot L$ del punto de aplicación de la fuerza.

En la figura 13-b, se han representado las líneas de influencia de estos giros, α_0 y β_0 , y finalmente, en la figura 13-c, y basta para ello un simple cambio de escala, las líneas de influencia representadas son las correspondientes a los valores:

$$6 K \cdot \alpha_0 = \mathcal{L}; \quad 6 K \cdot \beta_0 = \mathcal{R};$$

es decir, las líneas de influencia de los "términos de carga". (En el caso particular de esta figura 13, tienen como expresión:

$$\mathcal{L} = P L \cdot \xi (1 - \xi) (2 - \xi);$$

$$\mathcal{R} = P L \cdot \xi (1 - \xi) (1 + \xi),$$

cuyas dimensiones son, como siempre, las de un momento flector.)

La figura 13-c permite, pues, partiendo de la posición de la fuerza P , obtener los valores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ a leer en la vertical de P , y trazar seguidamente las "líneas en cruz". Conocidas las líneas en cruz, basta trazar las verticales por los puntos fijos, que a las sustentaciones elásticas de la viga corresponden, para

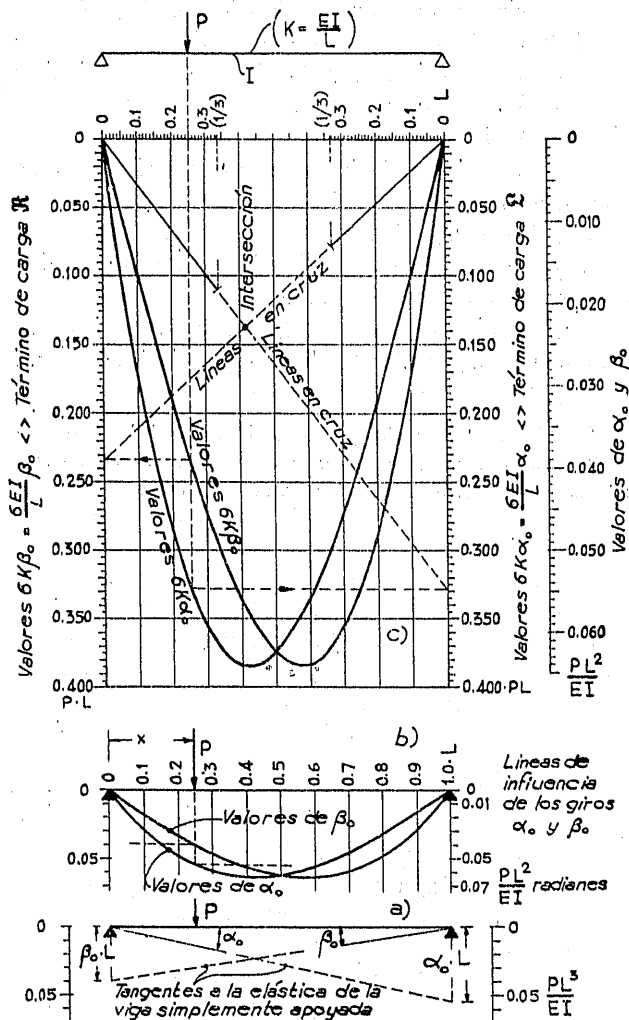
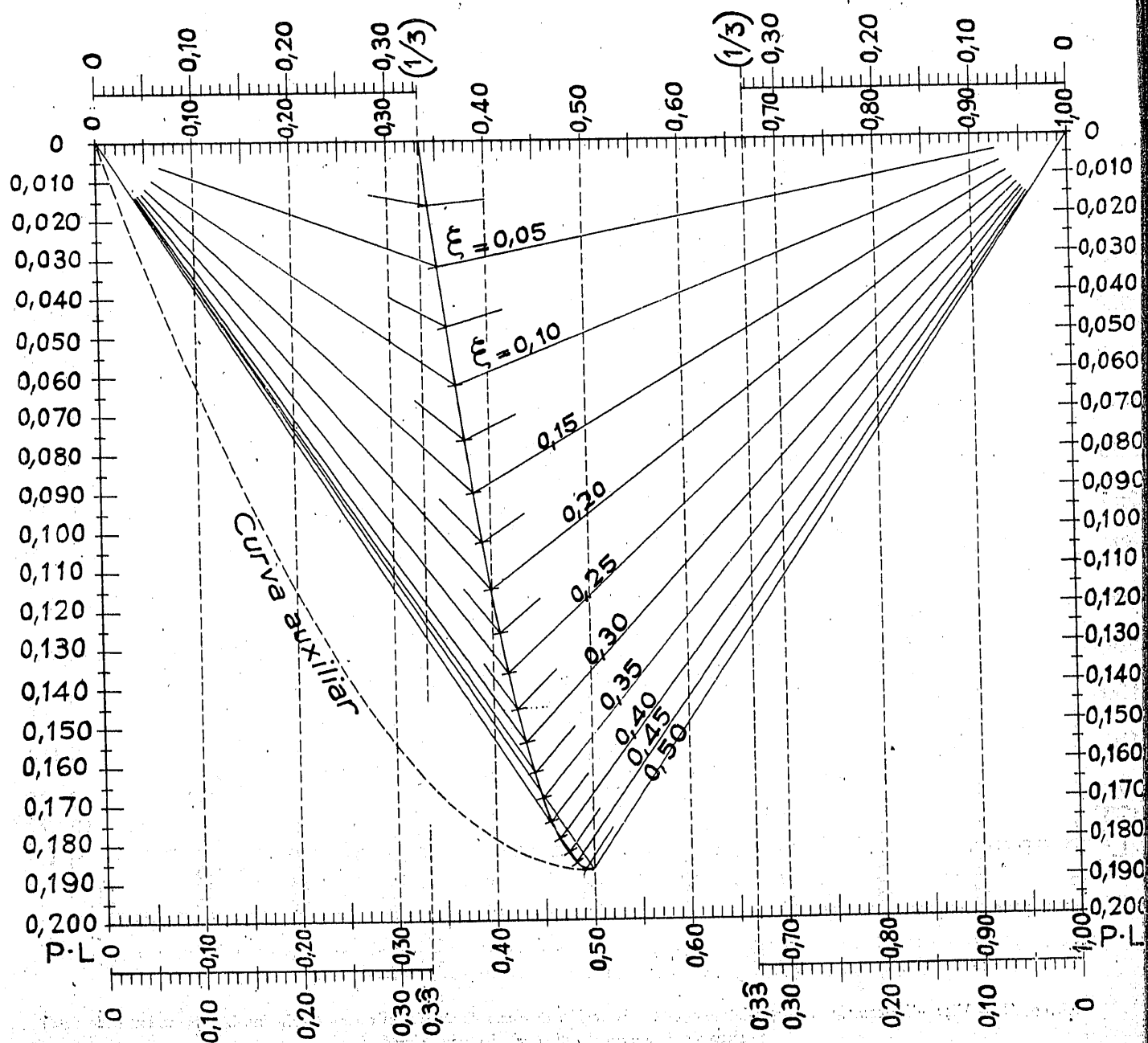
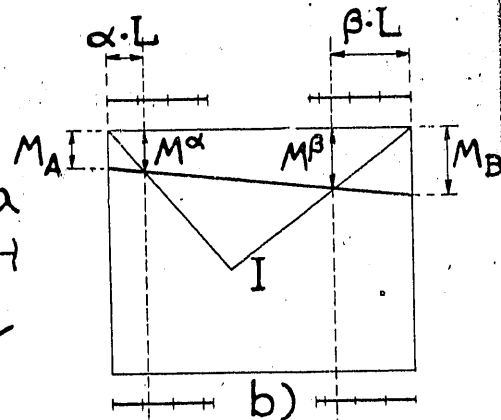
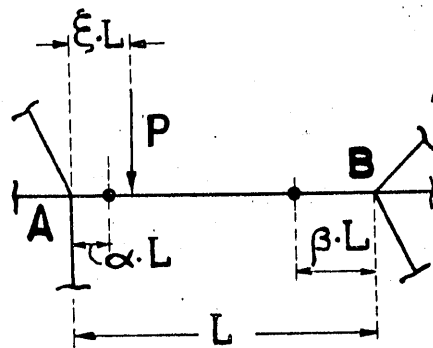
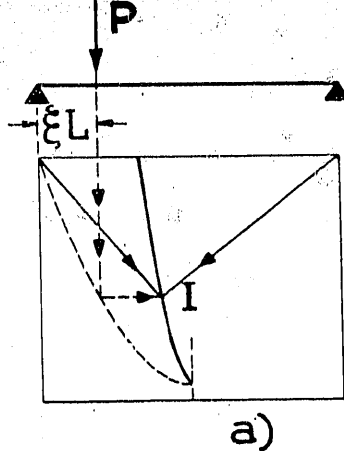


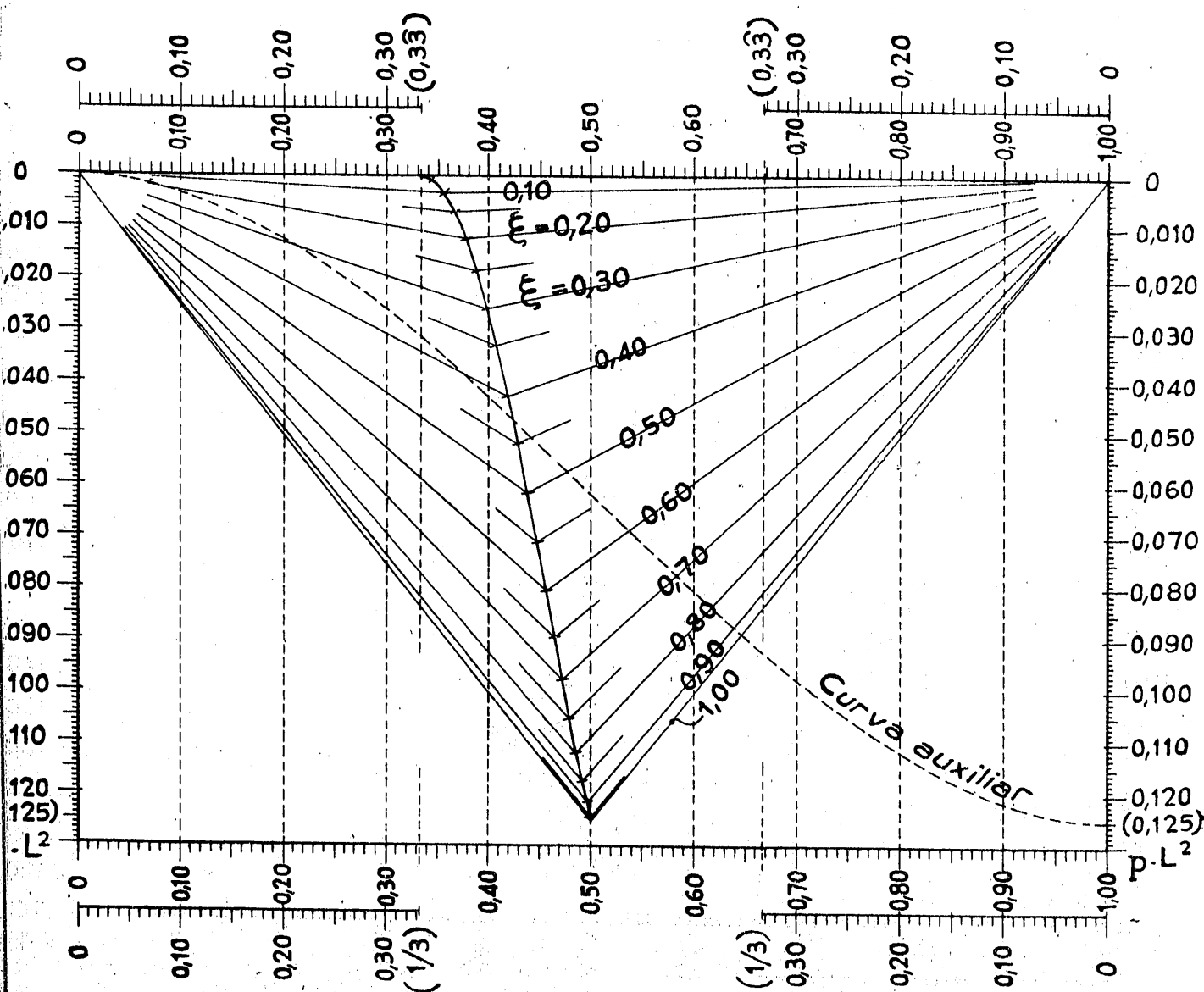
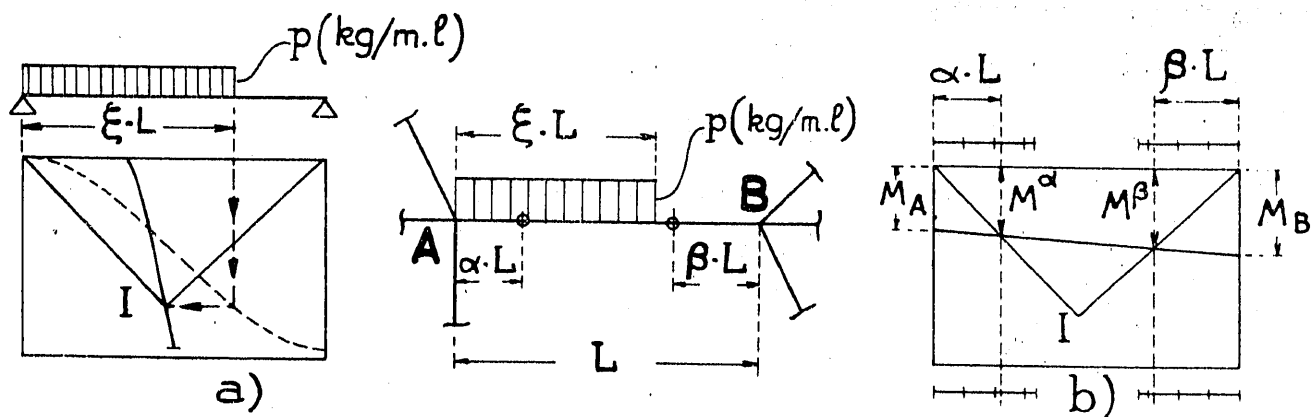
Fig. 13. — Aclaración del método empleado en la construcción de los ábacos siguientes.

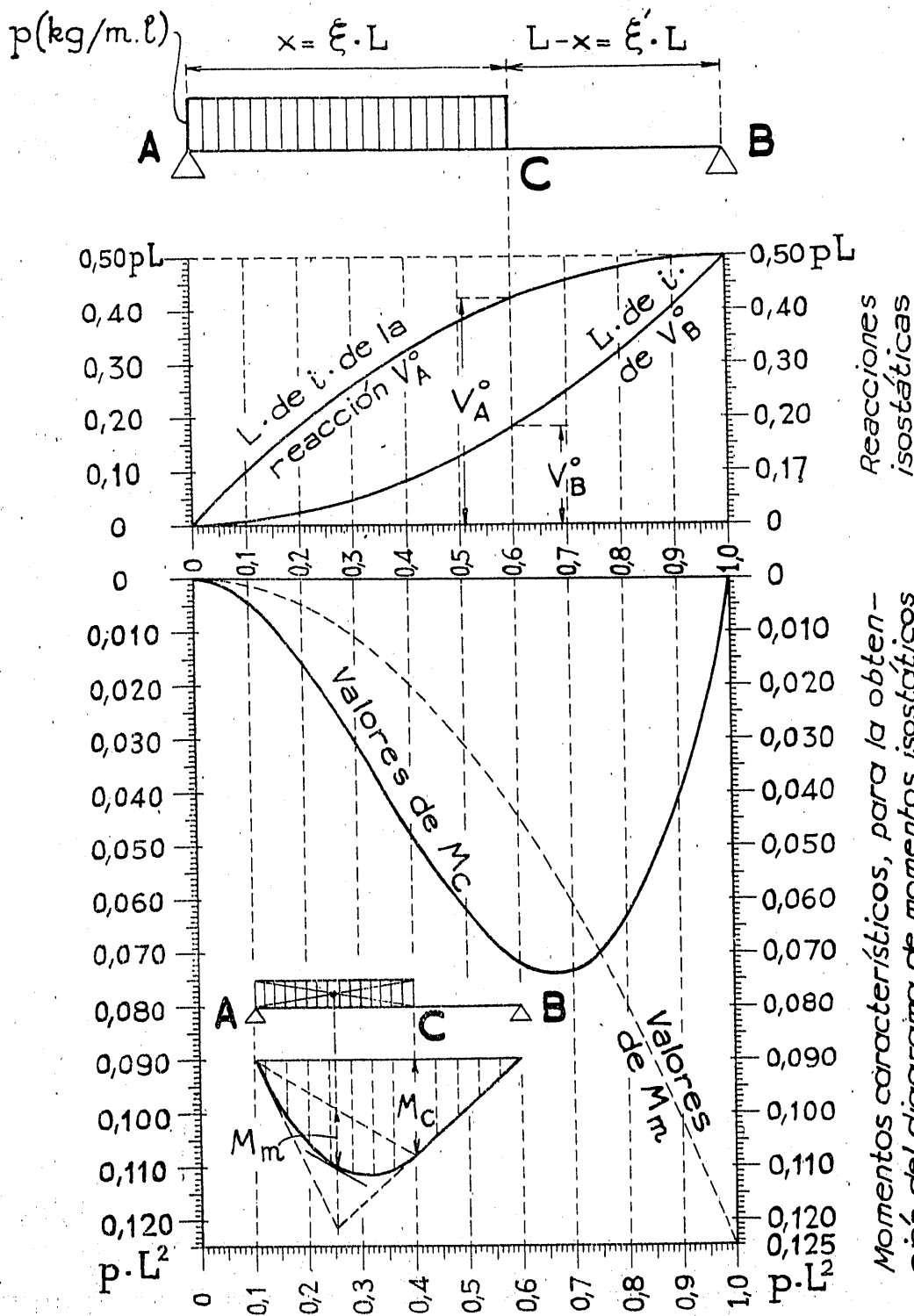
tener directamente los valores M^a y M^b que nos definen la línea de cierre y los momentos de empotramiento buscados.

La figura 13-c constituye, pues, un ábaco que, en rigor, satisface las necesidades inicialmente marcadas, pues nos proporciona los valores buscados para la infinidad de posiciones que puede tomar la fuerza exterior P y para las infinidad de grados

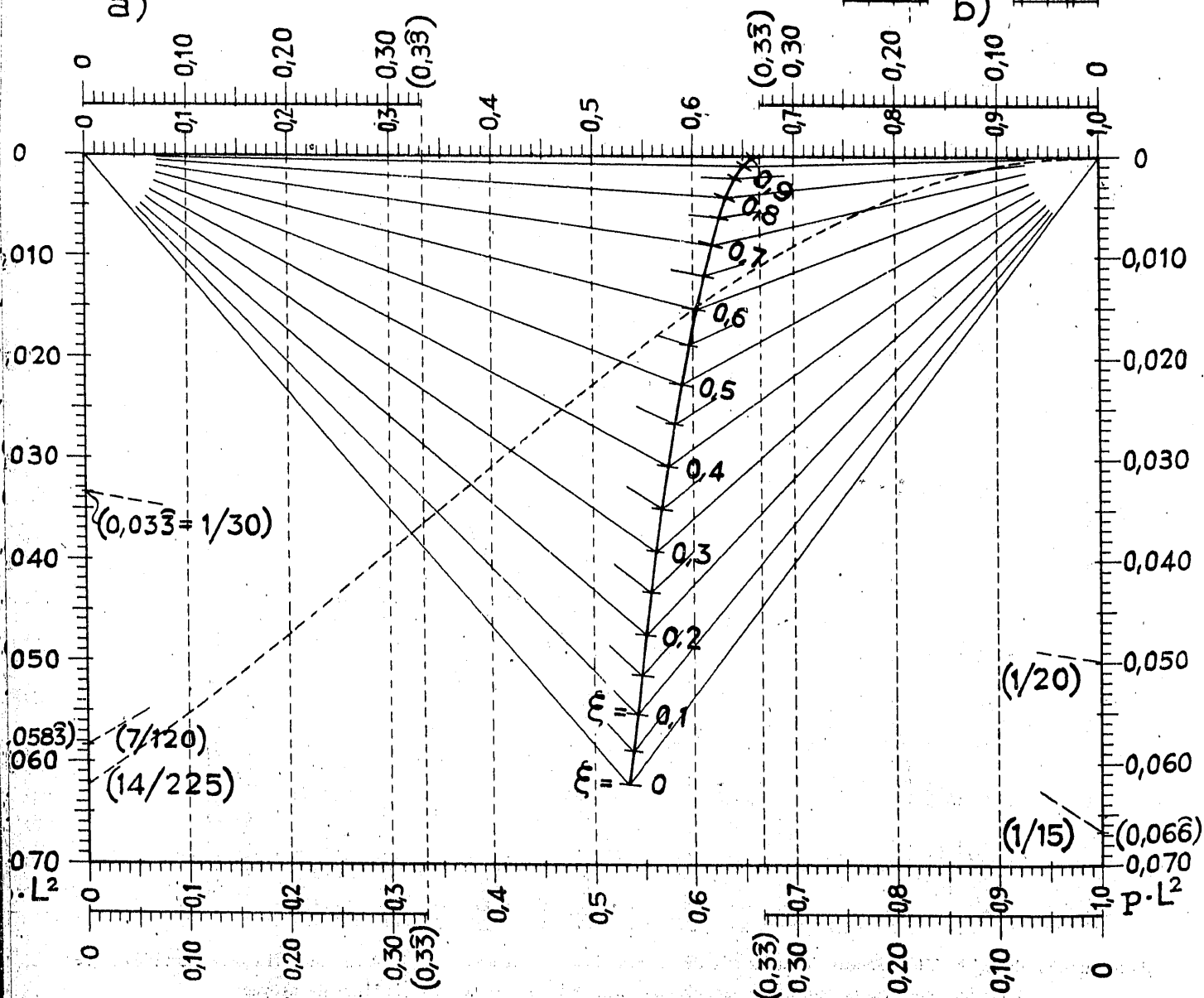
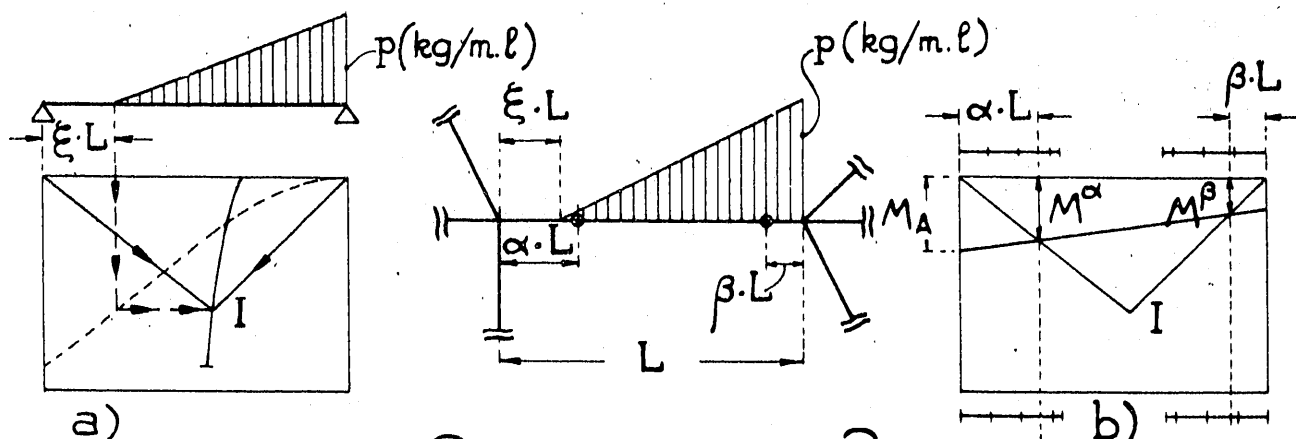


Abaco V. — Viga elásticamente empotrada, sometida a la acción de una fuerza móvil, P . Se marcarán primeramente las "líneas en cruz" correspondientes a la posición ξ de la carga, bien directamente, bien interpolando mediante la curva auxiliar, según detalle a). Las verticales por los puntos fijos nos dan la línea de cierre y los momentos de empotramiento elástico M_A y M_B , según detalle b).

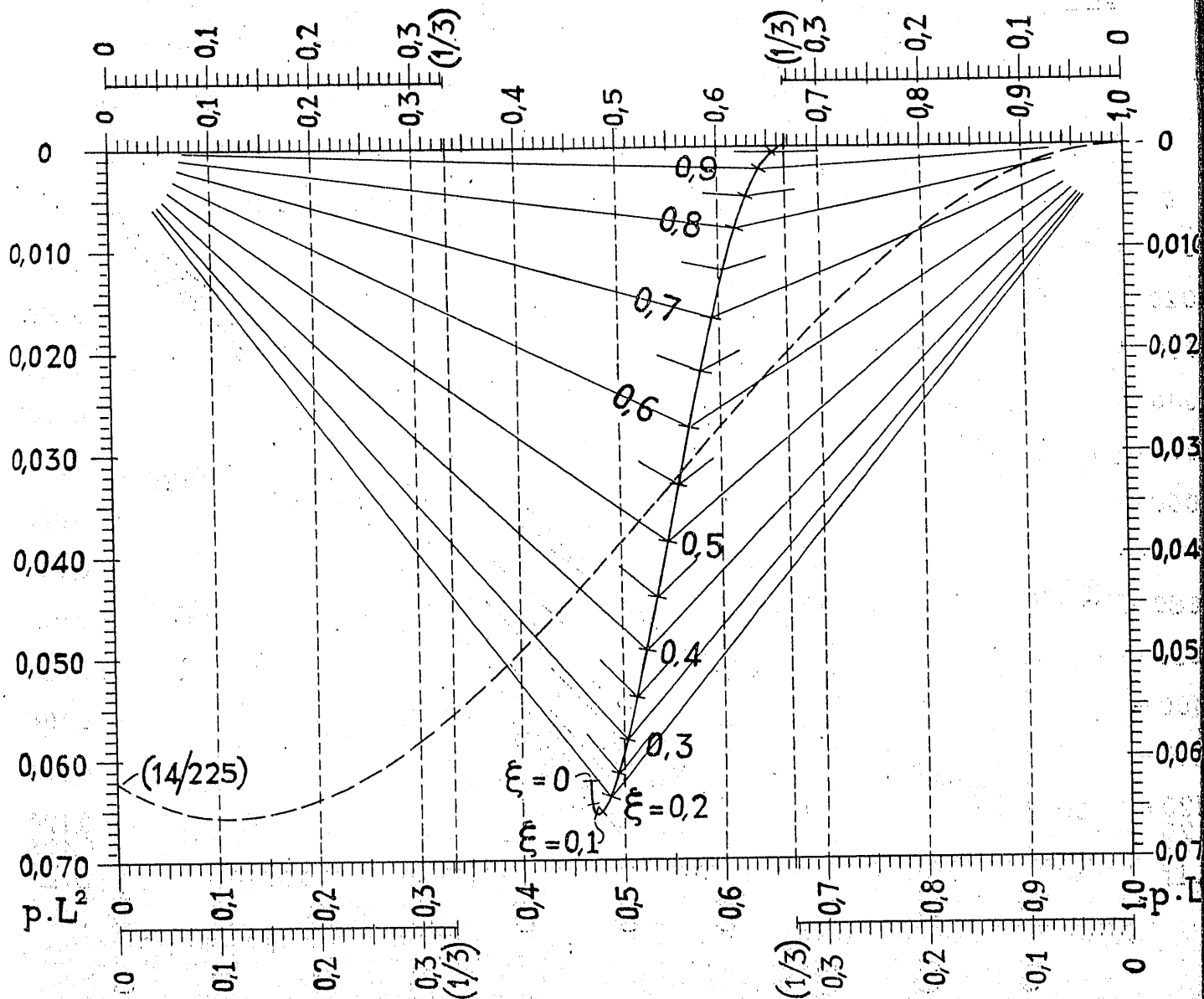
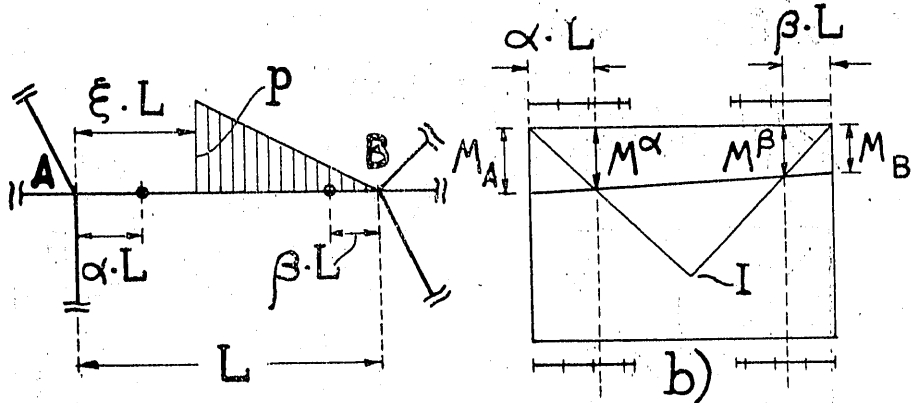
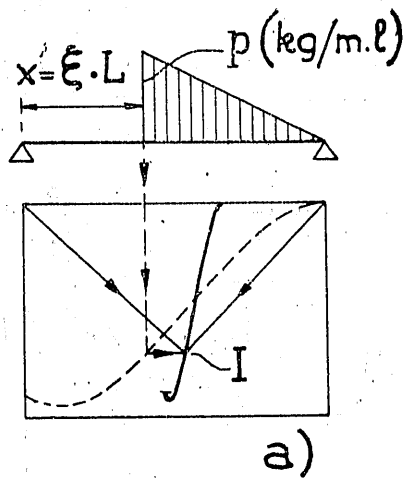




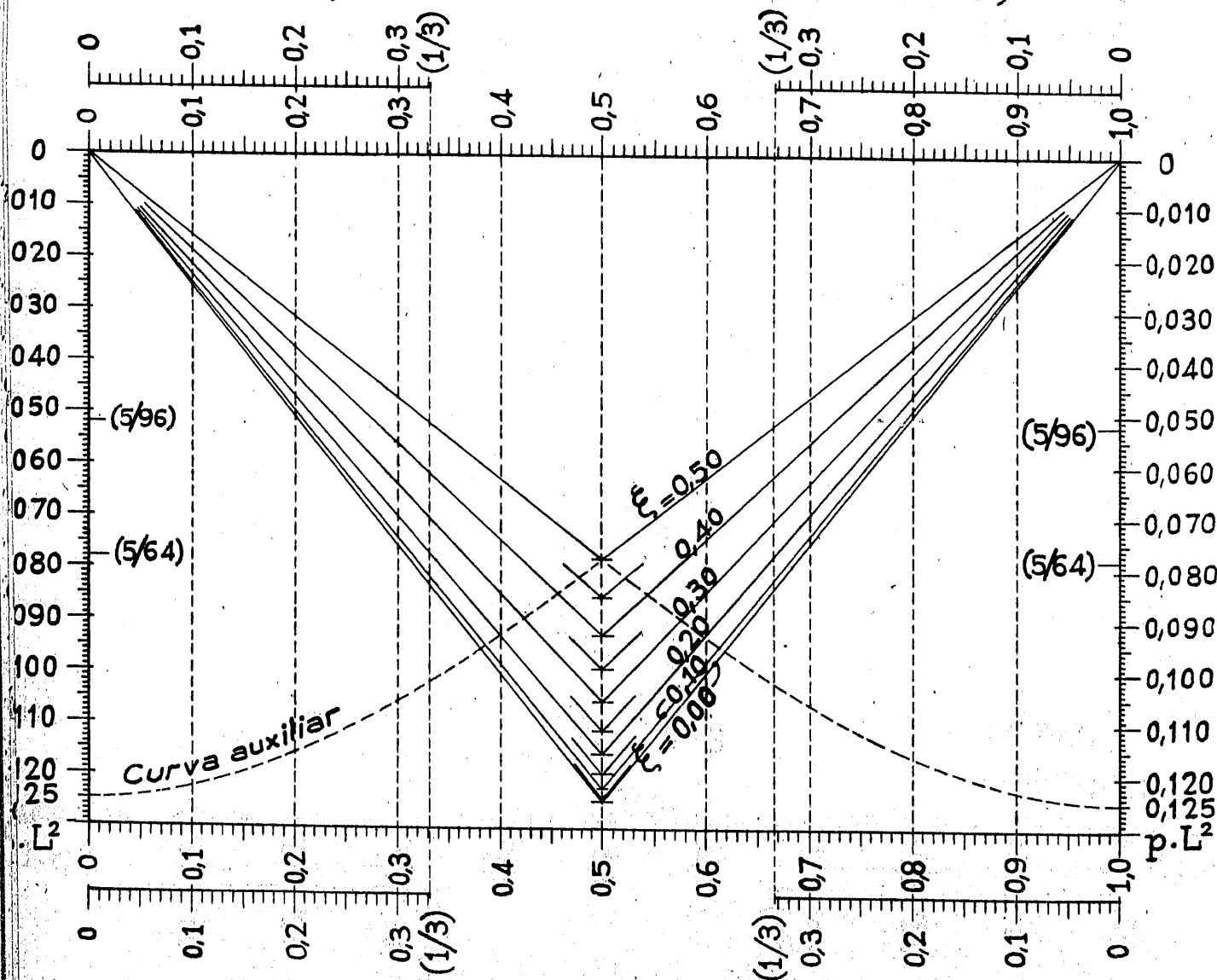
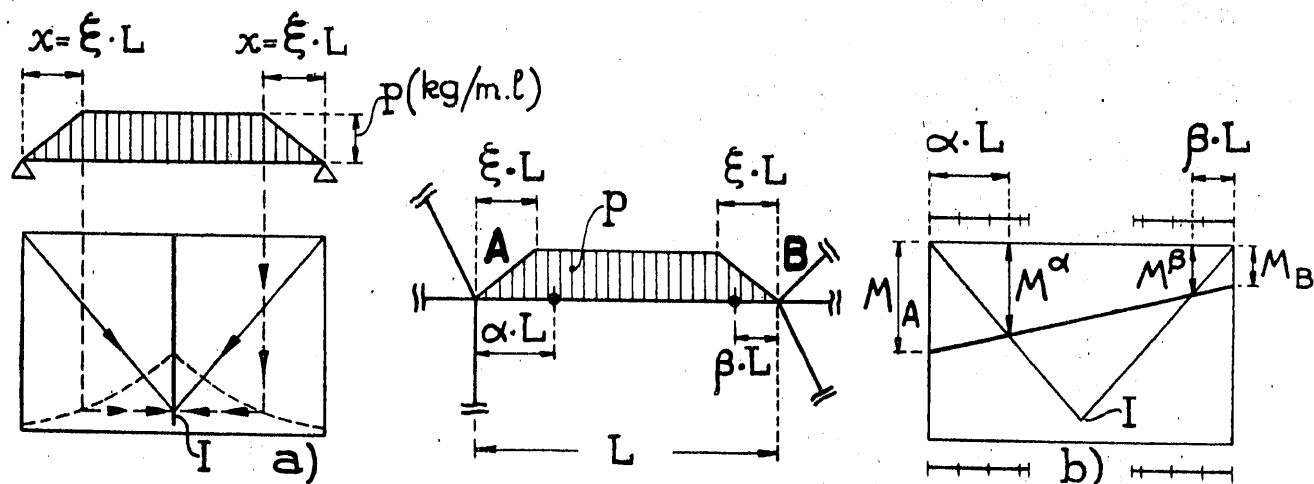
Abaco auxiliar del núm. VI.—Líneas de influencia de las reacciones isostáticas y de los momentos flectores isostáticos, que produce una carga uniforme, parcialmente extendida, sobre la viga simplemente apoyada.



Abaco VII. — Viga elásticamente empotrada, sometida a la acción de una carga triangular cubriendo parcialmente la viga.
(La carga alcanza su máximo valor sobre un extremo de la viga.)



Abaco VIII.—Viga elásticamente empotrada, sometida a la acción de una carga triangular cubriendo parcialmente la viga.
(La carga alcanza su máximo valor en un punto del vano.)



Abaco IX. — Viga elásticamente empotrada, sometida a la acción de una carga trapezoidal simétrica.

de empotramiento elástico en que pueden encontrarse uno y otro de los extremos de la barra.

Tiene, en cambio, algunos inconvenientes de orden práctico, entre los cuales quizá sea el principal el que los momentos flectores que buscamos son siempre menores que $0,20 \cdot P \cdot L$ y, por tanto, que sólo la mitad superior de esta figura 13-c es realmente la utilizada.

Ofrece por ello ventaja el que, como hacemos en el ábaco V y siguientes, definamos las *líneas en cruz* por la curva lugar geométrico de su punto de intersección *I*. Acotando en esta curva los puntos correspondientes a determinadas posiciones de la fuerza exterior, podemos conocer, por interpolación, cuáles serán las *líneas en cruz* que correspondan a otras posiciones de la fuerza. Es más, podemos disponer, como se hace en el ábaco V (figura a), una curva auxiliar que automáticamente nos da hecha esta interpolación y nos sitúa exactamente las *líneas cruciales* correspondientes a la posición de la fuerza exterior actuante.

(En el ábaco V y para mayor claridad del dibujo, se ha representado el lugar geométrico de las intersecciones de las *líneas cruciales* correspondientes solamente a posiciones de la fuerza P comprendidas entre el extremo izquierdo y el centro de la viga, es decir, para valores de la abscisa unitaria $0 < \xi < 1/2$.

Las coordenadas del punto de intersección, *I*, en este caso particular del ábaco V, son las siguientes:

$$y = \frac{\xi(2-\xi)(1-\xi^2)}{3} PL \quad (\text{m. Kg.});$$

$$x = \frac{1+\xi}{3} L \quad (\text{m.}),$$

que, tabuladas para intervalos $\xi = 0, 0,025, 0,050 \dots 0,500$, han permitido trazar dicho ábaco, en el que fácilmente se pueden leer, en milésimas partes de $P \cdot L$, los momentos de empotramiento elástico. Y de un modo análogo se ha ido procediendo para el trazado de los restantes ábacos.)

Se han marcado en este ábaco, como en todos los siguientes, las líneas que corresponderían al caso $\alpha = 1/3; \beta = 1/3$; es decir, las "verticales al tercio" correspondientes al caso de empotramiento perfecto de la barra en alguno, o en ambos, de sus extremos (1). Ello facilita un rápido tanteo, como en

(1) La máxima utilidad de estos ábacos se obtiene cuando, por el estudio previo de la estructura (ábaco I o expresiones [11], [12] y [14]), se tienen ya determinadas las posiciones de los puntos fijos. Pero también son de utilidad para los que operan con alguno de los métodos de aproximaciones sucesivas, pues de ellos pueden tomar directamente los valores de los momentos de empotramiento perfecto, $\bar{M}_A$ y $\bar{M}_B$, correspondientes a la posición de la carga, sin necesidad de cálculo alguno.

los anteriores ábacos III y IV, de los casos extremos de sustentación. Por ejemplo, para fuerza aislada actuando en el centro de la pieza, $\xi = 0,50$, los momentos M_A y M_B pueden variar desde $M_A = M_B = 0$ cuando $\alpha = \beta = 0$, a $M_A = M_B = 0,125 PL = \frac{1}{8} PL$, para el caso de empotramiento perfecto en ambos extremos, y a $M_A = 0$ y $M_B = 0,1875 PL = \frac{3}{16} PL$, si existe apoyo simple en *A* y empotramiento perfecto en *B*.

Mediante un proceso de cálculo, idéntico al acabado de describir, se ha preparado el ábaco VI, correspondiente a un tipo de carga muy frecuente (1): sobrecarga uniforme, de valor p Kg./m l., que se extiende desde uno de los apoyos, en una longitud $x = \xi \cdot L$ de la pieza. Comprende el ábaco todos los valores posibles, desde $\xi = 0$ hasta $\xi = 1$. Los momentos de empotramiento elástico, de facilísima lectura, vienen dados en milésimas de $p \cdot L^2$.

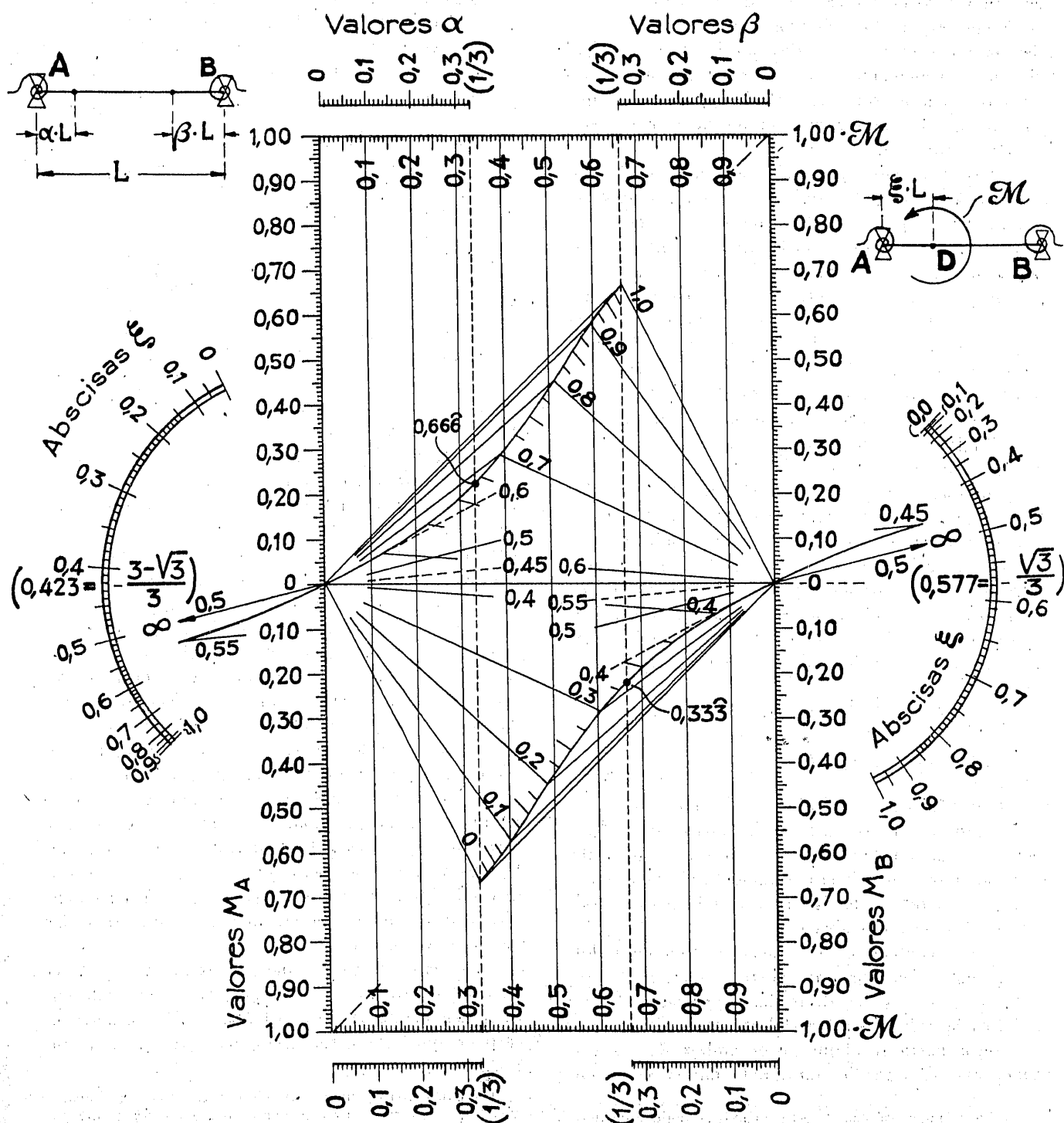
En esta serie de ábacos, en los que la carga exterior es variable, no resulta ya sencilla la representación simultánea del diagrama de momentos flectores isostáticos y de las reacciones de apoyo, como lo era en los ábacos III y IV correspondientes a un solo tipo de carga, siendo menester determinar la ley de momentos isostáticos y las reacciones isostáticas correspondientes a la posición de la carga.

Determinación que en el caso del ábaco V, fuerza aislada, es elemental, y siempre fácil en todos los restantes, para los cuales, además, se encuentran dadas sus expresiones algebraicas en los manuales. Aun este trabajo puede evitarse y obtener un rápido dibujo del diagrama de los momentos flectores a que se encuentra sometida la pieza, mediante ábacos como el adjunto ábaco auxiliar del núm. VI, en el que directamente se leen los valores de las reacciones isostáticas y los elementos precisos para que, referidos a la línea de cierre, tengamos el diagrama definitivo de momentos, necesario para el dibujo de las curvas envolventes.

Otro caso de carga, que los ábacos VII y VIII nos dejan resuelto, es el de carga triangular cubriendo parcialmente la viga. El ábaco VII resuelve el caso en que esta carga triangular, partiendo de un

(1) Unos ábacos de constitución análoga a estos ábacos V y VI, se encuentran en la monografía *La methode des foyers appliquée au Calcul des Systèmes hypérestatiques*, de los ingenieros (A. I. Br.) Sres. Roisin, Sariban y Zaczek, editada en 1951 por el Centre Belge-Luxembourgeois d'Information de l'Acier.

Estos ábacos no parece hayan sido calculados, sino contruidos partiendo simplemente de las tabulaciones de Kleingel, y a esto se debe la forma errónea que dichos ingenieros dan a la curva que define las líneas en cruz.



Abaco X. — Viga elásticamente empotrada, sometida a la acción de un par $\mathcal{M}$ móvil. (Las "líneas en cruz" quedan definidas por la curva de sus intersecciones, y más claramente, para valores $\frac{1}{3} < \xi < \frac{2}{3}$, por las escalas circulares auxiliares.

valor cero en un punto del vano, alcanza su valor máximo, p Kg./m. l. sobre uno de los apoyos. En el ábaco VIII, por el contrario, la carga triangular, cuyo valor máximo tiene lugar en el punto $x = \xi \cdot L$, termina con un valor nulo sobre el apoyo.

Como es lógico, ambos ábacos dan valores iguales cuando la carga cubre toda la viga, e idénticos a los dados por el ábaco IV, que correspondía a este caso particular.

Un caso de carga, frecuente también en los cálculos, es el correspondiente al ábaco IX: carga trapezoidal simétrica. Cubre este ábaco todas las posibilidades de este tipo de carga; desde la carga uniforme extendida a toda la viga, $\xi = 0$, hasta la carga triangular simétrica, $\xi = 0,5$.

Y finalmente, en el ábaco X recogemos el caso, que se presenta muy reiteradamente en estructuras industriales, de acción de un par M , aplicado en el punto de abscisa variable $x = \xi \cdot L$. ($0 < \xi < 1$).

Este caso, ciertamente sencillo, requiere, sin embargo, una mayor atención por parte del proyectista,

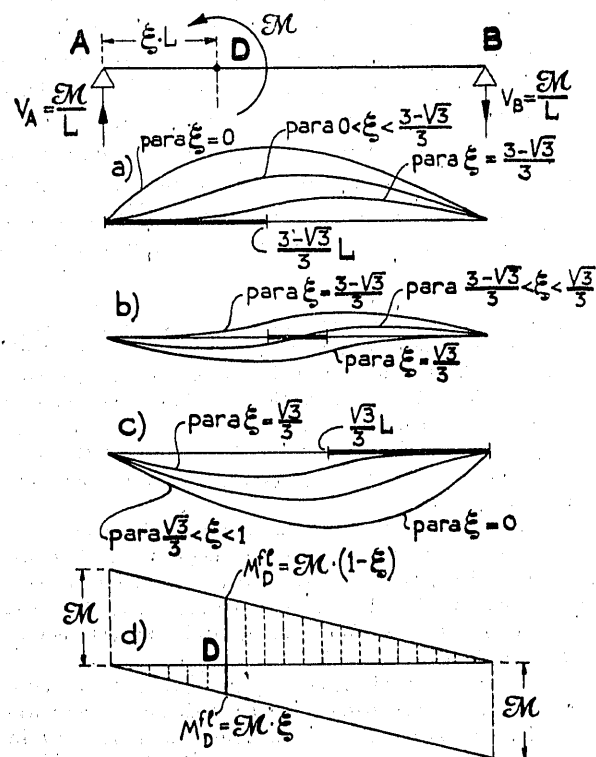


Fig. 14. — Viga simplemente apoyada, sometida a la acción de un par. En a), b) y c) se representan los distintos tipos de deformación que toma la viga según la abscisa del punto de aplicación del par. La figura d) da el diagrama de los momentos flectores correspondientes a las diversas posiciones del par.

pues, como gráficamente se aprecia en las figuras 14 y 15, la posición del punto de aplicación hace cambiar totalmente el sentido y forma de las deformaciones.

Representa la figura 14 el caso de la viga simplemente apoyada. Si el par está aplicado en un punto de abscisa unitaria $0 < \xi < 0,423$, toda la viga se deforma hacia un mismo lado; si la abscisa donde aplicamos el par está comprendida entre $0,577 < \xi < 1$, la viga se deforma toda ella hacia el lado contrario. Basta que el punto de aplicación del par recorra el pequeño intervalo $0,423 < \xi < 0,577$ para que pase-

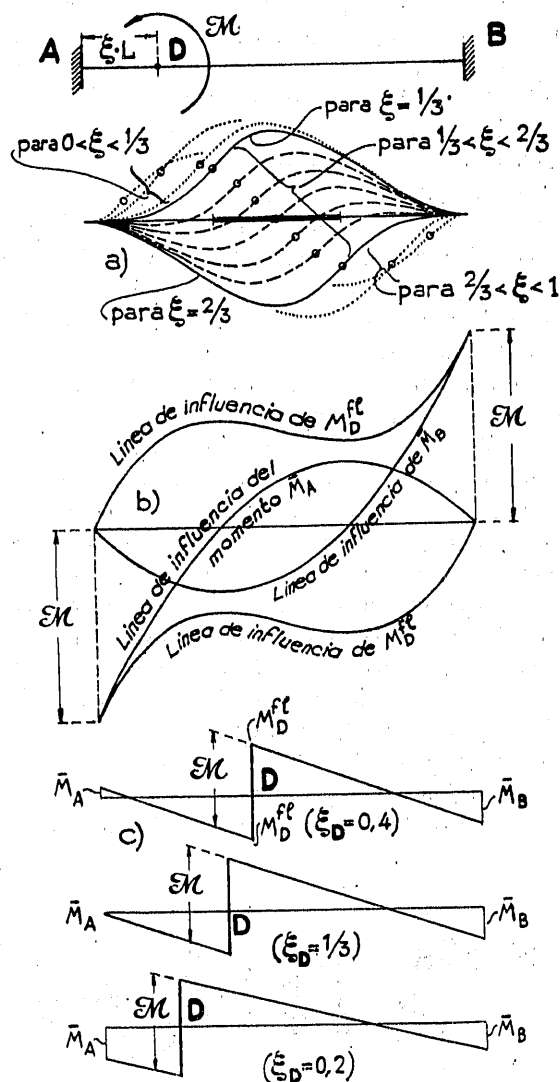


Fig. 15. — Viga perfectamente empotrada, sometida a la acción de un par. En a) se representan los distintos tipos de elástica según la posición del punto de aplicación del par. En b), las líneas de influencia de los momentos flectores en los empotramientos y en la sección de aplicación del par, que permiten dibujar los diagramas c) del momento flector.

mos de uno a otro tipo de deformación y cambien con ello de signo los ángulos α_0 y β_0 . Los términos de carga, y con ellos las líneas en cruz, experimentarán estos mismos cambios rápidos al moverse el par en la zona central de la viga. Por ello, en el ábaco X, aparte de representar, como en los anteriores ábacos, la curva de las intersecciones de las líneas en cruz, se disponen, como elemento auxiliar para la más fácil situación de estas líneas en cruz, unas escalas circulares.

En la figura 15-a se recogen las deformaciones que el par M produciría en la viga perfectamente empotrada en sus extremos. Como en el caso anterior, las elásticas pueden encontrarse totalmente a uno u otro lado, según la abscisa de aplicación del par se encuentre en el tercio izquierdo de la viga, $0 < \xi < 1/3$, o en el tercio derecho, $1/3 < \xi < 1$.

Así como en la viga isostática el diagrama de momentos flectores (fig. 14-d) presenta siempre el mismo aspecto, en la viga perfectamente empotrada es muy variable la forma que toma este diagrama de momentos al variar la posición del punto D en que aplicamos el par M . Los tres casos típicos representados en la figura 15-c y, aún más claramente, las líneas de influencia representadas en 15-b evitarán toda duda sobre los signos de los momentos de empotramiento perfecto en cada caso.

El ábaco X, al igual que los ábacos anteriores, nos da la línea de cierre y los momentos de empotramiento elástico M_A y M_B para cualquier posición de la carga y para cualquier grado de empotramiento elástico que tengan los extremos de la viga, y mediante el mismo proceso: 1.º, determinación de las líneas en cruz correspondientes a la posición ξ del par; 2.º, obtención de la línea de cierre al trazar las verticales por los puntos fijos (de abscisas unitarias α y β), y 3.º, lectura, en las escalas marginales, de los momentos M_A y M_B , en este caso en milésimas del valor del par M aplicado.

Si alguna duda pudiese existir, las figuras 14 y

15 podrán solventarla, ya que en la viga elásticamente sustentada las deformaciones serán análogas y menores que las señaladas por la figura 14, y los momentos M_A y M_B serán, asimismo, análogos y menores que los correspondientes a los de empotramiento perfecto de la figura 15.

* * *

Acabada la exposición de estos ábacos III a X en que se han recogido y resuelto algunos de los tipos de carga a los que más frecuentemente se encontrarán sometidas las piezas de la estructura, es oportuno someter a la consideración del lector si es o no desmesurada aquella definición del método de Cross que inicialmente citamos, y que lo describe como el "método que resuelve del modo más sencillo y exacto cualquier tipo de estructura reticular por complicado que sea".

Bastará que considere nuevamente el sencillo pórtico de la figura 6.^a. En tanto el número de casos de sollicitación a estudiar sea muy pequeño, digamos dos y a lo sumo tres, pequeña también será la diferencia de tiempo que cualquier procedimiento requiera (1). Todos serán exactos y todos igualmente sencillos. Incluso será preferible abordar estos dos o tres casos por el método de Cross, por aquello de que basta para acometerlo un pedazo de papel y un lápiz.

Pero si esa estructura está sometida, como indica la figura 16, a la acción de su peso propio y a la de cargas variables en su posición, así como a la de cargas que pueden o no presentarse simultáneamente

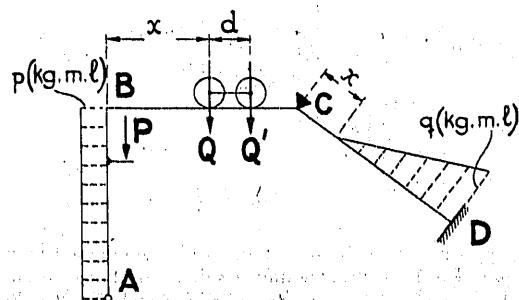


Fig. 16. — La sencilla estructura de la figura 6.^a está sollicitada por diversas causas, algunas variables, que pueden o no coexistir.

(1) Si algún procedimiento puede descartarse *a priori* por excesivamente laborioso es el de Castigliano, por ser el más *indirecto* de todos cuantos métodos se han ideado. Su largo rodeo de evaluar el trabajo elástico, por integración del realizado por las tensiones moleculares (aun en este caso, en que las suponemos función exclusiva de los momentos flectores), para su posterior derivación respecto a la fuerza incógnita, es superfluo *per se*.

Este recorrido de la fuerza incógnita es deducible directamente de las deformaciones correspondientes a esas tensiones moleculares (y en este caso basta una directa integración de funciones lineales de los momentos flectores), o en otras palabras, ese recorrido viene dado directamente por las expresiones de Bresse.

Pero a su vez, también este procedimiento de las ecuaciones de deformación basadas en las tensiones moleculares, supone dar un rodeo a la cuestión, rodeo que pasó a ser innecesario desde el punto y hora en que K. Culmann dejó tan sencillamente ligadas las fuerzas y los movimientos que producen en el extremo terminal de una pieza elástica.

No es que tratemos de aconsejar este último método. Los tres (Culmann, Bresse y Castigliano), nos conducen, para cada caso, a un sistema de tantas ecuaciones como fuerzas incógnitas, o reacciones hiperestáticas, tenga la estructura. Y como ya hemos comentado, el *desiderátum* es ahora suprimirlas.

con las anteriores, esa "sencillez resolutive" del Cross desaparece. Hemos de recurrir primeramente a los manuales para obtener las expresiones y calcular los valores de los momentos de empotramiento perfecto en los extremos de las barras de los que en cada hipótesis debemos partir, y aprestarnos a un trabajo prolijo y monótono: momentos desequilibrados, repartición y transmisión del momento de compensación, repitiendo esto en varios ciclos y repitiendo todos estos ciclos para cada posición o combinación de las cargas exteriores, todo ello para obtener como resultado, solamente el conocimiento de los diagramas de los momentos flectores.

En cambio el *método de los puntos fijos*, tal como lo venimos actualizando, nos da con mucho menor trabajo un conocimiento más completo. Con casi el mismo trabajo con que en Cross se determinan unas rigideces relativas y unos factores de repartición asimismo inexactos, se determina mediante el ábaco I o las expresiones de recurrencia [11], [12] y [15] las rigideces de los nudos, los factores de transmisión y la posición de los puntos fijos; es decir, los elemen-

tos ya anotados en la figura 6.^a. Queda con esto perfectamente caracterizada la estructura.

Cada caso de carga sobre una de las piezas de la estructura no es ahora sino una lectura directa de esos ábacos III al X. Los momentos en cada extremo de la barra cargada así obtenidos son los definitivos y se transmiten a los siguientes nudos, bien algébricamente, multiplicándolos por el factor de transmisión, bien gráficamente, utilizando los puntos fijos. Y al conocer las rigideces de los nudos, conocemos también el valor del giro por cada uno experimentado (1).

(Continuará.)

(1) Ciertamente que en este caso particular de la estructura de la figura 16, habrá echado mano el crossista del recurso de estudiar solamente la repartición de un par 100 en el nudo B, y de otro par 100 en el nudo C, para obtener los restantes casos por superposición de estas dos distribuciones tipo afectadas por los factores que en cada caso correspondan.

Ha buscado con ello el obtener un conocimiento de la estructura independiente de las cargas a aplicar y, sin saberlo, ha ido a pedir auxilio al método directo que desdafiaba.

