

# LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,  
Ingeniero de Caminos.

Hace el autor aplicación, en este segundo artículo, de las expresiones de rigidez de nudo y factor de transmisión, conceptos los más habituales hoy día, formuladas con clara sencillez en su anterior. Y nos muestra la gran utilidad de los puntos fijos, más que como elemento de los cálculos, como instrumento auxiliar para el estudio directo de las barras cargadas.

(Continuación.)

Dada una estructura en malla abierta, cuyos nudos solamente pueden experimentar giros, las anteriores expresiones, o los ábacos I y II correspondientes, nos permiten, partiendo primeramente de un extremo de la estructura y recorriéndola después en sentido contrario, permiten, decimos, ir determinando

ciones en una extensa variedad de casos de carga.

Abacos que nos ahorran, pues, todo el trabajo complementario, que generalmente no se menciona al exponer los diversos métodos, pero que es necesario para alcanzar ese conocimiento del "estado de tensión en cualquier punto", de que nos habla la Instrucción.

\* \* \*

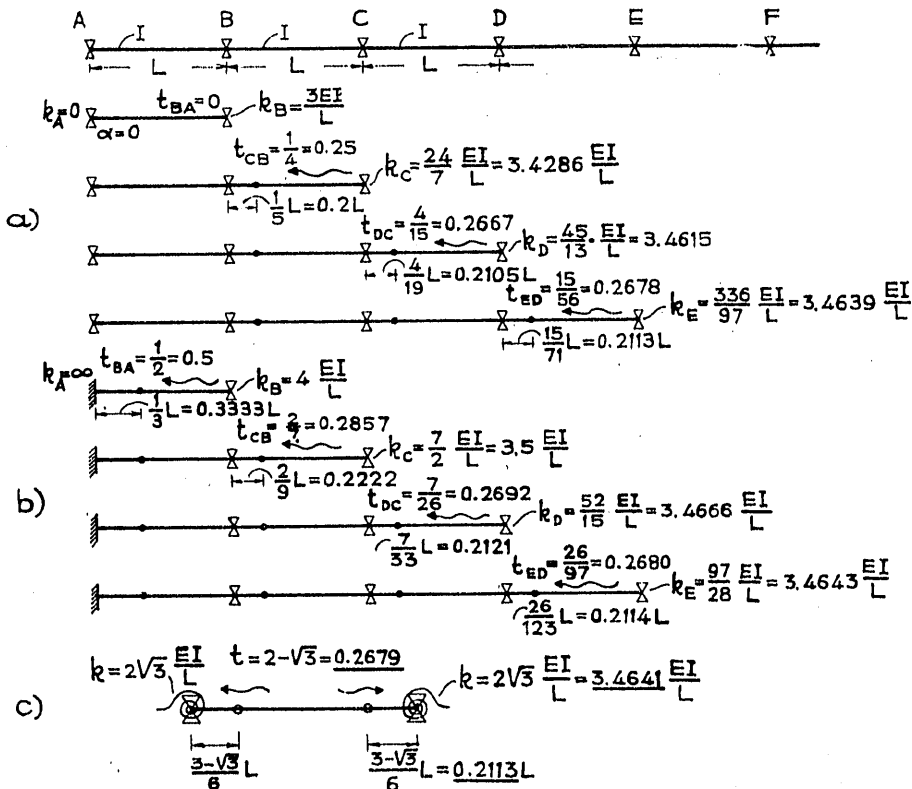


Fig. 5. — Aplicación a la viga continua de tramos iguales.

directamente los valores definitivos de las rigideces y factores de transmisión; nudo por nudo y barra tras barra.

Y al hacer este recorrido de la estructura, ir, además, anotando la posición de los "puntos fijos". El conocimiento de los puntos fijos servirá, como más adelante veremos, para que podamos leer en ábacos no solamente los momentos de empotramiento, sino también los momentos máximos positivos y las reac-

Un ejemplo clásico es el del estudio de las condiciones de empotramiento elástico en que se encuentra un vano intermedio perteneciente a una viga continua indefinida constituida por tramos iguales. Si suponemos primeramente que el extremo A de esta viga está simplemente apoyado ( $k_A = 0$ ), en la fig. 5-a quedan anotados los valores de rigidez, factor de transmisión y situación del punto fijo en cada barra al ir recorriendo la estructura de izquierda a dere-

cha, es decir, cuando vamos haciendo la aplicación reiterada de las [11 bis], [12 bis] y [13 bis]. En dicha figura se han indicado los valores exactos, tal como estas fórmulas nos los dan, así como estos valores expresados en decimales, tal como los podemos obtener por simple lectura en el ábaco I.

Si el extremo  $A$  está perfectamente empotrado ( $k_A = \infty$ ), los valores son los indicados en la figura 5-b. Examinando estas figuras se aprecia cuán rápidamente tienden unos y otros valores, unos por defecto y otros por exceso, hacia los valores límites:

$$\begin{aligned} \frac{k}{K} &= 2\sqrt{3} \\ t &= 2 - \sqrt{3} \\ \alpha &= \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{aligned} \quad [18]$$

anotados en la figura 5-c. Valores cuya inmediata deducción puede hacerse de la [11 bis], pues basta expresar en ella que la rigidez resultante en el extremo derecho es igual a la rigidez del extremo izquierdo, o viceversa; es decir, que:

$$\frac{k}{K} = 4 \frac{3 + \frac{k}{K}}{4 + \frac{k}{K}}$$

y llevar este valor,  $k/K = 2\sqrt{3}$  a las [12 bis] y [14 bis].

Más inmediato aún resulta como aplicación del ábaco I, pues basta buscar qué valor de la columna primera queda enfrentado con su idéntico en la segunda. En la misma horizontal leeremos, además, los de  $t$  y  $\alpha$  dados por [18].

\* \* \*

Procedamos, como ejemplo de aplicación, al estudio del pórtico simple oblicuo sobre el que desarrolla López Rodríguez su citado trabajo. Dicho pórtico tiene sus tres piezas de idéntica longitud,  $L$ , y las inercias de sus barras y las condiciones de sustentación son las indicadas en la figura 6-c. En la figura 6-a, se han ido anotando las sucesivas rigideces y los factores de transmisión y puntos fijos cuando partimos del nudo  $D$ , perfectamente empotrado. Todos estos valores se van deduciendo por aplicación reiterada de las [11], [12] y [14], o por lectura reiterada en el ábaco I, en el que se entrará por su parte superior, ya que la rigidez inicialmente conocida es la del extremo derecho.

Por ejemplo, la aplicación reiterada de la [11] o, lo que es lo mismo, la lectura en las columnas primera y segunda del ábaco, nos va dando a conocer las rigideces  $k_c$ ,  $k_b$  y  $k_a$ :

Barra  $CD$ :

$$k_D = \infty; K_{CD} = \frac{E \cdot \frac{3}{2} I_0}{L} = \frac{3}{2} \frac{E I_0}{L}; \quad \underline{k_D / K_{CD} = \infty}$$

y para esta relación, la expresión [11], o el ábaco, nos dan, para el extremo izquierdo, la relación:

$$\underline{k_c / K_{CD} = 4}$$

de donde:

$$k_c = 4 K_{CD} = \frac{6 E I_0}{L}$$

Barra  $BC$ :

$$K_{BC} = \frac{E I_0}{L}; \quad \underline{k_c / K_{BC} = 6}$$

y la [11] y el ábaco I dan para esta rigidez relativa del extremo derecho, la siguiente relación en el extremo izquierdo:

$$k_B / K_{BC} = \frac{18}{5} = 3,6$$

de donde:

$$k_B = \frac{18}{5} K_{BC} = \frac{18}{5} \cdot \frac{E I_0}{L}$$

Barra  $AB$ :

$$K_{AB} = \frac{E \cdot \frac{2}{3} I_0}{L} = \frac{2}{3} \frac{E I_0}{L}; \quad \underline{k_B / K_{AB} = \frac{27}{5} = 5,4}$$

y aplicando nuevamente la [11] o el ábaco I, tenemos

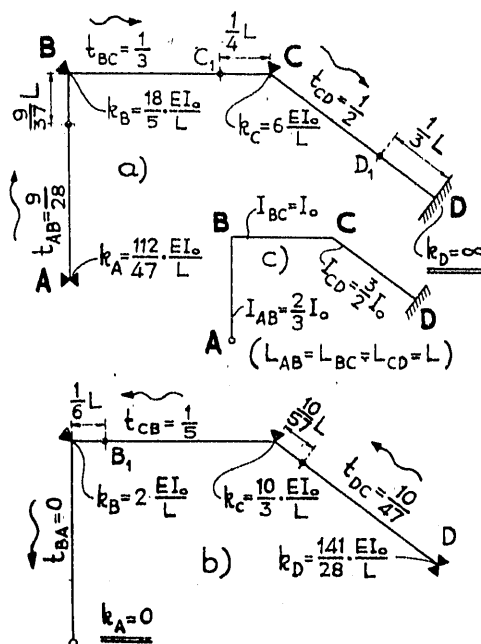


Fig. 6.—Aplicación al pórtico oblicuo de López Rodríguez: a), partiendo del extremo derecho  $D$  ( $D-C-B-A$ ); b), partiendo del extremo izquierdo  $A$  ( $A-B-C-D$ ).

como rigidez relativa en el extremo izquierdo:

$$k_A / K_{AB} = \frac{168}{47} = 3,574$$

y por tanto:

$$k_A = \frac{168}{47} \cdot \frac{2}{3} \frac{EI_0}{L} = \frac{112}{47} \cdot \frac{EI_0}{L}$$

Simultáneamente, hemos podido ir leyendo en el ábaco los valores de los factores de transmisión  $t_{CB}$ ,  $t_{BC}$  y  $t_{AB}$  y las posiciones de los puntos fijos, o bien ir realizando el cálculo de estos valores por las [12] y [14] (I).

Exactamente igual se ha procedido en la figura 6-b, partiendo en este caso de la rigidez conocida,  $k_A = 0$ , de su extremo izquierdo, por aplicación de las [11 bis], [12 bis] y [14 bis] (o por lectura en el ábaco I, entrando ahora por su parte inferior).

Las figuras 6-a y 6-b, así obtenidas, nos darán un conocimiento directo o inmediato del efecto

sobre este pórtico de una sollicitación cualquiera, si está coartada la traslación de los nudos. (Cuando los nudos no solamente pueden girar, sino que también pueden experimentar traslaciones, los datos de la figura 6 facilitan extraordinariamente el estudio, como más adelante veremos) (I).

Todos los datos de la figura 6 son función exclusiva de las características geométricas y elásticas de la estructura y *por completo independientes* de las cargas a que hayamos de someterla posteriormente.

\*\*\*

En el *Método de Cross en serio y de broma* somete a su pórtico el Sr López Rodríguez a la acción de un par  $\mathcal{M}$  (m. Kg.) aplicado al nudo B.

Partiendo de los datos hallados, es inmediato el dibujo del diagrama de momentos flectores producidos por este par en el caso de pórtico con nudos inmóviles (que, repetimos, es por ahora el estudiado), como se refleja en la figura 7-a: la rigidez del nudo B, como extremo de las barras BC-CD, se obtuvo en la 6-a; y en la 6-b, la rigidez de dicho nudo como extremo de la barra AB.

Su rigidez total, suma de ambas rigideces, vale:

$$K_B = k_{B(BC)} + k_{B(BA)} = \frac{28}{5} \frac{EI_0}{L} \text{ (m. Kg.)}$$

lo que ya nos permite escribir que bajo la acción del par  $\mathcal{M}$  sufrirá este nudo un giro de valor:

$$\theta_B = \frac{\mathcal{M}}{K_B} = \frac{5}{28} \mathcal{M} \frac{L}{EI_0} \text{ radianes,}$$

y los momentos tomados por la extremidad B, de la barra BC, y por la extremidad B, de la barra BA, serán:

$$M_{B(BC)} = \theta_B \cdot k_{B(BC)} = \mathcal{M} \frac{k_{B(BC)}}{K_B} = \frac{18}{28} \mathcal{M};$$

$$M_{B(BA)} = \theta_B \cdot k_{B(BA)} = \mathcal{M} \frac{k_{B(BA)}}{K_B} = \frac{10}{28} \mathcal{M}.$$

La aplicación en el extremo B de la cadena BC-CD del momento  $M_{B(BC)}$  hace aparecer en los nudos C y D los momentos flectores:

$$M_C = t_{BC} \cdot M_B = \frac{1}{3} M_{B(BC)} = \frac{6}{28} \mathcal{M},$$

$$M_D = t_{CD} \cdot M_C = \frac{1}{2} M_C = \frac{3}{28} \mathcal{M},$$

con lo que queda completado el diagrama de momentos flectores en el pórtico.

(I) Señalemos, por el momento, que el método del *apoyo ficticio*, que es el seguido por Cross, cuando los nudos pueden trasladarse, es debido a otra de las grandes figuras de la *Estática Gráfica*, Max Ritter (1884-1946), también Profesor de Zürich, y data de enero de 1911. *Schw. Bauzeitung*.

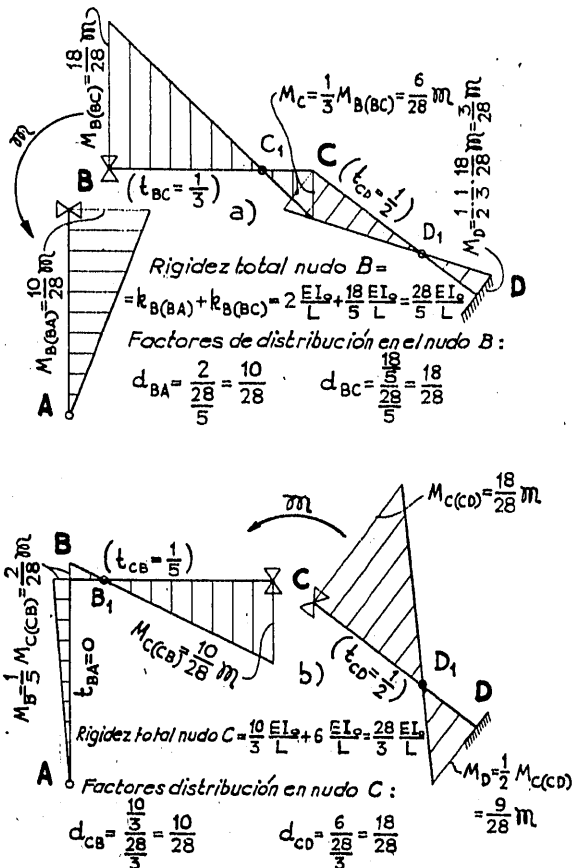


Fig. 7.—Pórtico con nudos inmóvilizados: a), ley de momentos producidos por un par aplicado en el nudo B; b), ley de momentos producidos por un par aplicado en el nudo C.

(I) Todas estas determinaciones no llevan más tiempo ni más trabajo que el también necesario en el "Cross" para su preparación inicial de la estructura. Los resultados, en cambio, son exactos y definitivos.

Los giros de los nudos  $C$  y  $D$  se obtienen también directamente, ya que son conocidas sus rigideces:

$$\theta_c = \frac{M_c}{k_{c(d)}} = \frac{\frac{6}{28} \mathcal{M}}{\frac{6}{L} \frac{EI_0}{L}} = \frac{1}{28} \mathcal{M} \frac{L}{EI_0} \text{ radianes;}$$

$$\theta_d = \frac{M_d}{k_d} = \frac{M_d}{\infty} = 0.$$

El conocimiento de estos giros de los nudos permite dibujar, completamente sobre seguro, el denominado "esquema funcional", correspondiente a este

La inmovilización de los nudos de este pórtico simple se logrará impidiendo la traslación del dintel; por ejemplo, por un apoyo aplicado al nudo  $B$ , o bien aplicado al nudo  $C$ . A estos apoyos podemos darles, además, una infinidad de direcciones. Para cualquiera de ellas, el diagrama de momentos flectores y la elástica de deformación son las ya representadas en las figuras 7 y 8, aunque, en cambio, serán diferentes para cada caso las fuerzas normales a las que se encontrarán sometidas las piezas de la estructura y, por tanto, las reacciones. La hipótesis hecha inicialmente de ser nulos los efectos de las fuerzas nor-

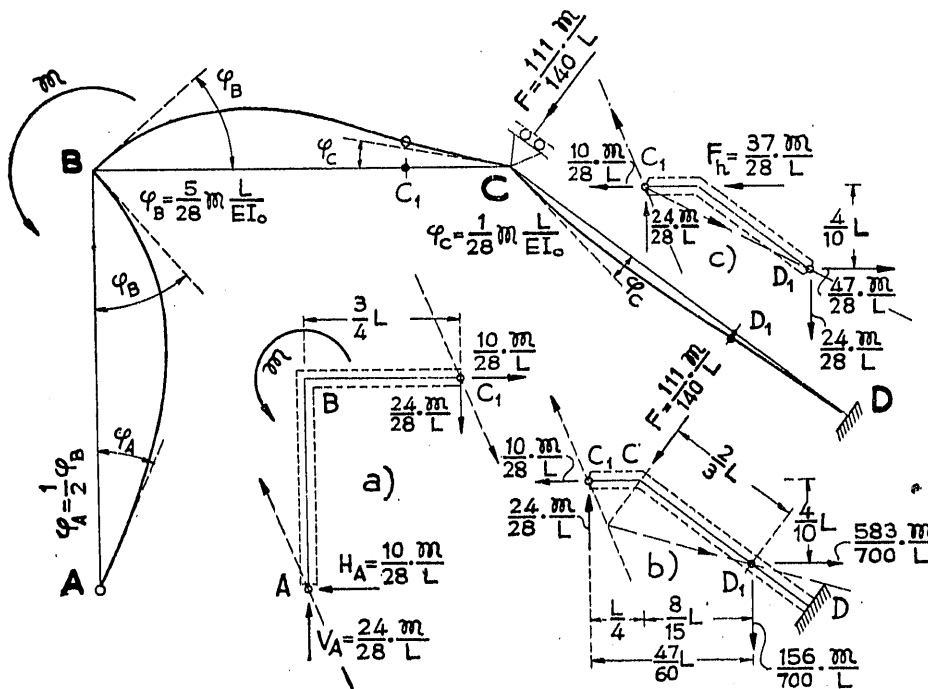


Fig. 8.—Deformaciones debidas a la acción en  $B$  de un par  $\mathcal{M}$  (y estudio de las reacciones para dos casos distintos de fijación de los nudos).

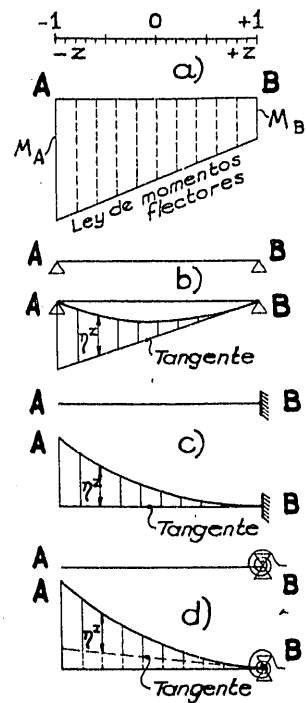


Fig. 9.—Elásticas producidas por una misma ley de momentos.

caso de carga. En la figura 8 queda perfectamente representado, ya que se ha dibujado la elástica (para un valor del par:

$$\mathcal{M} = \frac{4927}{1000} \cdot \frac{EI_0}{L} \quad (1).$$

(1) El cálculo de las elásticas de estas barras de inercia constante sometidas a una ley lineal de momentos flectores resulta cómodo si las deformaciones se miden respecto a la tangente a la elástica en uno de sus extremos, en vez de referirlas al eje de la barra. Sea, por ejemplo, la barra  $AB$  de la figura 9, sometida a la ley de momentos  $M_A, M_B$  (figura 9-a) ( $M_A$  y  $M_B$  son positivos según el convenio usual, por producir tracciones en la cara inferior de la pieza). Esta ley de momentos flectores producirá deformaciones muy distintas de la barra  $AB$ , según sea la sustentación que demos a la barra; en 9-b representamos la que corresponde a viga fija en  $A$  y en  $B$ ; en 9-c, a ménsula empotrada en  $B$ , y en 9-d, a pieza elásticamente empotrada en  $B$ .

Las deformaciones respecto al eje  $AB$  de la pieza son distintas; pero las deformaciones respecto a la tangente en  $B$  a la elástica, son siempre las mismas y vienen dadas por:

$$r_{iz} = \frac{1}{12} \cdot \frac{L^2}{EI} \left\{ 3 (M_A + M_B) [M_*^z] - (M_A - M_B) [V_*^z] \right\} \quad (18)$$

pudiéndose tomar los valores de  $[M_*^z]$  y  $[V_*^z]$  para veinte intervalos de la longitud de la barra, de la tabla de la página 192 de *La pieza elástica*, de C. Lorente de Nó, 1952.

El momento  $M_A$ , o el  $M_B$ , pueden ser negativos; bastará introducirlos en esta expresión [18] con el signo que a cada uno le corresponda, de acuerdo con el convenio acabado de citar. La expresión [18] es, pues, general, y sea cualquiera la sustentación de la pieza y la forma de la ley lineal de momentos flectores a que esté sometida, nos dará la elástica referida a su tangente en  $B$ .

Si deseamos referirla a la tangente en  $A$ , la fórmula a aplicar será:

$$r_{iz} = \frac{1}{12} \cdot \frac{L^2}{EI} \left\{ 3 (M_A + M_B) [M_*^{-z}] + (M_A - M_B) [V_*^{-z}] \right\} \quad (18 \text{ bis})$$

males y tangenciales, nos da este paradójico comportamiento de la estructura, que se deforma como cuerpo elástico frente a la sollicitación por momento flector, y se comporta como el sólido rígido de la mecánica racional frente a las sollicitaciones por esfuerzo axial y tangencial.

En la figura 8, la inmovilización del dintel queda totalmente lograda gracias a la adición de un apoyo simple en el nudo  $C$ , toda vez que la longitud de la barra  $CD$ , como la de las restantes, es, por la citada hipótesis, invariable.

Del diagrama de momentos flectores se deducen directamente las reacciones en el extremo  $A$  del pórtico, y en la figura 8-a, aparece aislado el trozo  $ABC_1$  de la estructura. Las reacciones en el punto  $C_1$ , punto de momento nulo, han de ser, por las condiciones de la estática, iguales y contrarias a las que actúan en  $A$ , formando un par que equilibra al par  $\mathcal{M}$  sollicitante.

En las figuras 8-b y 8-c, se representa el equilibrio del trozo  $C_1D'D_1$  y mediante ellas se determina cuál debe ser la fuerza a aplicar en  $C$  para mantener el equilibrio. En la figura 8-b, se da a la fuerza,  $F$ , una dirección normal a la barra  $CD$  (como hace López Rodríguez), en tanto que en la figura 8-c, se la orienta según la horizontal (como hace Miranda Lafuente). En uno y en otro caso, la barra  $CD$  y el apoyo  $D$  quedan sometidos a distintos sistemas de fuerzas. Mayor aún sería la diferencia si en vez de estudiar dos apoyos distintos pero aplicados en el mismo nudo  $C$ , comparásemos los estados de fuerzas cuando uno de los apoyos inmoviliza al nudo  $B$  y el otro al nudo  $C$ , pero siempre la deformación de la

estructura (y la energía elástica almacenada) seguirá siendo la misma antes deducida: la debida a los momentos flectores, obtenida sin necesidad de conocer cuáles puedan ser las fuerzas normales que en la estructura se desarrollan, toda vez que, por hipótesis, estas fuerzas normales no producen deformación ni trabajo elástico alguno.

El lector hará fácilmente la comprobación del diagrama de momentos debidos a la aplicación de un par  $\mathcal{M}$  en el nudo  $C$  (fig. 7-b), así como la obtención de los giros y de las reacciones anotados en la figura 10.

Los datos reunidos en la figura 6 (rigideces y factores de transmisión), han permitido la obtención directa de los momentos flectores y de los giros. La situación de los puntos fijos, indicada también en la figura 6, ha facilitado la determinación de las reacciones.

### III

El conocimiento de los puntos fijos ofrece su máxima utilidad en el estudio de la acción de fuerzas exteriores aplicadas sobre las barras. Como ya se hizo notar, tanto da conocer la distancia  $a = \alpha \cdot L$  del foco izquierdo como conocer la rigidez relativa  $k_A / K_{AB}$  del empotramiento elástico de esta extremidad izquierda  $A$ . Y exactamente igual sucede entre la distancia  $b = \beta \cdot L$  del foco derecho a su extremidad  $B$  y la rigidez relativa  $k_B / K_{AB}$  de esta extremidad derecha. En otras palabras: el conocimiento de los puntos fijos permite el estudio de la barra sometida a la carga exterior como si estuviese aisla-

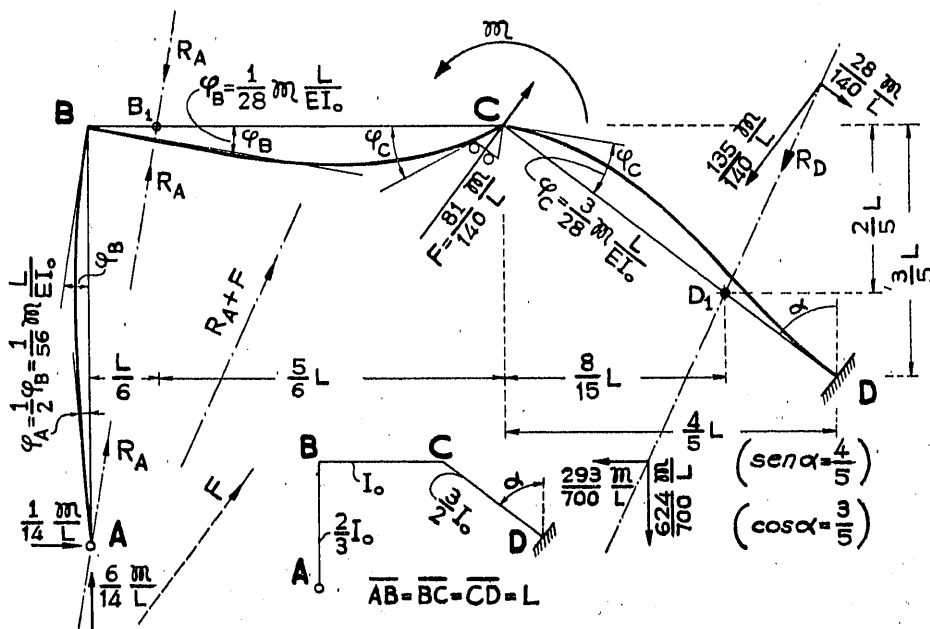


Fig. 10. — Deformaciones debidas a la acción en  $C$  de un par  $M$  (y reacciones cuando para la inmovilización de nudos aplicamos una fuerza  $F$  en  $C$ , normal a la barra  $CD$ ).

da de la estructura, ya que ellos nos caracterizan completamente el grado de empotramiento que tiene la barra como parte integrante de esa estructura. Ello es lo que permite reducir el estudio de la carga a un sencillo sistema de dos ecuaciones lineales (ver, por ejemplo, A. Peña, *Mecánica Elástica*, 1947, 3.<sup>a</sup> edición), o mejor aún, dada la moda actual de huir de las ecuaciones como de algo nefando, tener ya hecho ese estudio en unos ábacos de cómodo empleo.

Para la deducción de esas ecuaciones, o para la justificación de estos ábacos, no es necesaria sino una pequeña parte de los desarrollos que siguen a continuación, pero creemos tendrá algún interés ver su íntima ligazón con otras formas de exposición, cuya diferencia es de terminología, pero no de fondo: las denominadas ecuaciones de Mohr, las *líneas cruciales* y los *términos de carga*, etc., etc., aparecen simultáneamente como aspectos particulares de unas relaciones que de por sí son bien sencillas en este caso de viga recta de inercia constante.

Sea la barra  $AB$  de una estructura (fig. 11-a), solicitada por un cierto sistema de fuerzas. En nada alteramos el equilibrio elástico en que se encuentra la barra, ni el del resto de la estructura, si reemplazamos ésta por la dibujada en 11-b: viga isostática con los dos pares hiperestáticos  $M_1$  y  $M_2$ , y nudos elásticos  $A$  y  $B$  sometidos a pares de signo contrario. Si  $k_1$  y  $k_2$  son las rigideces de estos nudos (masas elásticas), los giros que experimentarán serán:

$$\theta_1 = \frac{M_1}{k_1}; \quad \theta_2 = \frac{M_2}{k_2},$$

e idénticos giros habrán de experimentar los extremos de la barra  $AB$ .

Los giros de esta barra son, a su vez (fig. 11-c), suma de los debidos a los tres estados parciales de carga indicados en la figura: giros  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  producidos en la viga simplemente apoyada por el sistema de fuerzas aplicado, y los giros que en los extremos de esta misma viga isostática producen, alternativamente, los pares  $M_1$  y  $M_2$  (ver fig. 3).

Con escribir esta identidad entre giros:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_0 - \frac{M_1}{3K} - \frac{M_2}{6K} = \frac{M_1}{k_1} \\ \theta_2 &= \beta_0 - \frac{M_1}{6K} - \frac{M_2}{3K} = \frac{M_2}{k_2} \end{aligned} \right\} [20]$$

queda formulado el sistema de ecuaciones que nos da, en función de los ángulos característicos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , y de las rigideces  $k_1$  y  $k_2$ , los valores de los momentos flectores  $M_1$  y  $M_2$  que el sistema de fuerzas produce en los extremos de la barra. (Si en estas expresiones sustituimos la rigidez  $K$  de la barra por su valor  $K = \frac{EI}{L}$ , queda aún más patente su identidad con las del sistema con que operábamos en el método de masas elásticas.) (Ver Peña Boeuf, pág. 199.)

El efecto de las fuerzas exteriores queda conocido, como vemos, a través de los ángulos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , característicos de la deformación que esas mismas fuerzas producirían en una viga idéntica, pero isos-

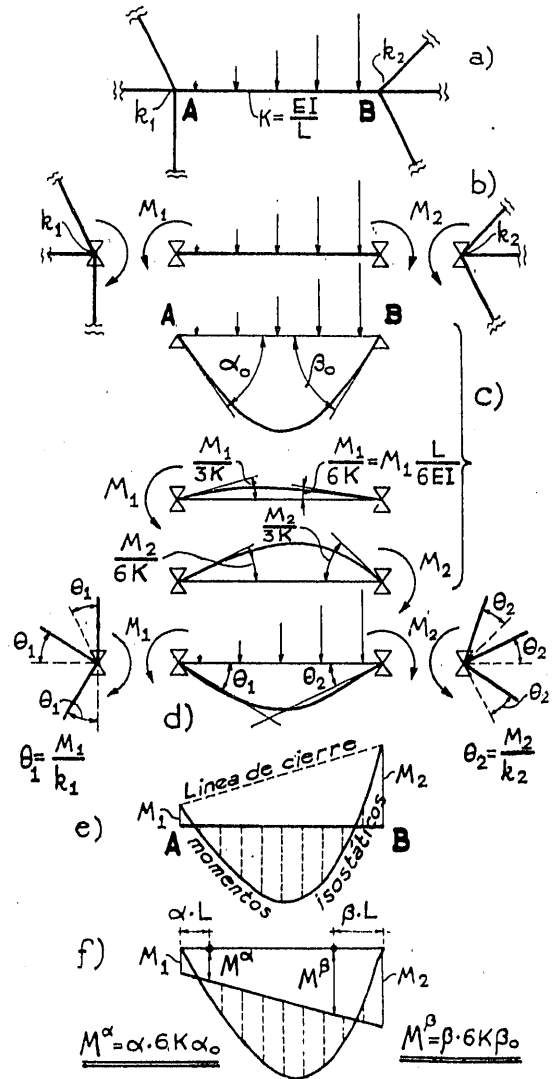


Fig. 11.—Viga directamente cargada. Obtención de los momentos de empotramiento elástico en función de los giros  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , que la carga produciría en la viga simplemente apoyada.

táticamente sustentada. Son valores éstos que, aparte de encontrarse en casi todos los manuales, se deducen fácilmente, en caso necesario, como valores de las reacciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  que el área de los momentos flectores isostáticos, divididos por  $EI$ , produciría sobre los apoyos de la viga equivalente de Mohr.

Al pie de la figura 11 aparece representado el diagrama de momentos flectores como superposición del diagrama correspondiente a la viga isostática cargada y del correspondiente a los pares hiperestáticos  $M_1$  y  $M_2$ . En ella se han acotado las ordenadas,

valores  $M^a$  y  $M^b$ , que en este último diagrama corresponden a las abscisas de los puntos fijos:  $\alpha L$ , del punto fijo izquierdo, y  $\beta L$ , del punto fijo derecho.

Entre estos valores  $M^a$  y  $M^b$  y los valores extremos  $M_1$  y  $M_2$  existen las relaciones, geométricamente evidentes:

$$\left. \begin{aligned} M^a &= M_1(1-\alpha) + M_2 \cdot \alpha \\ M^b &= M_1 \cdot \beta + M_2(1-\beta). \end{aligned} \right\} \quad [21]$$

Si en estas ecuaciones [21] introducimos los valores de  $M_1$  y  $M_2$  deducidos del sistema [20], y tenemos en cuenta la relación [14 bis], entre la rigidez  $k_1$  y la distancia  $\alpha L$  del foco izquierdo, y la [14] entre la rigidez  $k_2$  y la distancia  $\beta L$  del foco derecho, llegaremos, después de más o menos operaciones, a las extraordinariamente sencillas expresiones siguientes (1):

$$\boxed{\begin{aligned} M^a &= \alpha \cdot 6 K \alpha_0 \\ M^b &= \beta \cdot 6 K \beta_0 \end{aligned}} \quad [22]$$

Las abscisas unitarias  $\alpha$  y  $\beta$  de los puntos fijos fueron quedando determinadas, como vimos, al mismo tiempo que se iban calculando las rigideces de los nudos y los factores de transmisión (ábaco I, o expresiones algébricas equivalentes). Son función exclusiva de las características de la estructura.

Los valores  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  se encuentran, o se calculan, fácilmente. Son función de la carga que apliquemos.

Conocidos estos valores [22] de  $M^a$  y  $M^b$ , resulta fácil obtener los de los momentos  $M_1$  y  $M_2$ .

Basta trazar la recta que ellos nos definen. De todos modos era necesario trazar esta "línea de cierre" para conocer la ley de momentos flectores en la pieza. La construcción gráfica de esta línea da, en la práctica, exactitud suficiente.

(Y en el caso en que se quisiera tener las expresio-

(1) Estas expresiones son debidas a Wilhelm Ritter, que por vez primera las obtiene, por consideraciones geométricas, en el tomo III de sus *Anwendungen der Graphischen Statik* (1900), y no solamente para este caso particular de viga de inercia constante, sino asimismo para la viga de inercia variable. Una exposición, también geométrica y de lectura más asequible, se encuentra en *Der durchlaufende Träger*, del Prof. de Stuttgart Emil Mörsch.

E. Mörsch (1872-1950) residió en Suiza de 1904 a 1908, llamado por el Polytechnikum de Zürich, para dar cursos de ampliación sobre hormigón armado. De estos años son sus estudios sobre arcos y su contacto con la Estática Gráfica de Culmann, que tanto han diferenciado las obras de Mörsch de las de sus restantes colegas alemanes. La obra de W. Ritter ha encontrado también difusión gracias a las repetidas ediciones, dos de ellas póstumas, del *Methode der Festpunkte*, de E. Suter, que encabezó así su primera edición: "Dem Andenken an Prof. Dr. Wilhelm Ritter (1847-1906) gewidmet".

nes algébricas exactas de  $M_1$  y  $M_2$ , se deducirán, o bien directamente del sistema [20], o bien de las de  $M^a$  y  $M^b$ , mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M^a(1-\beta) - M^b \cdot \alpha}{(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha\beta} \\ M_2 &= \frac{M^b(1-\alpha) - M^a \cdot \beta}{(1-\alpha)(1-\beta) - \alpha\beta} \end{aligned} \quad [23]$$

que son las mismas [21] anteriores.)

Los momentos  $M_1$  y  $M_2$  acabados de calcular en los extremos de la barra  $AB$ , se distribuirán entre las restantes barras concurrentes en  $A$  y concurrentes en  $B$ , respectivamente, de modo proporcional a las rigideces de los extremos de cada una de ellas. Los momentos así distribuidos irán siendo transmitidos a los extremos opuestos de dichas barras, etcétera, etc.

\* \* \*

Basta que en la [20] hagamos  $k_1 = k_2 = \infty$ , para tener las relaciones que nos ligan los momentos de empotramiento perfecto,  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$ , con los giros característicos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  que la misma carga produce en la viga isostática:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{6K} = \frac{L}{6EI} (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2); \\ \beta_0 &= \frac{\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2}{6K} = \frac{L}{6EI} (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2), \end{aligned} \quad [24]$$

que son las ecuaciones conocidas antes como ecuaciones de Mohr (1835-1918), y que ahora resultan conocerse como del grupo de ecuaciones de la "slope-deflection" de Wilson and Maney de 1915.

Está más en boga últimamente el caracterizar una carga por los momentos de empotramiento que produciría en la viga perfectamente empotrada. La [24] nos dará a conocer los giros  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  en el caso de que sean estos valores de  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$  los que conozcamos.

Llevados estos valores [24] al sistema [22], tenemos el sistema siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} M^a &= \alpha (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2); \\ M^b &= \beta (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2), \end{aligned}} \quad [25]$$

que nos define la línea de cierre en función, ahora, de los momentos característicos de empotramiento perfecto y de las abscisas unitarias  $\alpha$  y  $\beta$  de los puntos fijos.

Inversamente, las ecuaciones [24] podemos utilizarlas para deducir los momentos de empotramiento

perfecto cuando lo conocido sean los giros característicos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= 2 K (2 \alpha_0 - \beta_0) = \frac{2 E I}{L} (2 \alpha_0 - \beta_0); \\ \bar{M}_2 &= 2 K (2 \beta_0 - \alpha_0) = \frac{2 E I}{L} (2 \beta_0 - \alpha_0). \end{aligned} \quad [26]$$

En particular, en la viga perfectamente empotrada,  $\alpha = \beta = 1/3$ , las ordenadas al tercio, de la línea de cierre, toman los valores (ver [22]):

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}^\alpha &= 2 K \cdot \alpha_0 = \frac{2 E I}{L} \cdot \alpha_0 \\ \bar{M}^\beta &= 2 K \cdot \beta_0 = \frac{2 E I}{L} \cdot \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad [27]$$

\* \* \*

Finalmente, los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  experimentados por los nudos  $A$  y  $B$  de la estructura se obtienen del modo más simple y más sencillo, por las relaciones:

$$\theta_1 = \frac{M_1}{k_1}, \quad \theta_2 = \frac{M_2}{k_2},$$

entre los momentos y las rigideces correspondientes.

Pero en los métodos en que no se opera específicamente con las rigideces, es menester recurrir a expresiones como las siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_0 - \frac{(2 M_1 + M_2) L}{6 E I} \\ \theta_2 &= \beta_0 - \frac{(M_1 + 2 M_2) L}{6 E I} \end{aligned} \quad [28]$$

que nos los dan en función de los giros  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  de la viga isostática y de los momentos hiperestáticos  $M_1$  y  $M_2$ . O bien por las expresiones:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\{2(\bar{M}_1 - M_1) - (\bar{M}_2 - M_2)\} L}{6 E I} \\ \theta_2 &= \frac{\{2(\bar{M}_2 - M_2) - (\bar{M}_1 - M_1)\} L}{6 E I} \end{aligned} \quad [29]$$

en función de los momentos reales  $M_1$  y  $M_2$  y de los  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$  que corresponderían a la viga perfectamente empotrada.

Podríamos seguir escribiendo más combinaciones algebraicas, que también se encuentran diseminadas por los textos, y que, complicadas con las variaciones de notación y aun con la innecesaria de formulación de un convenio de signos, ocultan su substancial identidad, dificultando la adopción de la que es más apropiada en cada caso. Veamos lo siguiente:

Tanto en el grupo de ecuaciones de W. Ritter,

$$\left. \begin{aligned} M^\alpha &= \alpha \cdot \frac{6 E I}{L} \alpha_0 \\ M^\beta &= \beta \cdot \frac{6 E I}{L} \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad [22 \text{ bis}]$$

como en el sistema [25], podemos apreciar que la

ordenada  $M^\alpha$  de la línea de cierre correspondiente al punto fijo izquierdo, depende de la carga exterior (carga que viene representada por el solo valor característico  $\alpha_0$ , en la [22], y por los dos valores característicos  $\bar{M}_1$  y  $\bar{M}_2$ , en la [25]), pero que es función lineal *exclusiva* de la abscisa unitaria  $\alpha$  de dicho foco izquierdo, siendo por completo independiente de la rigidez de la sustentación que tenga el extremo derecho  $B$  de la barra.

Y análogamente, la ordenada  $M^\beta$  depende, *exclusivamente*, de la rigidez de la sustentación del extremo  $B$ , siendo independiente de la rigidez que hayamos podido dar al extremo  $A$ .

Esta independencia mutua es la que permite la construcción de ábacos en los que simultáneamente podemos dar a uno y a otro de los extremos de la pieza rigideces que varíen desde la articulación hasta el empotramiento perfecto; es decir, cubrir todas las combinaciones de las infinitas sustentaciones posibles, tanto en uno como en otro de los extremos (1).

Esta facilidad que los sistemas [22] y [25] ofrecen para la determinación de la línea de cierre mediante los valores  $M^\alpha$  y  $M^\beta$ , deja de existir cuando se desean obtener directamente los valores  $M_1$  y  $M_2$  de los momentos de empotramiento elástico.

El grupo [23] nos permite ver que ni aun para carga simétrica existe simplificación, y que tanto  $M_1$  como  $M_2$  dependen, simultáneamente, de las rigideces de ambos extremos de la barra.

\* \* \*

Volviendo a las expresiones [22] de W. Ritter (2), y fijándonos en que para un determinado

(1) El grupo [22 bis] se ha prestado más fácilmente a las construcciones de la estática gráfica por la sencillez con que en sus fórmulas interviene la carga exterior. Ventaja que utilizamos aquí para la fácil construcción de los diversos ábacos que a continuación exponemos.

En el caso de cargas simétricas, resulta el grupo [25] de cálculo tan directo como el [22], pues al ser  $\bar{M}_A = \bar{M}_B = \bar{M}$ , toma la forma:

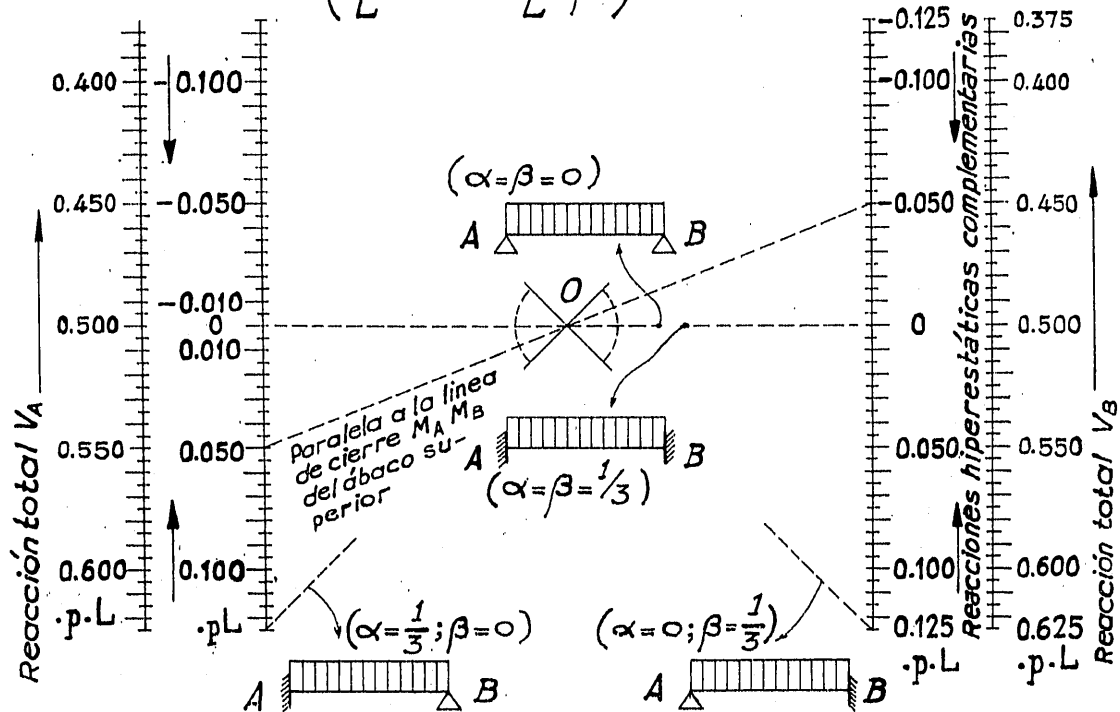
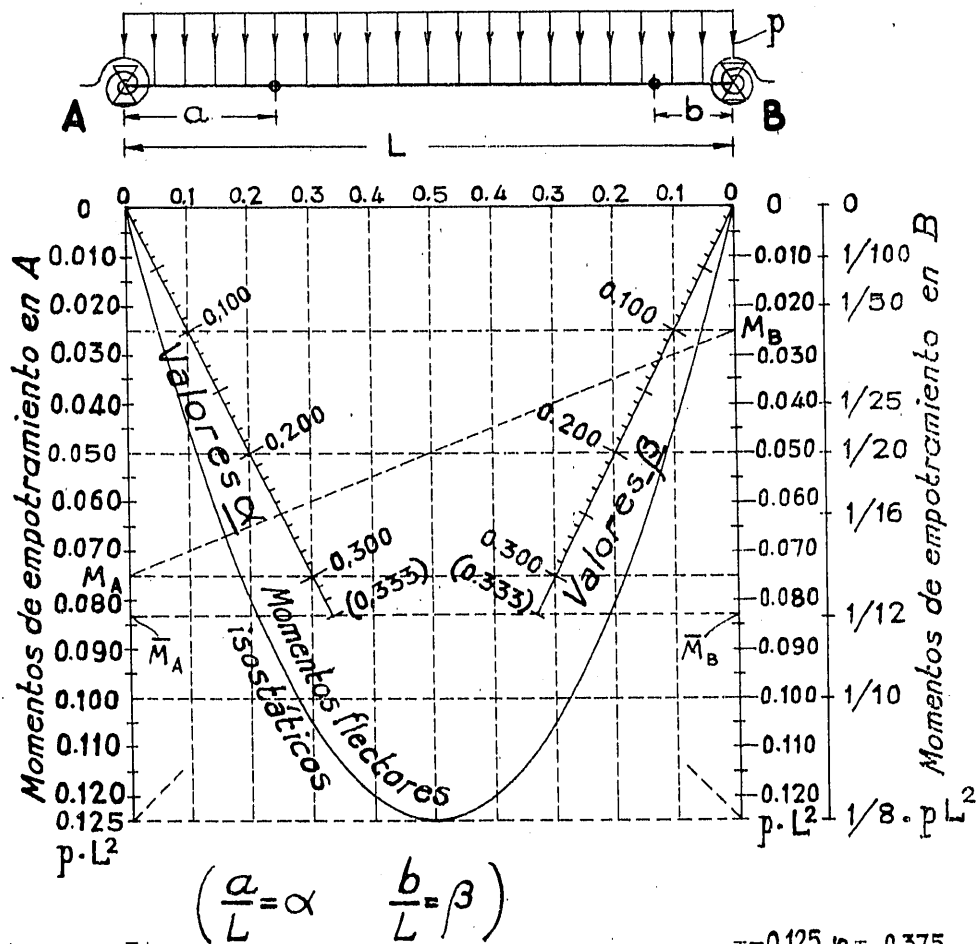
$$\left. \begin{aligned} M^\alpha &= \alpha \cdot 3 \bar{M} \\ M^\beta &= \beta \cdot 3 \bar{M} \end{aligned} \right\} \quad [25']$$

a la que, más adelante, volveremos a referirnos.

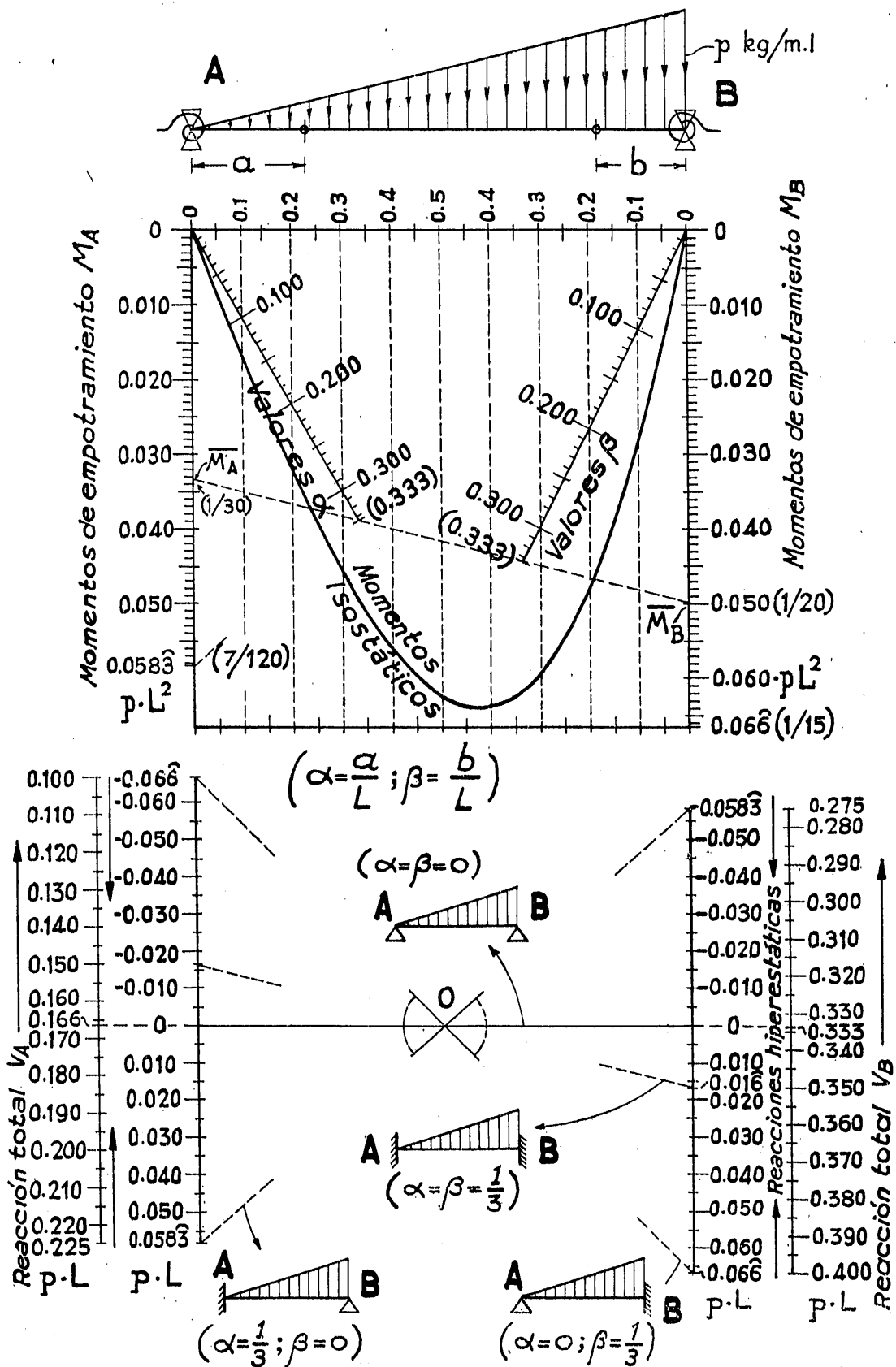
(2) Expresiones que, tanto Mörsch como los autores coetáneos: Max Ritter (1909), Suter (1916), Strassner (1916), y cuantos de éstos las toman, las escriben en la forma:

$$M^\alpha = \alpha \frac{\alpha_0}{\alpha_2}, \quad M^\beta = \beta \frac{\beta_0}{\beta_1}$$

(en las que  $\alpha_2$  es el giro del extremo  $A$  de la viga isostática producido por un par unidad aplicado en  $B$ , y  $\beta_1$ , el giro en  $B$  producido por un par unidad aplicado en el extremo  $A$  de la viga isostática  $AB$ ), con lo que las fórmulas quedan desprovistas de homogeneidad. Son los inconvenientes de esas inocentes simplificaciones, como las de tomar  $E=1$ , o la de operar con rigideces relativas, que dificultan finalmente mucho más de lo que han podido facilitar antes abreviando la escritura.



Abaco III.—Viga elásticamente empotrada, sometida a sobrecarga uniforme. Entrando en el ábaco superior con los valores unitarios  $\alpha$  y  $\beta$  de los puntos fijos, se tiene directamente la línea de cierre y los momentos de empotramiento  $M_A$  y  $M_B$ . Una paralela a esta línea trazada en el ábaco inferior, da los valores de las reacciones de apoyo  $V_A$  y  $V_B$ .



Abaco IV.—Viga elásticamente empotrada, sometida a sobrecarga triangular. Uniendo los puntos correspondientes a los valores  $\alpha$  y  $\beta$ , se obtiene, en el ábaco superior, la línea de cierre, los momentos  $M_A$  y  $M_B$  y el diagrama de momentos. Una paralela a la línea de cierre da, en el ábaco inferior, las reacciones en los apoyos.

tipo de carga, por ejemplo, carga uniforme en toda la longitud (fig. 12-a), o carga triangular (fig. 12-b), los ángulos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  están ya perfectamente caracterizados y conocidos, basta llevar en las verticales de  $A$  y  $B$  los valores de  $6K\beta_0$  y  $6K\alpha_0$ , respectivamente, cuyas dimensiones son las de un momento, para que, sea cual sea la sustentación elástica que realmente tenga la barra, es decir, sea cuales sean las rigideces  $k_1$  y  $k_2$  de sus apoyos, o, lo que es lo mismo, sean cuales sean las posiciones  $\alpha \cdot L$  y  $\beta \cdot L$

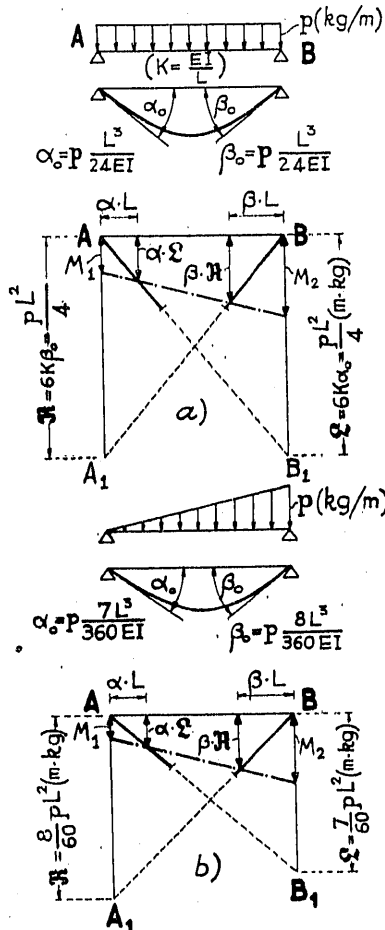


Fig. 12. — Construcción de los ábacos III y IV.

de sus puntos fijos, podamos medir directamente en las verticales de estos puntos fijos los valores [22], o trazar directamente la línea de cierre y leer los valores de los momentos de empotramiento elástico  $M_1$  y  $M_2$ , sin necesidad de más cálculo ni operaciones.

Estos valores  $6K\alpha_0 = \mathcal{L}$  y  $6K\beta_0 = \mathcal{R}$ , a medir en la escala de momentos flectores, son los "términos de carga" que ha tabulado A. Kleinlogel para

una gran variedad de casos de carga. Las rectas  $AB_1$  y  $A_1B$  que los definen (fig. 12), son las "líneas en cruz" de la estática gráfica. En dichas figuras se aprecia claramente cuanto se acaba de decir y son la justificación de los ábacos III y IV.

En estos ábacos y para mayor comodidad, se han trazado, sobre las propias líneas en cruz, las escalas correspondientes a las abscisas unitarias  $\alpha$  y  $\beta$  de los puntos fijos, que varían desde los valores  $\alpha = \beta = 0$ , correspondientes a viga isostáticamente apoyada, hasta los  $\alpha = \beta = 1/3$ , correspondientes a la rigidez absoluta de los apoyos.

Se ha representado, además, en estos ábacos, la ley de momentos flectores isostáticos producidos por la carga. Con ello es inmediato el dibujo total del diagrama de momentos a que está sometida la viga, y que es inevitable obtener si en la estructura queremos conocer las envolventes que han de señalarnos los máximos esfuerzos.

En el ábaco III aparece señalado, como ejemplo, el efecto que una carga uniforme ejercería en una viga elásticamente sustentada, cuyos focos estuviesen a las distancias unitarias  $\alpha = 0,25$  y  $\beta = 0,125$ . Los momentos de empotramiento valdrían:

$$M_A = 0,075 p L^2 = \frac{3 p L^2}{40}; \quad M_B = 0,025 p L^2 = \frac{p L^2}{40},$$

y el máximo positivo sería  $M_{\text{máx}} = 0,076 p L^2$  y tendría lugar en el punto de abscisa  $0,55 L$ .

La parte inferior de estos ábacos III y IV dan, además, los valores de las reacciones debidas a los momentos hiperestáticos, es decir, los valores:

$$\pm \frac{M_A - M_B}{L},$$

y en las escalas exteriores pueden leerse los valores de las reacciones totales (isostáticas más hiperestáticas) en los apoyos  $A$  y  $B$ .

En el ejemplo numérico anterior esa carga uniforme provocaría unas reacciones totales:

$$V_A = 0,55 \cdot p L \quad \text{y} \quad V_B = 0,45 \cdot p L,$$

quedando así determinados, sin operaciones, cuantos elementos nos son necesarios para el cálculo (I).

(Continuará.)

(1) Si en los citados ábacos vamos suponiendo los valores particulares:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \alpha = 0, \beta = 1/3, \quad \alpha = 1/3, \beta = 0, \quad \text{y} \quad \alpha = \beta = 1/3,$$

obtendremos los valores de momentos flectores y de reacciones que exclusivamente en estos casos extremos (viga apoyada-apoyada; viga apoyada-empotrada, y viga empotrada-empotrada), se encuentran en los manuales.