

# DETERMINACION DE LA DISTRIBUCION DEL OLEAJE EN PROFUNDIDADES REDUCIDAS

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ,  
Ingeniero de Caminos.

*El primer plano de oleaje se estudió para el puerto de Motrico en el año de 1932, indicando el empleo de la expresión de la celeridad  $c = \sqrt{gH}$ , correspondiente a las ondas de traslación, sólo aceptablemente aproximada en profundidades reducidas.*

*Desarrollado y afinado el método de los planos de oleaje mediante el empleo de las celeridades más reales correspondientes a todas las profundidades, fué publicado en esta REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS el año de 1941, iniciando una nueva etapa en el proyecto de las obras marítimas.*

*Posteriormente se ha pretendido repetidas veces, en el extranjero, modificarlo mediante desarrollos de cálculo que, generalmente, exigen simplificaciones menos aproximadas a la realidad del fenómeno.*

*En el artículo que hoy publicamos se desarrollan interesantes cálculos a base de volver a asimilar el oleaje a las ondas de traslación y de la utilización de la expresión de sus celeridades  $c = \sqrt{gH}$ , sólo aplicable a profundidades reducidas, aconsejándose el empleo de las celeridades del método de los planos de oleaje, que son generales, para profundidades menos reducidas.*

*Son satisfactorias y lógicas las coincidencias que se señalan con los planos de oleaje, pues en profundidades reducidas, que es donde únicamente puede aplicarse, es fundamentalmente el mismo método.*

## I

### 1. Introducción.

El estudio de las olas en las proximidades de la costa, cuando al ir variando las profundidades perturban la propagación de aquéllas es tema muy interesante para la Ciencia y la Ingeniería.

En particular vamos a referirnos a los fondos en declive, o sea a las playas y rampas, naturales o artificiales, en que las reflexiones puedan tener tan poca importancia que cada ola no afecte sensiblemente la propagación de la siguiente.

La distribución del oleaje — supuesto en alta mar con una dirección definida y estabilizada — se modifica en las proximidades de la costa a causa de las variaciones de la profundidad.

Por tanto, hemos de tener a la vista las líneas batimétricas de la zona a estudiar y la dirección y características (altura, longitud y período) de la ola en alta mar.

Con estos datos, de modo más o menos aproximado y haciendo determinadas hipótesis, partiendo la mayor parte de ellas del estudio de ondas planas y extendiéndolo con cautela a las de dos dimensiones, se estudia la marcha de las ondas periódicas considerando el progresivo avance de sus frentes.

En particular, tenemos en España el método de los planos de oleaje del Prof. Iribarren, aplicado ya

en el extranjero, y que indudablemente constituye un instrumento cómodo y de fácil manejo para estudios de emplazamiento de puertos, transportes de arenas, etc., etc.

Nos proponemos en este escrito dar, en forma matemática, la propagación de las olas, estableciendo expresiones sencillas que permitan la aplicación gráfica inmediata de la teoría, empleando tanto los rayos como los frentes de ondas.

En algunos casos particulares damos incluso la expresión analítica de dichos frentes de onda y de los rayos o trayectorias ortogonales a aquéllos.

También deducimos la variación de la amplitud o altura de la ola al irse acercando a la costa. Con claridad veremos cómo se incurva la ola en cada punto al variar la dirección en que llega a un fondo determinado.

Cotejamos nuestros resultados con los expuestos por el Sr. Iribarren en los planos de oleaje, comprobando lo acertado de su método, que, justificado por otros razonamientos también aproximados, concuerda, en su mayor parte, con el que exponemos.

Partiremos de las ecuaciones de continuidad y de Euler, de la Hidrodinámica clásica.

Por combinación de ambas obtenemos para la amplitud una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico. Estudiamos la propagación de pequeñas perturbaciones — discontinuidades finitas de la amplitud de onda —, aplicando la teoría de las características de las ecuaciones diferen-

ciales, cuyas soluciones discontinuas se obtienen como límites de soluciones continuas.

La ecuación diferencial se reemplaza así por una condición integral.

Se llega a la conclusión que los saltos de amplitud no pueden estar sino en determinadas superficies del espacio  $(x, y, t)$  que forman el haz de características. La intersección de una de estas superficies con los planos  $t = \text{const.}$ , dan, al proyectarlas sobre el plano  $X O Y$ , una familia de curvas con un parámetro, llamadas *frente de onda*.

La función de  $x$  e  $y$  de los frentes de onda satisface una ecuación en derivadas parciales de primer orden y de segundo grado. Esta ecuación coincide con la de Hamilton de las eikonales de la Optica geométrica en un medio no homogéneo cuyo índice de refracción es  $\frac{1}{c}$  (siendo  $c$  la celeridad, función sólo de la profundidad  $H$ ).

La variación de la amplitud va implícita en la que llamaremos *ecuación de transporte*, que, del mismo modo que la ecuación del frente de onda, es consecuencia de la ecuación integral que satisface dicha amplitud de onda, obtenida anteriormente.

## 2. Ecuación de continuidad.

Consideremos la velocidad del flujo líquido hacia el interior de un prisma vertical limitado por los planos  $x, x + dx, y, y + dy$ .

En la figura 1.<sup>a</sup>,  $A B C D$  es la superficie no perturbada;  $A' B' C' D'$ , el fondo del líquido, y  $A'' B'' C'' D''$ , la superficie móvil que en el punto  $(x, y)$  tiene la altura  $A A'' = \zeta(x, y, t)$  sobre  $A B C D$ .

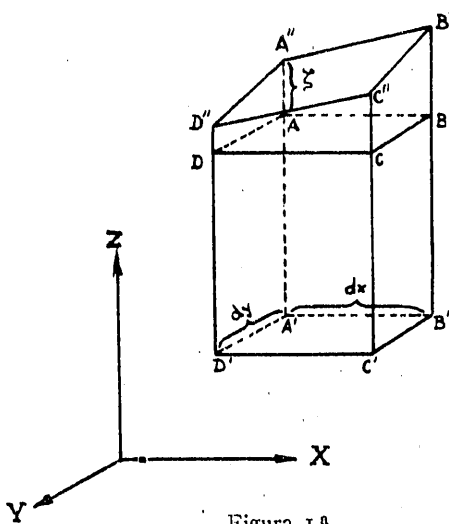


Figura 1.<sup>a</sup>

Para determinar la velocidad del flujo hacia el interior del prisma a través de la cara  $A' A'' D'' D'$ , si llamamos  $u, v, w$  a las componentes de la velocidad  $\vec{V}$  del fluido, es evidente que tiene por valor:

$$[u(H + \zeta) dy]_x,$$

producto de la velocidad  $u$ , normal a la cara, por su superficie  $(H + \zeta) dy$ .

La velocidad del flujo hacia el exterior a través de  $B' B'' C'' C'$  es:

$$[u(H + \zeta) dy]_{x+dy}.$$

El resultado neto para estos dos planos es:

$$-\frac{\partial}{\partial y} [u(H + \zeta)] dx dy.$$

Del mismo modo, entre los planos  $A' B' B'' A''$  y  $C' C'' D'' D'$  hay la ganancia:

$$-\frac{\partial}{\partial y} [v(H + \zeta)] dx dy.$$

La ganancia total se compensará con la elevación de nivel en el interior del prisma  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy$ , con lo que resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial x} [u(H + \zeta)] dx dy - \frac{\partial}{\partial y} [v(H + \zeta)] dx dy = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy.$$

Despreciando términos como  $u \zeta, v \zeta$ , queda:

$$\frac{\partial (H u)}{\partial x} + \frac{\partial (H v)}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad [2-1]$$

que es la *ecuación de continuidad* para movimientos ondulatorios en *dos dimensiones*. Hemos supuesto que el líquido es incompresible de densidad constante  $\rho$  y de viscosidad despreciable. La velocidad no varía con las distintas profundidades; el líquido se mueve de tal forma, que las partículas situadas en una vertical siguen siempre en una vertical, que es como si la anterior se desplazase en conjunto. Se trata, pues, de ondas cuya longitud es bastante mayor que la profundidad del líquido. En ellas, la aceleración vertical del líquido se desprecia frente a la aceleración horizontal.

### 3. Ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones de Euler de la Hidrodinámica aplicadas a flúidos incompresibles son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned}$$

o:

$$\begin{aligned} \frac{D u}{D t} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{D v}{D t} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{D w}{D t} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned}$$

que pueden reunirse en forma vectorial en la  $\frac{D \vec{V}}{D t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$ ;  $\vec{F}$ , de componentes  $F_x F_y F_z$ , es la fuerza exterior que actúa en cada punto sobre la masa unidad de líquido. Si la única fuerza exterior es la gravedad:

$$\vec{F} = -g \vec{z} \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -g \end{cases} \frac{D \vec{V}}{D t}$$

es la llamada derivada total de  $\vec{V}$ , o sea la aceleración;  $p$  es la presión cuyo gradiente es el vector que tiene de componentes:

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Como hemos dicho, refiriéndonos a ondas en aguas poco profundas, pueden desprejarse las aceleraciones verticales, o sea que  $\frac{D w}{D t} = 0$ . Con ello, la tercera ecuación de Euler se reduce a:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \text{ o sea: } p = \rho g z + \text{const.}$$

Si se toma el eje  $z$  orientado positivamente hacia arriba y el plano  $X O Y$  en la superficie libre no perturbada; si  $\zeta(x, y, t)$  es la sobre-elevación del agua sobre el punto de coordenadas  $(x, y, 0)$  en el instante  $t$ , como la presión atmosférica es  $p$ , deberá ser  $p = p_0$  cuando  $z = \zeta$ , por lo cual  $p$  toma la forma  $p = p_0 + g \rho (\zeta - z)$ . Al substituir este valor en las

dos primeras ecuaciones de Euler, y teniendo en cuenta lo expuesto, queda:

$$\begin{aligned} \frac{D u}{D t} &= g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ \frac{D v}{D t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero los términos  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ , etc., son de segundo orden, pues puede suponerse que la variación de la velocidad de puntos próximos del flúido es pequeña. Por otra causa, las dos ecuaciones anteriores se simplifican aún más y resultan las:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}} \quad [3-1] \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

como ecuaciones del movimiento para los movimientos de ondas que nos interesa estudiar

### 4. Ecuación de la amplitud de onda.

Eliminemos  $u$  y  $v$  entre la ecuación de continuidad y las del movimiento. Para ello, desarrollemos las derivadas parciales de la ecuación de continuidad, con lo que resulta:

$$u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Derivando con respecto a  $t$ , como  $H$  y sus derivadas parciales son funciones de  $x$  e  $y$ , pero no de  $t$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial y} + H \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] &= \\ &= - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Substituyendo  $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial y}$  por sus valores obtenidos en las ecuaciones [3-1] del movimiento, resulta:

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} &= H g \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] = - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

que puede escribirse en la forma:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}} \quad [4-1]$$

Es la ecuación en derivadas parciales de segundo

orden — de tipo hiperbólico — que debe satisfacer la amplitud  $\zeta$ , función de  $x, y, t$ . En ella interviene, como es lógico, la profundidad  $H$ , variable en general, en cada punto. En caso muy particular, en que dicha profundidad  $H$  es constante, se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{gH} \quad [4-2]$$

que es la ecuación usual del movimiento ondulatorio en dos dimensiones.

La ecuación [4-1] puede escribirse en la forma:

$$\text{div}(c^2 \text{grad } \zeta) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad [4-3]$$

como se comprueba inmediatamente, ya que:

$$\begin{aligned} \text{div}(c^2 \text{grad } \zeta) &= [\text{grad } c^2 \text{grad } \zeta] + c^2 \Delta \zeta = \\ &= \frac{\partial(c^2)}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial(c^2)}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = \\ &= g \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + gH \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

$\Delta$  es el operador de Laplace o laplaciano:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Nos va a interesar, por facilitarse así el desarrollo de los cálculos, emplear, en vez de  $\zeta$ , las variables  $U, c$  relacionadas por:

$$U = c\zeta = \sqrt{gH} \cdot \zeta \quad [4-4]$$

Veamos en qué se transforma la ecuación [4-1].

Como  $\zeta = \frac{U}{c}$ , las derivadas parciales primeras y segundas de  $\zeta$ , serán:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{1}{c^2} \left( c \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial c}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{1}{c^2} \left( c \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial c}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \left( c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) - \frac{2}{c^3} \frac{\partial c}{\partial x} \left( c \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial c}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \left( c \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - U \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - \frac{2}{c^3} \frac{\partial c}{\partial y} \left( c \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial c}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} [4-5]$$

Como  $H = \frac{c^2}{g}$ , las derivadas de  $H$  son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial x}; \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial y}. \end{aligned} \right\} [4-6]$$

Sustituyendo en [4-1] los valores de [4-5] y [4-6], resulta, después de simplificar:

$$\Delta U - U \frac{\Delta c}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad [4-7]$$

## 5. Relación integral equivalente (\*).

Consideremos un dominio,  $G$ , de tres dimensiones,  $x, y, t$ , limitado por la superficie  $\Gamma$ . Sea  $V$  una función arbitraria que toma el valor cero sobre  $\Gamma$  y exteriormente a  $G$ . En  $G$  es continua, así como sus derivadas. Su derivada normal  $\frac{\partial V}{\partial n}$  en  $\Gamma$ , es nula.

Si llamamos, por abreviar,

$$L(X) = \Delta X - X \frac{\Delta c}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \quad [5-1]$$

o sea que  $L(U)$  sería el primer miembro de la ecuación [4-7], resulta, al aplicar el teorema de Green (fig. 2.<sup>a</sup>) al recinto  $G$  limitado por la superficie  $\Gamma$ , que:

$$\begin{aligned} \iint_G [VL(U) - UL(V)] dx dy dt &= \iint_G [(V\Delta U - U\Delta V) - \\ &- \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (V \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial V}{\partial t})] dx dy dt = \\ &= \iint_{\Gamma} [(V \text{grad } U - U \text{grad } V) \times \vec{n} - \\ &- \frac{1}{c^2} (V \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial V}{\partial t}) n_t] dS = 0. \end{aligned} \quad [5-2]$$

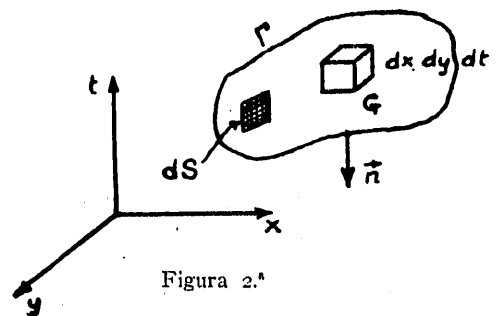


Figura 2.<sup>a</sup>

(\*) Ver: Friedrichs: "Water Waves on a Shallow Sloping Beach". *Comm. on Appl. Math.*, vol. I, núm. 2.  
Lowell: "The Propagation of Waves in Shallow Water".  
Idem id., vol. II, núms. 2 y 3.

El signo  $\times$  significa producto escalar;  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a  $\Gamma_0$ , y  $\frac{\partial t}{\partial n}$ , la derivada de  $t$  respecto la dirección  $\vec{n}$ . Estas integrales han resultado nulas por las hipótesis hechas respecto a la función  $V$ . Por tanto, se deduce que

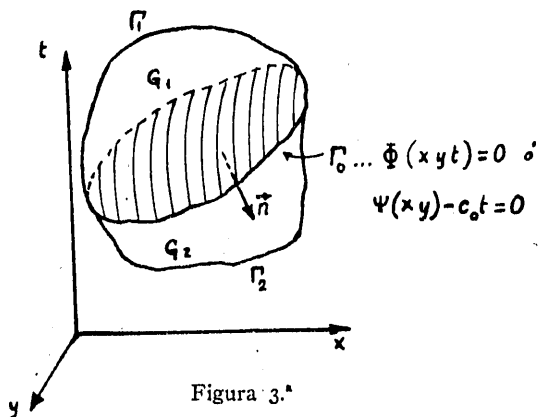
$$\boxed{\int \int \int_G UL(V) dx dy dt = 0} \quad [5-3]$$

si  $U$  es continua en  $G$ , así como sus derivadas, satisfaciendo la ecuación diferencial [4-7], o sea:

$$\boxed{L(U) = 0} \quad [5-4]$$

Generalicemos este resultado para cuando  $U$  y sus derivadas no son continuas en  $G$ . Supongamos que tengan discontinuidades o saltos a través de una superficie  $\Gamma_0$ , sección de  $G$ , pero que sean continuas en las dos regiones  $G_1$  y  $G_2$  (fig. 3.<sup>a</sup>). Apliquemos ahora el teorema de Green a cada uno de los subdominios  $G_1$  y  $G_2$ , limitados respectivamente por las superficies  $\Gamma_0 \Gamma_1$  y  $\Gamma_0 \Gamma_2$ . Sea la ecuación de la superficie  $\Gamma_0 \dots \Phi(x, y, t) = 0$ .

Siendo  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$ , podrá despejarse  $t$  en función de



$x, y$ , y la ecuación de  $\Gamma_0$  podrá ponerse en la forma:

$$\boxed{\Phi(x, y, t) = \psi(x, y) - c_0 t = 0} \quad [5-5]$$

en la que  $c_0 = \sqrt{g H_0}$  es una constante arbitraria.  $\psi(x, y)$  tendrá las dimensiones de una amplitud por ser  $c_0$  una velocidad. Estaríamos ante una super-

ficie de discontinuidad móvil. Por aplicación del teorema de Green a  $G$ , obtenemos:

$$\boxed{- \int \int \int_{G_1} UL(V) dx dy dt = \int \int_{\Gamma_0} \left\{ (V \text{grad } U - U \text{grad } V) \times \text{grad } \psi + \frac{c_0}{c^2} \left( V \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} \frac{dS}{\omega}} \quad [5-6]$$

siendo:

$$\omega = V(\text{grad } \psi)^2 + c_0^2. \quad [5-7]$$

Lo cual se deduce del mismo modo que anteriormente aplicando dicho teorema y sabiendo, además, que por [5-3]  $L(U) = 0$ , y que por la ecuación [5-4] de  $\Gamma_0$ , ya que:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} = \frac{\text{grad } \Phi}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2}} \\ &= \frac{\text{grad } \psi - c_0 \vec{t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + c_0^2}} = \frac{\text{grad } \psi - c_0 \vec{t}}{\sqrt{|\text{grad } \psi|^2 + c_0^2}} \end{aligned}$$

y  $n_t$ , siendo la proyección del vector  $\vec{n}$  unitario sobre el eje  $O t$  representa el coseno del ángulo  $\theta$  que el elemento de superficie  $dS$  forma con dicho eje, es decir, que:

$$\begin{aligned} \cos \theta = n_t &= \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2}} \\ &= \frac{-c_0}{\sqrt{|\text{grad } \psi|^2 + c_0^2}} = -\frac{c_0}{\omega}. \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores de  $\vec{n}$  y  $n_t$  en [5-2], obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma_0} \left[ (V \text{grad } U - U \text{grad } V) \times \frac{\text{grad } \psi - c_0 \vec{t}}{\omega} + \frac{1}{c^2} \left( V \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial V}{\partial t} \right) \frac{c_0}{\omega} \right] dS, \end{aligned}$$

que es lo escrito en [5-6] en su segundo miembro.

Del mismo modo, aplicando el teorema de Green a  $G_2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} - \int \int \int_{G_2} UL(V) dx dy dt = - \int \int_{\Gamma_0} \left\{ (V \text{grad } U - U \text{grad } V) \times \text{grad } \psi + \frac{c_0}{c^2} \left( V \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} \frac{dS}{\omega}. \quad [5-8] \end{aligned}$$

El cambio de signo es debido a que la normal  $\vec{n}$  está dirigida del subdominio  $G_1$  hacia el  $G_2$ .

La suma de [5-6] y [5-8] es nula. Si indicamos por  $|x|_2^1 = x_1 - x_2$  la discontinuidad o salto que una cantidad (escalar o vectorial) experimenta al atravesar  $\Gamma_0$ , resulta que la suma en cuestión es:

$$0 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left( V \left| \text{grad } U \right|_2^1 - \left| U \right|_1^2 \text{grad } V \right) \times \text{grad } \psi + \frac{c_0}{c^2} \left( V \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|_2^1 - \left| U \right|_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} \frac{dS}{\omega} \quad [5-9]$$

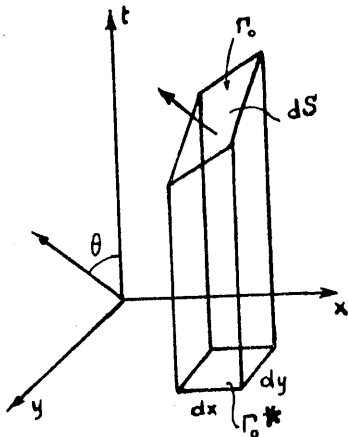


Figura 4.<sup>a</sup>

Si  $\Gamma_0^*$  es la proyección de la superficie  $\Gamma_0$  (fig. 4.<sup>a</sup>) sobre el plano  $XY$ , como entre los elementos de superficie se verifica que:

$$dx dy = dS \cos \theta = dS \frac{c_0}{\omega}$$

A causa de [5-5]  $t = \frac{1}{c_0} \psi(x, y)$ , resultando que  $U(x, y, t)$  y sus derivadas son ahora únicamente funciones de  $x$  e  $y$ :

$$U = U \left( x, y, \frac{1}{c_0} \psi(x, y) \right)$$

$$V = V \left( x, y, \frac{1}{c_0} \psi(x, y) \right)$$

Como:

$$\left| \text{grad } U \right|_2^1 = \text{grad } \left| U \right|_2^1 - \left| \frac{1}{c_0} \frac{\partial U}{\partial t} \right|_2^1 \text{grad } \psi;$$

$$\text{grad } V = \text{grad } \left| V \right|_2^1 - \left| \frac{1}{c_0} \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2^1 \text{grad } \psi;$$

sustituyendo en [5-9], resulta, al integrar sobre  $\Gamma_0$ :

$$0 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left( V \left[ \text{grad } \left| U \right|_2^1 - \left| \frac{1}{c_0} \frac{\partial U}{\partial t} \right|_2^1 \right] - \left| U \right|_1^2 \left[ \text{grad } \left| V \right|_2^1 - \left| \frac{1}{c_0} \frac{\partial V}{\partial t} \right|_2^1 \right] \text{grad } \psi \right) \times \text{grad } \psi + \frac{c_0}{c^2} \left( V \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|_2^1 - \left| U \right|_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right\} dx dy.$$

Agrupando convenientemente:

$$0 = \int_{\Gamma_0^*} \left\{ \left| U \right|_2^1 \left( \text{grad } \left| V \right|_2^1 \times \text{grad } \psi - \left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1 (\text{grad } \psi)^2 + \left( \frac{c_0}{c} \right)^2 \left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1 \right) - \left| V \right|_2^1 \left( \text{grad } \left| U \right|_2^1 \times \text{grad } \psi - \left| \frac{\partial U}{c_0 \partial t} \right|_2^1 (\text{grad } \psi)^2 + \left( \frac{c_0}{c} \right)^2 \left| \frac{\partial U}{c_0 \partial t} \right|_2^1 \right) \right\} dx dy;$$

$$= \int_{\Gamma_0^*} \left( \left| U \right|_2^1 \text{grad } \left| V \right|_2^1 - \left| V \right|_2^1 \text{grad } \left| U \right|_2^1 \right) \times \text{grad } \psi dx dy + \int_{\Gamma_0^*} \frac{1}{c^2} \left\{ \left( \left| U \right|_2^1 \left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1 - \left| \frac{\partial U}{c_0 \partial t} \right|_2^1 \left| V \right|_2^1 \right) (c_0^2 - c^2 (\text{grad } \psi)^2) \right\} dx dy.$$

Si integramos por partes el primer sumando de la primera integral de este segundo miembro, usando el teorema de Green y teniendo en cuenta que  $V^2$  se anula en el contorno de la curva de  $\Gamma_0^*$ , obtenemos finalmente:

$$0 = - \int_{\Gamma_0} V \left\{ \text{div} \left( \left| U \right|_2^1 \text{grad } \psi \right) + \text{grad } \left| U \right|_2^1 \times \text{grad } \psi \right\} dx dy + \int_{\Gamma_0} \frac{1}{c^2} \left( \left| U \right|_2^1 \left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1 - \left| \frac{\partial U}{c_0 \partial t} \right|_2^1 \left| V \right|_2^1 \right) (c_0^2 - c^2 (\text{grad } \psi)^2) dx dy. \quad [5-10]$$

Esta relación integral puede reemplazar a la ecuación diferencial [4-1] ó [4-7].

## 6. Ecuaciones fundamentales.

En la ecuación [5-10] podemos hacer las siguientes hipótesis con relación a  $\left| V \right|_2^1$  y  $\left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1$ , ya que  $V$  es una función arbitraria (que cumple determinadas condiciones).

Llamemos  $I_1$  e  $I_2$  a las dos integrales de [5-10],  $0 = I_1 + I_2$ .

Primera hipótesis:  $\left| V \right|_2^1 = 0$ , pero  $\left| \frac{\partial V}{c_0 \partial t} \right|_2^1 \neq 0$  y arbitraria en  $\Gamma_0$ ; y desde luego, nula en el con-

torno de  $\Gamma_0$ . Como entonces  $I_2 = 0$ , será preciso, para que se cumpla siempre [5-10], que:

$$\boxed{c_0^2 - c^2 (\text{grad } \psi)^2 = 0} \quad [6-1]$$

que llamaremos ecuación del frente de onda (análoga a la eikonal de la Óptica geométrica).

*Segunda hipótesis:* Si tomamos  $|V|_2^1 \neq 0$  y arbitraria en  $\Gamma_0$  y, como antes, nula en su contorno a causa de [6-1], y para que se cumpla [5-10], será  $I_1 = 0$ , o sea que:

$$\boxed{\text{div} (|U|_2^1 (\text{grad } \psi)) + \text{grad } |U| \times \text{grad } \psi = 0} \quad [6-2]$$

que llamaremos ecuación de transporte.

Observemos que se reduce a una ecuación diferencial de primer orden a lo largo de trayectorias ortogonales al contorno de  $\Gamma_0^*$ .

Vemos en lo expuesto:

1.º Que la superficie de discontinuidad  $\psi(x, y) - c_0 t = 0$  no es arbitraria, sino que tiene que satisfacer a una ecuación diferencial de primer orden, que es la [6-1], o sea:

$$g H_0 - g H(x, y) \left[ \left( \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] = 0$$

y de segundo grado, cuya solución depende de la profundidad  $H(x, y)$  en cada punto.

2.º La discontinuidad en la amplitud de onda, o sea de:

$$\zeta(x, y, t) = \frac{U(x, y, t)}{c(x, y)} = \frac{U(x, y, t)}{\sqrt{g \cdot H(x, y)}}$$

satisface una ecuación diferencial ordinaria a lo largo de trayectorias ortogonales a los frentes de onda.

### 7. Frentes de onda.

Supongamos que en el instante  $t = 0$  la amplitud o sobreelevación  $\zeta$  sea nula en todo el plano  $x, y$  (figura 5.<sup>a</sup>), excepto en una cierta región,  $\Gamma_0^*$ , limitada por la curva  $C$ . Pasado algún tiempo;  $t > 0$ , dicha sobreelevación se habrá extendido en un área mayor, limitada por una nueva curva  $C$ . A dichas curvas las llamaremos frentes de onda. Constituyen,

sobre el plano  $X O Y$ , el haz de curvas con un parámetro, y cuya ecuación es:

$$\psi(x, y) = C_0 t.$$

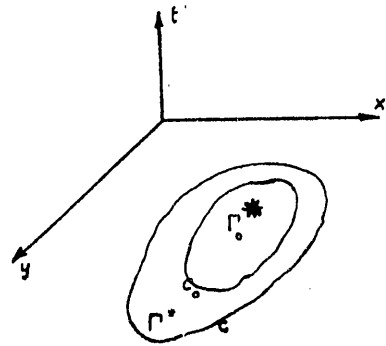


Figura 5.<sup>a</sup>

La función  $\psi$  ya vimos anteriormente que tiene que ser solución de la ecuación:

$$|\text{grad } \psi|^2 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{g H_0}{g H} = \frac{H_0}{H} \quad (*)$$

### 8. Rayos.

Sea  $d\sigma$  la longitud del elemento de arco de una de las curvas (constituyen una familia con dos parámetros) de trayectorias ortogonales a los frentes de onda (fig. 6.<sup>a</sup>).

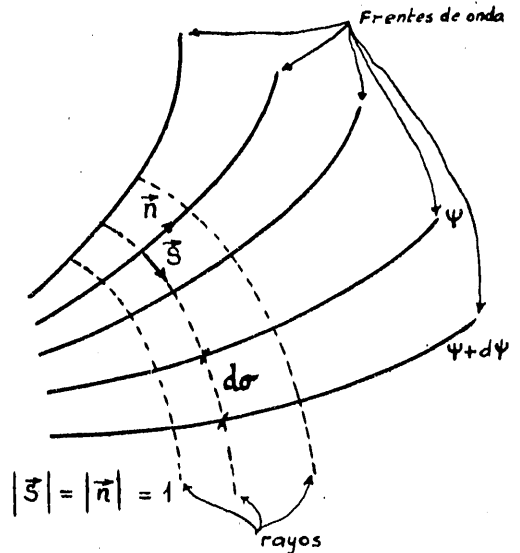


Figura 6.<sup>a</sup>

(\*) Esta expresión es, en realidad, la forma matemática del método de los planos de oleaje del Profesor Iribarren.

Por definición de gradiente de  $\psi$ :

$$|\text{grad } \psi| = \frac{d\psi}{d\sigma};$$

como:

$$|\text{grad } \psi| = \frac{c_0}{c},$$

queda al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\psi} &= \frac{c}{c_0}, \\ \psi(x, y) &= c_0 t \\ \frac{d\psi}{dt} &= c_0. \end{aligned}$$

Multiplicando estas dos últimas igualdades resulta:

$$\frac{d\sigma}{dt} = c = \sqrt{gH};$$

es decir, que la velocidad a que avanza el frente de onda (velocidad de señal), es función, en cada punto, únicamente de la profundidad  $H$ .

Las trayectorias ortogonales a los frentes de onda  $\psi(x, y) = c_0 t$  pueden obtenerse para cada solución particular  $\psi$ .

En efecto: Sea  $\vec{S}$  el vector unitario  $|\vec{S}| = 1$  tangente a un rayo en un punto  $P$  del frente de onda  $\psi(x, y) = c_0 t$ .

Evidentemente:

$$\vec{S} = \frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|} = \frac{\text{grad } \psi}{c_0/c}.$$

Por lo visto anteriormente:

$$|\text{grad } \psi| = \frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{c_0}{c};$$

de donde:

$$\frac{d\psi}{c_0} = \frac{d\sigma}{c}.$$

Y dividiendo por  $dx$ , queda:

$$\frac{1}{c} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Derivando con respecto a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \frac{d\sigma}{dx} \right) &= \frac{d}{c_0} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = \\ &= \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_0}{c} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial x}. \end{aligned}$$

Igualmente, con respecto a  $y$ :

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \frac{d\sigma}{dy} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \log c}{\partial y}.$$

Como  $\frac{dx}{d\sigma}$ ,  $\frac{dy}{d\sigma}$  son las proyecciones del vector unitario  $S$  sobre los ejes  $O X$ ,  $O Y$ , las dos ecuaciones anteriores pueden agruparse en la ecuación vectorial:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \vec{S} \right) = -\frac{1}{c} \text{grad}(\log c). \quad [8-1]$$

Pero como el desarrollo de la derivada del primer miembro es:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \sigma} \vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{S}}{d\sigma}.$$

Y como según la primera fórmula de Frenet, si  $n$  es el vector unitario normal a  $\vec{S}$ :

$$\frac{d\vec{S}}{d\sigma} = \frac{1}{R} \vec{n};$$

siendo  $R$  el radio de curvatura del rayo en el punto considerado, queda, al sustituir en [8-1]:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \sigma} \vec{S} + \frac{1}{cR} \vec{n} = -\frac{1}{c} \text{grad}(\log c);$$

como:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log c,$$

$$\frac{\vec{n}}{R} = + \frac{\partial(\log c)}{\partial \sigma} \vec{S} - \text{grad}(\log c) \quad [8-2]$$