

LOS METODOS DIRECTOS Y LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

Por CARLOS LORENTE DE NO,
Ingeniero de Caminos.

Inicia el autor en este artículo una exposición comparativa de los métodos de aproximaciones sucesivas (Cross, Cocchi, Kammüller, Zaytzev, etc.), y de los métodos directos clásicos, pidiendo una mayor difusión y aconsejando un mayor uso de éstos últimos, como viene propugnando, ya desde hace años, el Profesor Peña Boeuf.

I

La última publicación del Sr. López Rodríguez, *El método de Cross en serio y de broma*, ha levantado, como todas las suyas, un cierto revuelo. No solamente su *Análisis del arco elástico simétrico* (1946), sino todas sus restantes monografías y artículos, tienen esa valiosa y difícil cualidad de "Buscapié" (1).

De ese examen crítico del "Cross", lo que, como era previsible, ha llamado primeramente la atención es una comprobación, errónea, que hace su autor y que le lleva a dar por sentado que el "Cross" aplicado a estructuras con piezas oblicuas da resultados inexactos (2).

Es fácil comprobar que tanto si la estructura tiene elementos oblicuos como si no los tiene, el método de "Cross" da resultados correctos e idénticos a los de cualquier otro método. Una comprobación muy interesante, por lo completo del estudio elástico del pórtico en cuestión, es la expuesta por Miranda Lafuente en su artículo *Comentario acerca de "El método de Cross en serio y de broma"*, publicado en esta REVISTA en el número del pasado diciembre, y categóricas sus líneas finales: "Creo, pues, no hay motivo de inquietud para los que hace tiempo seguimos estas normas de cálculo."

(1) Que, como el mismo López Rodríguez nos recuerda en su *Análisis del arco*, es, según la Academia: *Buscapié* (de buscar y pie), m. fig. Especie que se suelta en conversación o por escrito para dar a alguno en qué entender, o para rasotrear y poner en claro alguna cosa.

(2) La discordancia entre resultados que encuentra López Rodríguez está motivada por un olvido, explicable, que comete al plantear el "Cross" en su pórtico oblicuo: la traslación de nudos no solamente induce momentos flectores en los dos pies del pórtico, sino que también los produce en el dintel, precisamente por la oblicuidad de uno de dichos pies. Es el olvido de estos momentos en el dintel el que le lleva a un "Cross" erróneo. Decimos que el olvido resulta explicable, pues acaba López Rodríguez de hacer aplicación del "Cross" a un pórtico de idénticos elementos, pero con los pilares verticales, en el que la traslación de nudos no produce, por tanto, giro de la barra dintel. En este caso, plantea y resuelve correctamente el "Cross" (y lo *aprueba*), y cuando, para abreviar la exposición del segundo, parte de este primer caso, es cuando incurre en el olvido causante de tan inexacta conclusión.

En *El método de Cross en serio y de broma*, hace su autor repetidas alusiones al prólogo de Fernández Casado a la 4.ª edición (1946) de su *Cálculo de estructuras reticulares*, encontrando desmedidas las virtudes que Fernández Casado le atribuyé, como: "método que resuelve del modo más sencillo y exacto cualquier tipo de estructura reticular, por complicada que sea", y sobre esa: "claridad intuitiva que satisface plenamente a la mentalidad de los ingenieros iberoamericanos".

Pues bien: precisamente en ese número de diciembre, nos enviaba la REVISTA el anuncio editorial de la aparición de la 6.ª edición del *Cálculo de estructuras reticulares*, y en él, el nuevo prólogo de Fernández Casado, del que transcribimos los siguientes párrafos:

"La utilidad del método de Cross, que la 6.ª edición de nuestro libro avala, no precisa discusión. Ha tardado unos años en alcanzar universalidad, siendo de notar que los países iberoamericanos han llevado la delantera..."

"... Pero hay que dar al método toda la categoría que le corresponde en el campo teórico. Es el ejemplo más palpable del "giro copernicano" que se inicia en el *Cálculo de estructuras*... El método de Cross da la pauta de lo que debe de ser un método de cálculo: fácil, elástico en la extensión e intensidad de su aplicación, y, lo que es más importante, adecuado al fenómeno físico que aborda. Basta recordar que el caso de la viga de varios tramos, tan insignificante en nuestro método, fué utilizado como instrumento de tortura en su ingente exposición académica.

"Al aplicar nuestro método estamos siempre a la vista de la estructura y nos damos cuenta del papel que desempeñan cada uno de sus elementos. La tenemos a mano y se hace manejable, pues sin necesidad de recurrir a esfuerzos heroicos, podemos introducir variaciones en la forma y dimensiones de sus elementos hasta en los últimos momentos del proyecto."

La lectura del comentario de Emilio Miranda y la de este prólogo de Fernández Casado, no solamente habrán disipado toda duda en la abrumadora

mayoría de "crossistas" que, hoy por hoy, existe entre nosotros, sino que habrán reafirmado su convencimiento en las superlativas excelencias del método.

En definitiva, es de temer que el trabajo de López Rodríguez haya ejercido un efecto contraproducente (1), y aun agravado, quizás, el mismo peligro del que nos quería precaver: el peligro que encierra toda cosa que se presenta como la panacea universal.

Al leer las anteriores líneas, se habrá dado cuenta el lector que es también nuestro propósito el tratar de que cese esta peligrosa superestimación y que, al menos para los futuros colegas, el método de "Cross" y, en general, los métodos de aproximaciones sucesivas, sean tan sólo una entre tantas herramientas con las que cuenta y que resulta adecuada realmente en algunos, más bien pocos, casos particulares de problemas elásticos.

Advirtamos ya que no se trata de una crítica solamente negativa. Adrede hemos reproducido los anteriores párrafos, donde se resaltan las excelencias del "Cross". El que a continuación proponemos, lo supera ventajosamente en todas y cada una de ellas, sin que por ello pretendamos presentarlo como el más sencillo o como el mejor método. Una y otra cosa dependen de cuál sea la estructura a estudiar.

Y digamos, también desde ahora, que no se trata de algo tan serio como un "giro copernicano". Nada de eso: *se trata, pura y simplemente, de la vuelta a los más clásicos métodos directos de la Elasticidad; basta con tomar de cada uno sólo su faceta más eficaz.* Todos ellos son una misma cosa, tanto más fácil de comprender y asimilar cuanto más evidente pongamos su identidad.

Y como (signo de estos tiempos) siempre es menester cierta propaganda, daremos además unos complementos en forma de ábacos, para que, aparte de todas esas excelencias, quede manumitido el calculista,

(1) Como también va a tenerlo el reciente artículo del Sr. López Rodríguez, "El método de Cross y el diagrama de Williot", aparecido en el número de febrero de esta REVISTA. No dejará de replicar Emilio Miranda que, al no existir, por hipótesis de partida, más deformación elástica que la debida a los momentos flectores, nada tiene que hacer, después de esa hipótesis, el diagrama de Williot, que opera con los alargamientos de barras por los esfuerzos normales, pues estos alargamientos dejan de existir.

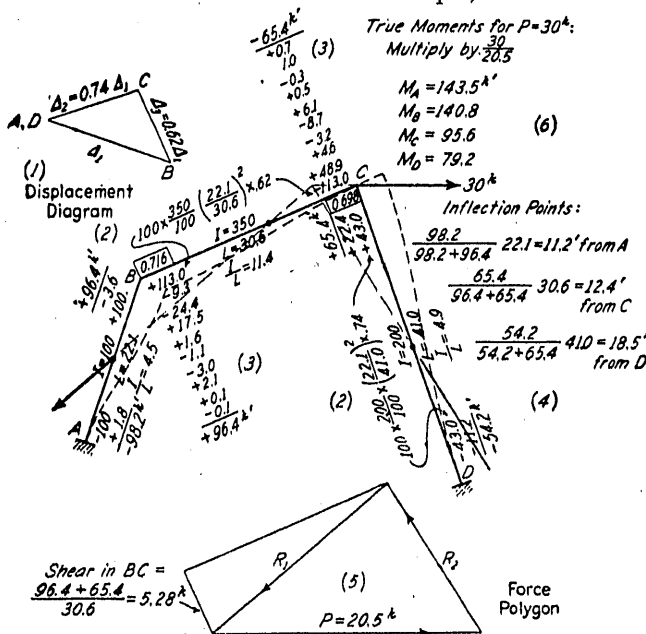
Y que precisamente esa hipótesis de ser nulas las deformaciones por esfuerzo normal y tangencial es la necesaria y suficiente para que sean válidas y rigurosas las relaciones geométricas entre traslaciones de nudos obtenidas al considerar los movimientos de los nudos de la estructura como los de una cadena cinemática, estudio que no solamente se hace en el "Cross", sino que lo venían ya haciendo todos los métodos directos que operan, explícita o implícitamente, con deformaciones.

En resumen: que el error estriba en la figura 14-c) del libro de López Rodríguez, por no haber dibujado la deformación del dintel, y no en la 14-d) que, contra lo que opina en ese artículo su autor, es correcta.

en los casos más frecuentes, incluso de la servidumbre operatoria.

Pero, antes de entrar en materia, creemos necesario aclarar uno de los juicios antes reproducidos: el de la rápida difusión en los países iberoamericanos. Este hecho, absolutamente cierto y para todos halagador, no es debido, como con modestia cree nuestro compañero Fernández Casado, a la claridad intuitiva del método de Hardy Cross, sino que es exclusivamente debido a la claridad expositiva de Fernández Casado en su *Cálculo de estructuras*.

Los trabajos de Cross y el tratado de Cross-Morgan, que, aun sin necesidad de traducción, podían haber encontrado una fácil difusión en los medios técnicos europeos, no han podido penetrar en la forma original de la exposición de Cross. Esta exposición de Cross y Morgan, tan henchida de dogmatismo (de la que la figura 1 es una muestra muy representativa), había de repugnar, pese a la legitimidad de los resultados, a gentes habituadas al rigor lógico e incluso a la duda cartesiana. Y me parece que aún con mayor razón hubiera, inevitablemente, chocado con el modo de ser de Iberoamérica, sin la intervención de Fernández Casado, que ha sabido, con tacto, eludir el carácter antinómico de un método que, basado en el



PROBLEM:-- To Find the Moments in the Frame Shown Due to Load of 30k
PROCEDURE:

- 1 Determine relative displacements in members.
- 2 Assume fixed-end moments of ± 100 in AB and determine other fixed-end moments proportional to $\Delta \frac{1}{L}$.
- 3 Distribute moments.
- 4 Locate points of inflection from these moments and draw pressure line.
- 5 Determine shear in one member and draw force polygon to find horizontal force.
- 6 Multiply all moments by the ratio of horizontal force found to given horizontal force.

FIG. 33 Moment Distribution - Sideaway

Fig. 1. — Del capítulo IV del "Continuous frames of reinforced Concrete", de H. Cross y N. D. Morgan.

estudio de los giros, opera sin conocerlos, y en cuya lectura se encuentra de improviso el lector con que está distribuyendo el momento 100, sin que aparezca claro que ello tenga relación alguna con el entretenido estudio de vigas simples al que acaba de sometersele.

Los artículos, muy numerosos por cierto, que especialmente en Centroeuropa, se han ocupado del método de Cross (1), han cuidado desde el primer momento de poner de manifiesto su esencia y justificación elástica. Y de esta preocupación ha resultado inmediatamente su perfeccionamiento y la elaboración de nuevos métodos de aproximaciones sucesivas que reducen los inconvenientes reprochados al de Cross. Tal, por ejemplo, el del Prof. Kammüller, de Karlsruhe, con el que, en vez de tener que calcular en cada nudo tantas columnas de operaciones como extremos de barras concurren en dicho nudo, basta hacer una sola columna de operaciones, que es la correspondiente a las aproximaciones sucesivas del giro del nudo. Bien se comprende que, por ejemplo en entramados, la diferencia entre tener que ir calculando los valores de los momentos de las cuatro barras que concurren en el nudo, a calcular solamente el valor del giro de ese nudo, es considerable y que resulte muy aliviada la machaconería operatoria del Cross. Idéntica ventaja operatoria ofrece el método "de los momentos auxiliares", del Ingeniero belga Descans. En uno y otro, el trabajo previo de determinación de rigideces y coeficientes de repartición es exactamente el mismo necesario para el de Cross, y su asimilación, para los habituados al de Cross, es inmediata.

Algo más recientes son los trabajos del Ingeniero francés Serge Zaytzeff sobre estructuras de varios pisos, y en los que, partiendo de la simplificación operatoria de Kammüller, hace en cada etapa de repartición la compensación del desequilibrio entre los esfuerzos cortantes en las columnas, evitando así la necesidad del empleo de las fuerzas ficticias de inmovilización de los diversos pisos. Es, pues, un método que creemos satisfará plenamente a los "crossistas", ya que les evita el planteamiento de los sistemas de

ecuaciones a que da lugar el empleo de los apoyos ficticios.

* * *

Parecerá, pues, que con estas recientes mejoras, el empleo de los métodos de aproximaciones sucesivas ha de resultar indiscutiblemente más ventajoso, y más desacertado todavía el propugnar la vuelta a los clásicos métodos directos. Ni aun así son más ventajosos, y oigamos precisamente la opinión que les merecen a sus propios autores, Sres Kammüller y Descans. Dice este último, como nota final: "Au cours d'une conférence faite en décembre 1942 à la Chambre des Ingénieurs-Conseils de Belgique, nous avons comparé la méthode ordinaire de Cross aux calculs graphiques de la méthode des points fixes, basés sur la détermination des foyers (ou points fixes), des lignes de repère des lieux des moments dans les divers éléments droits d'un ensemble hyperstatique. Nous avons été amené à dire que la méthode des points fixes était nettement plus avantageuse que celle de Cross aux points de vue de la clarté et de la rapidité des calculs si, comme le cas se présente presque toujours en pratique, l'ouvrage en question doit être étudié pour une série d'états différents de sollicitation.

"Nous trouvons le même avis exprimé dans l'étude précitée du professeur Kammüller. Ces inconvénients de la méthode de Cross sont atténués, mais nullement supprimés, par les simplifications présentées ci-dessus." (*Annales des T. P. Belgique*, abril 1945.)

II

Se trata (por ahora) de estudiar las sollicitaciones — momento flector y esfuerzo tangencial — en una estructura formada por piezas rectas de inercia constante, en la cual los nudos no pueden experimentar más movimiento que el de rotación, no pudiendo realizar recorrido lineal alguno. (Las deformaciones por esfuerzos normales y las debidas al módulo de elasticidad transversal, son supuestas nulas en estos estudios.)

El elemento generativo, con cuyo solo estudio queda resuelto el de la totalidad de estas estructuras, es el de la pieza recta representada en la figura 2: pieza de inercia constante, apoyada en su extremo *A* y con empotramiento elástico en el extremo *B*. A este empotramiento elástico en el extremo *B* se le ha dado en las figuras una representación "a la americana": unos apoyos que fijan el extremo *B* y un resorte que coarta el giro de este extremo *B* de la barra. Es, pues, este muelle espiral el encargado de materializar el "peso elástico" del apoyo *B*, es decir, su "flexibilidad" al giro, que designaremos por g_B . Un par M_B aplicado en este resorte *B*, produce el giro (fig. 2-a):

$$\theta_B = M_B \cdot g_B. \quad [1]$$

y este "elastische gewicht" o "coefficient de flexibi-

(1) Entre europeos (Timoshenko incluido, pág. 384 de su *Theory of Structures*), lo general es denominar este método como "The method of successive approximation", "La méthode d'iteration" o "Die methode der sukzessiven annäherung", citando el nombre del ingeniero yugoslavo K. A. Calisev, de Zagreb (léase Tschalischew), que fué el primero en aplicarlo al cálculo de estructuras en 1922. Tschalischew mismo aclara (tomo IV de las *Mémoires de la A. I. des P. et Ch.*, 1936) que para ello se inspiró en el utilizado por los ingenieros norteamericanos Hardesty y Waddell para estudio de las tensiones secundarias debidas a la rigidez de los nudos (1916), a su vez basado en el utilizado por Otto Möhr (1835-1918) en 1906. Hardy Cross da al método la forma que conocemos en 1932. No creo que estas indicaciones sean ociosas: el mismo H. Cross no ha pretendido se le reconozca la originalidad, como tampoco en sus tiempos lo pretendiera Vespucio, y amarga experiencia tenemos los ibéricos de los inconvenientes de que no se designen las cosas desde un principio como se debieran.

lité" nos viene dado como la relación constante entre el giro θ_B y el par M_B que lo provoca:

$$\frac{\theta_B}{M_B} = g_B \text{ (long.}^{-1} \cdot \text{fuerza}^{-1} \cdot \text{)} \quad [2]$$

(y estimamos preferible dejarlo así definido en vez de decir que es: el ángulo girado por la aplicación

de apoyo articulado. Por el contrario, cuando el "peso elástico" o flexibilidad g_B va siendo menor, tanto menor será también el giro, y para $g_B = 0$, estaremos en el caso límite de empotramiento perfecto en B. (Este caso límite es, precisamente, el que se toma como punto de partida en el método de Cross.) Pero, en vez de hablar de la flexibilidad al giro,

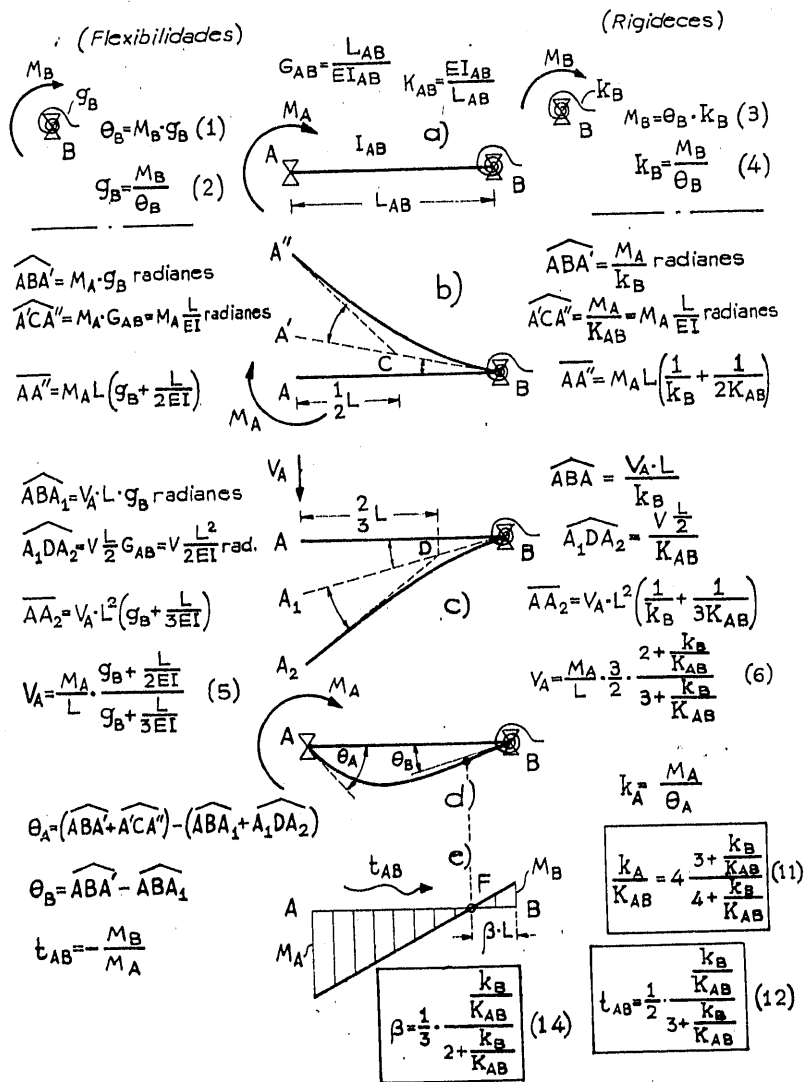


Fig. 2. — Análisis de la viga simplemente apoyada en un extremo y con apoyo con rigidez al giro en el extremo opuesto.

de un par unidad, definición con la que son frecuentes los errores en sus dimensiones y hasta en su concepto) (1).

Cuando la flexibilidad de este resorte va siendo mayor, con más libertad irá girando el extremo B, y para $g_B = \infty$ estaremos en el caso de la fig. 3-b,

(1) También se le denomina "Einspannungsmasse" y es designado frecuentemente por la letra ϵ en la actual literatura suiza.

podemos igualmente hablar de la "rigidez al giro" de ese resorte, que denominaremos k_B y que no es sino su inversa:

$$k_B = \frac{1}{g_B},$$

y con ello las [1] y [2] quedan escritas en la forma:

$$M_B = \theta_B \cdot k_B, \quad \frac{M_B}{\theta_B} = k_B \text{ (long. fuerza.)} \quad [3] \text{ y } [4]$$

Este "coeficiente de rigidez" k_B que nos da la relación entre el par M_B aplicado y el ángulo θ_B girado, es el denominado por Zafra y Peña "masa elástica", y originariamente por Wilhelm Ritter (1847-1906), "Elastizitätsmass" (medida elástica).

En la exposición del método de Cross y análogos, suele ser definido como momento capaz de producir el giro unidad, lo que puede inducir asimismo a confusión. Advirtamos, por ello, que tanto el "peso elástico" g_B , como su inversa la "rigidez" k_B , son magnitudes esencialmente positivas. Basta observar que el trabajo elástico almacenado en el muelle espiral, al deformarse por la acción del par M_B , tiene las expresiones siguientes, según operemos con una u otra:

$$\frac{1}{2} M_B \cdot \theta_B = \frac{1}{2} M_B^* \cdot g_B$$

$$\frac{1}{2} M_B \cdot \theta_B = \frac{1}{2} \theta_B^2 \cdot k_B$$

El estudio de barra articulada en A y elásticamente empotrada en B , sometida a la acción de un par M_A aplicado en su extremo A , resulta entretenido, y sobre todo poco claro, hecho por aplicación reiterada de los teoremas energéticos de mínimo. También es entretenido hecho a través de la viga equivalente (1), y en cambio es inmediato y más visible concebido como superposición de dos estados isostáticos: el de la ménsula empotrada en B sometida a la acción del par M_A (fig. 2-b), y el de esta misma ménsula sometida a la fuerza V_A equivalente a la reacción del apoyo A (fig. 2-c). El valor de esta reacción desconocida V_A vendrá definido por la simple condición de que el recorrido $A-A_2$ (fig. 2-c) a ella debido, sea igual y opuesto al $A-A''$ producido por el par M_A (fig. 2-b).

En la figura 2-b quedan anotados los elementos principales de la deformación producida en la ménsula, deformación obtenida a su vez por superposición de la debida al giro, de valor $M_A \cdot g_B$ radianes, que toda la pieza experimenta por la flexibilidad del empotramiento elástico B , y de la debida a la flexibilidad propia de los elementos constitutivos

de la barra AB , respecto a su sección terminal (1).

Análogamente se ha procedido en la figura 2-c: la reacción incógnita V_A produce en B un par $V_A \cdot L$, y, por tanto, un giro de $V_A \cdot L \cdot g_B$ radianes en el resorte, giro que arrastra, en su movimiento, a toda la barra y al que se le agrega la deformación que, respecto a su sección extrema, experimenta una pieza AB cargada con una fuerza V_A en su extremidad libre A . (En las figuras 2-b y 2-c se indican los valores correspondientes a todas estas deformaciones, que el lector podrá comprobar cómodamente, pues se trata de los casos más elementales de deformación.)

La igualación de recorridos

$$M_A \cdot L \left(g_B + \frac{L}{2EI} \right) = V_A \cdot L^2 \left(g_B + \frac{L}{3EI} \right),$$

nos da como valor de dicha incógnita el siguiente:

$$V_A = \frac{M_A}{L} \cdot \frac{g_B + \frac{L}{2EI}}{g_B + \frac{L}{3EI}}; \quad [5]$$

valor que podemos expresar en función de la rigidez k_B del empotramiento elástico y de la rigidez propia K_{AB} de la barra:

$$V_A = \frac{M_A}{L} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2 + \frac{k_B}{K_{AB}}}{3 + \frac{k_B}{K_{AB}}}. \quad [6]$$

Llevado el valor de V_A a la figura 2-c, y superpuesta esta deformación con la de la etapa 2-b, obtenemos el estado 2-d que deseábamos: barra apoyada en A y elásticamente empotrada en B .

En particular vemos que este extremo A , en el que hemos aplicado el par M_A , ha experimentado un giro:

$$\begin{aligned} \theta_A &= M_A \cdot \frac{L}{4EI} \cdot \frac{4g_B + \frac{L}{EI}}{3g_B + \frac{L}{EI}} = \\ &= M_A \cdot \frac{G_{AB}}{4} \cdot \frac{4g_B + G_{AB}}{3g_B + G_{AB}}. \end{aligned} \quad [7]$$

(1) Entendámonos que nos referimos a la aplicación restringida de los teoremas de Möhr, que hoy se estiliza. Sólo se emplean para el caso de la viga simplemente apoyada, único en el cual la viga ficticia a cargar con el diagrama de momentos flectores tiene la misma sustentación de la viga real. En los demás casos, a la viga ficticia deben dársele sustentaciones distintas a las de la real. Estos casos, que en Estática Gráfica son directos, se abordan, en cambio, hoy por reiteración de ese exclusivo caso de la viga simplemente apoyada.

(1) Bajo la acción del par M_A , cada elemento diferencial de la barra sufre el giro elemental $M_A \frac{ds}{EI}$, y el giro de un extremo de la barra respecto al otro extremo tendrá el valor suma $M_A \frac{L}{EI}$. Este factor $\frac{L}{EI}$ es el peso elástico G_{AB} de la barra. Su inverso $K_{AB} = \frac{EI}{L}$ medirá, pues, la "rigidez de la barra". Valor, como vemos, que depende exclusivamente de las características geométricas L (luz) e I (inercia de la sección) de la barra y de las propiedades elásticas E de su material, y es un valor intrínseco de la pieza, sea cual sea la sustentación que le demos.

La relación entre este giro θ_A y el par M_A que lo ha producido, es precisamente el valor del "peso elástico", o flexibilidad al giro, del extremo A de la barra.

Y su inversa, o sea la relación entre el par M_A aplicado y el ángulo θ_A producido, es la "rigidez al giro" de dicho extremo A . Que expresada en función de las rigideces resulta ser:

$$k_A = K_{AB} \cdot 4 \frac{3 + \frac{k_B}{K_{AB}}}{4 + \frac{k_B}{K_{AB}}} \quad [8]$$

Si, como es el caso de la figura 3-a, el resorte B tiene una flexibilidad g_B cero, o sea una rigidez k_B infinita, o, en otras palabras, si la pieza está perfectamente empotrada en B , la rigidez al giro de su extremo apoyado A toma el valor particular:

$$k_A = 4 K_{AB} = \frac{4 EI}{L} \quad [9]$$

(valor al que impropriamente se le denomina en la exposición del método de Cross "rigidez de la barra").

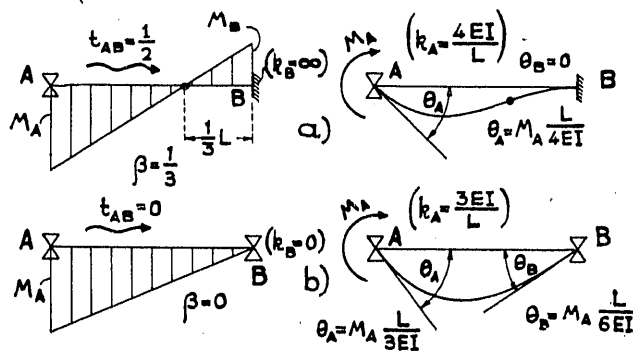


Fig. 3.—Casos límites de sustentación, de los que parten los métodos de aproximaciones sucesivas.

Si, por el contrario (fig. 3-b), el resorte B tiene una flexibilidad g_B infinita, es decir, una rigidez k_B nula, o sea, si la pieza está articulada en su extremo B , la rigidez al giro de su otro extremo A toma el valor particular:

$$k_A = 3 \cdot K_{AB} = \frac{3 EI}{L} \quad [10]$$

(que es el otro valor de que se parte, como simplificación, en el método de Cross).

Entre estos dos casos límites la expresión [8], que no se negará que es sencilla, nos irá dando a conocer directamente el valor exacto de la rigidez

al giro k_A del extremo A . Escrita en la forma siguiente:

$$\frac{k_A}{K_{AB}} = 4 \frac{3 + \frac{k_B}{K_{AB}}}{4 + \frac{k_B}{K_{AB}}} \quad [11]$$

es, además, susceptible de tabulación de una vez para siempre, como se aprecia en el ábaco I.

Otro elemento que nos ha proporcionado la figura 2 y que interesa anotar, es el valor del momento flector en el empotramiento elástico B :

$$M_B = M_A - V_A \cdot L = -M_A \frac{L}{2EI} \cdot \frac{1}{3g_B + \frac{L}{EI}},$$

que, escrito en función de las rigideces, queda en la forma:

$$M_B = -M_A \frac{1}{2} \frac{\frac{k_B}{K_{AB}}}{3 + \frac{k_B}{K_{AB}}}.$$

Este factor:

$$t_{AB} = \frac{1}{2} \frac{\frac{k_B}{K_{AB}}}{3 + \frac{k_B}{K_{AB}}} \quad [12]$$

(coeficiente puro sin dimensiones) por el que debemos multiplicar el par M_A que se aplica para obtener el momento flector que se induce en el empotramiento elástico B , es el denominado generalmente entre nosotros "factor de transmisión" (1). En los métodos de aproximaciones sucesivas, al no estudiarse sino los dos casos límites citados, no existen sino los dos valores límites siguientes:

$$\text{para } k_B = \infty \text{ (empotramiento perfecto): } t_{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\text{para } k_B = 0 \text{ (articulación perfecta): } t_{AB} = 0,$$

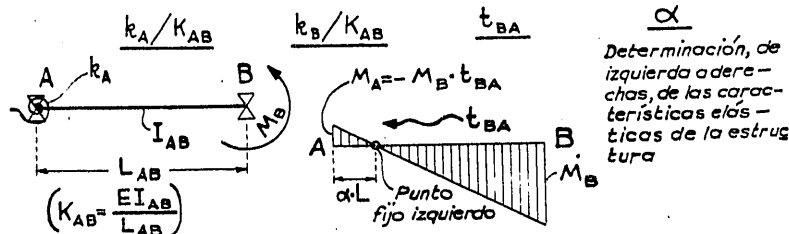
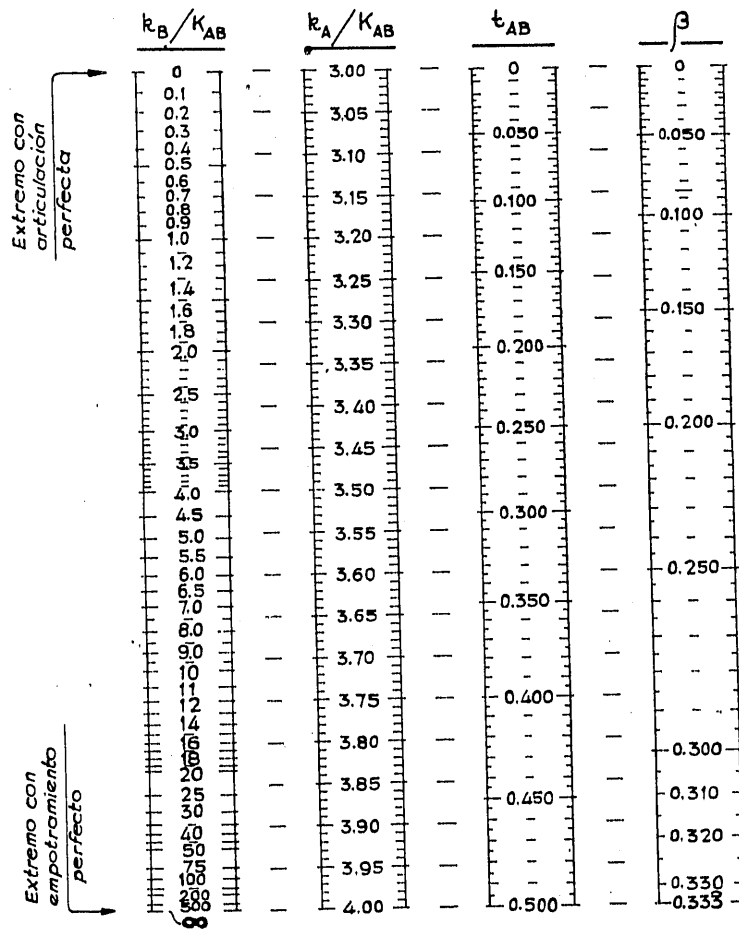
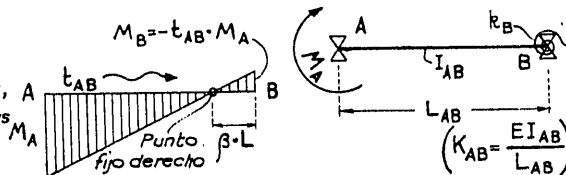
entre los cuales está comprendido normalmente el valor del factor de transmisión.

(1) W. Ritter empleaba la locución "Verkleinerungsverhältnis der Stützenmomente von Öffnung zu Öffnung", bastante más apropiada que la de "carry-over factor", dada treinta años después.

Este factor de transmisión no es tampoco, como vemos, ninguna característica intrínseca de la pieza, pues depende de la relación de la rigidez k_B del em-

licitante, el diagrama de momentos flectores 2-e presentará siempre como punto de momento flector nulo el mismo punto intermedio F , cuyas distancias abso-

Determinación, de derecha a izquierdas, de las características elásticas de la estructura



Determinación, de izquierda a derechas, de las características elásticas de la estructura

Abaco I para la determinación de las sucesivas rigideces de los nudos, de los factores de transmisión y de la situación de los puntos fijos.

potramiento a la rigidez intrínseca K_{AB} . Su valor también lo encontrará calculado el lector en dicho ábaco I.

Sea cualquiera el valor que demos al par M_A so-

lutas a los extremos de la pieza tienen por valores:

$$AF = L \frac{1}{1 + t_{AB}}; \quad FB = L \frac{t_{AB}}{1 + t_{AB}}; \quad [13]$$

expresados en función del valor del factor de transmisión. Designando por β la distancia unitaria $\frac{FB}{L}$, que es la que más interesa posteriormente, y expresándola asimismo en función de la relación de rigideces, resulta:

$$\beta = \frac{FB}{L} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{k_B}{K_{AB}}}{2 + \frac{k_B}{K_{AB}}} \quad [15]$$

cuyo valor también nos lo proporciona el ábaco I.

Este punto es el "Festpunkt" de la literatura alemana, "foco de influencia" en la exposición de Peña Bœuf.

Observando estas últimas expresiones, vemos que tanto da conocer el valor del factor de transmisión t_{AB} como el conocer la posición β del punto fijo. En el estudio de vigas continuas es frecuente operar partiendo de los valores de las abscisas unitarias y en función *exclusivamente* de ellos obtener todos los restantes elementos. En estructuras, hemos de ir sumando las flexibilidades de los pilares con las de los dinteles, y ya no resulta esto posible, siendo menester operar simultáneamente con flexibilidades.

La ventaja que existe en operar con los valores de "rigidez al giro", en vez de operar con los de "flexibilidad al giro", es, en la práctica, muy importante. La rigidez de un nudo viene dada sencillamente por suma de las rigideces de los extremos de las barras en él concurrentes. Operando con flexibilidades, la flexibilidad del nudo es la inversa de la suma de las inversas de las flexibilidades de dichos extremos de barras concurrentes, lo cual no deja de ser ciertamente una complicación operatoria que, como vemos, desaparece totalmente al operar con "rigideces". Esta última tendencia de operar con "Widerstandes" es la adoptada, por ejemplo, por Mayer, que en su *Neue Statik* (1938) las personaliza tanto, que incluso habla de la "Fortpflanzung des Widerstandes", lo que no ha dejado de provocar algunos comentarios (1), en que se le advierte que solamente puede hablarse con rigor de una "Fortleitung der Verformung".

Pero lo que no es necesario en modo alguno es que limitemos nuestras posibilidades, empeñándonos en manejar sólo una parte de los elementos que nos da la figura 2, cuando lo claro y sencillo es utilizarlos conjuntamente todos ellos. Y la forma más práctica

de hacerlo es la dada en las fórmulas [11], [12] y [14], utilizando como valor auxiliar la relación k_B/K_{AB} de rigideces, con lo que en un solo ábaco podemos hacer simultáneamente la lectura de:

1.º La rigidez del extremo A (por su valor relativo k_A/K_{AB}).

2.º El factor de transmisión (t_{AB} por su valor absoluto).

3.º La distancia del punto fijo (por su abscisa unitaria β).

(La única dificultad que en ello existe, que es el margen de variación, desde cero a infinito, de esa relación, k_B/K_{AB} queda salvada con la adopción para este ábaco de unas escalas-base hiperbólicas. La adoptada nos da, para los valores k_A/K_{AB} , que son los que más interesan, una escala lineal; y para los de t_{AB} y β unas escalas de lectura muy exacta.)

Otros elementos que nos da directamente la figura 2 son los giros experimentados por los extremos de la pieza. El extremo A, al que hemos aplicado el par M_A , ha girado el ángulo (ver [7]):

$$\theta_A = \frac{M_A}{k_A} = \frac{M_A}{K_{AB}} \cdot \frac{4 + \frac{k_B}{K_{AB}}}{4 \left(3 + \frac{k_B}{K_{AB}} \right)} \quad [15]$$

y el extremo B, sometido al par M_B inducido, el ángulo:

$$\theta_B = \frac{M_B}{k_B} = \frac{M_A \cdot t_{AB}}{k_B} = - \frac{M_A}{K_{AB}} \cdot \frac{1}{2 \left(3 + \frac{k_B}{K_{AB}} \right)} \quad [16]$$

La relación entre giros es, por tanto:

$$\frac{\theta_B}{\theta_A} = - \frac{2}{4 + \frac{k_B}{K_{AB}}} \quad [17]$$

Todos estos valores quedan tabulados en el ábaco II. El valor de entrada de este ábaco es, como en el anterior, la relación k_B/K_{AB} . Los giros θ_A y θ_B son expresados en función de la rigidez $\frac{EI}{L}$ de la barra y del par M_A solicitante:

$$\theta_A = \frac{M_A}{K_{AB}} [\theta_A] = M_A \cdot \frac{L}{EI} \cdot [\theta_A],$$

$$\theta_B = \frac{M_A}{K_{AB}} [\theta_B] = M_A \cdot \frac{L}{EI} \cdot [\theta_B],$$

leyéndose los valores numéricos de los coeficientes $[\theta_A]$ y $[\theta_B]$ en el ábaco. (Para empotramiento per-

(1) Krabbe, en *B. und E.*, 20 abril 1940: "Verformungen pflanzen sich tatsächlich gesetzmässig fort, Widerstände nicht; Verformungen kann man sehen, Widerstände nicht".

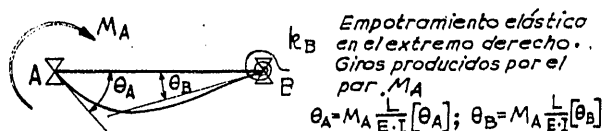
fecto en la extremidad B, es decir, $k_B = \infty$, los giros son (fig. 3):

$$\theta_A = M_A \frac{L}{4EI}, \quad \theta_B = 0,$$

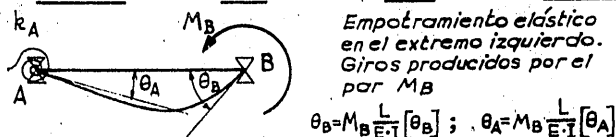
que son los valores iniciales de partida en el método de Kammüller. Para articulación perfecta en la extremidad B, es decir, para $k_B = 0$, los giros toman los conocidos valores:

$$\theta_A = M_A \frac{L}{3EI}, \quad \theta_B = -M_A \frac{L}{6EI},$$

correspondientes al otro caso extremo.



k_B/K_{AB}	$[\theta_A]$	$[\theta_B]$	θ_B/θ_A
0	0.333	0.166	0.500
0.10	0.330	0.160	
0.20			
0.30	0.325	0.150	
0.40			
0.50	0.320	0.140	0.450
0.60			
0.70	0.315	0.130	
0.80			
0.90	0.310	0.120	0.400
1.00			
1.20	0.305	0.110	
1.40			
1.60	0.300	0.100	0.350
1.80			
2.0	0.295	0.090	
2.5			
3.0	0.290	0.080	0.300
3.5			
4.0	0.285	0.070	
4.5			
5.0	0.280	0.060	0.250
5.5			
6.0	0.275	0.050	
6.5			
7.0	0.270	0.040	0.200
8.0			
9.0	0.265	0.030	
10			
12	0.260	0.020	0.150
14			
16	0.255	0.010	
18			
20	0.250	0	0.100
25			
30			
40			
50			
75			
100			
200			
500			
600			



Ábaco II para la determinación de los valores de los giros de los nudos.

Quedan así, pues, conocidos también los giros de las secciones extremas de la pieza y enlazado este proceso de cálculo con los métodos que toman como incógnitas los giros de los nudos.

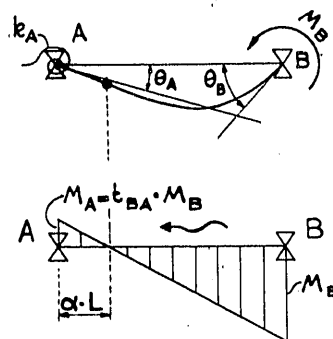


Fig. 4.—Recorrido de izquierda a derecha.

En la figura 2, el empotramiento elástico corresponde al apoyo de la extremidad derecha de la pieza. Si, por el contrario (fig. 4), fuese el extremo izquierdo el extremo elásticamente empotrado, y k_A la rigidez al giro de este empotramiento elástico, los valores de rigidez k_B , factor de transmisión t_{BA} y distancia α del punto fijo a dicho extremo A, serán los siguientes:

$$\frac{k_B}{K_{AB}} = \frac{3 + \frac{k_A}{K_{AB}}}{4 + \frac{k_A}{K_{AB}}} \quad [11 \text{ bis}]$$

$$t_{BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{k_A}{K_{AB}}}{3 + \frac{k_A}{K_{AB}}} \quad [12 \text{ bis}]$$

$$\alpha = \frac{AF}{L} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{k_A}{K_{AB}}}{2 + \frac{k_A}{K_{AB}}} \quad [14 \text{ bis}]$$

valores que igualmente nos proporciona el ábaco I, cuando entramos en su primera columna con el valor de la relación k_A/K_{AB} . (E idénticamente el ábaco II nos da también los valores de los giros cuando la pieza elásticamente empotrada en A, es solicitada, en su extremo apoyado B, por un momento M_B).

(Continuará.)