

NUEVO TIPO DE PUENTE FORMADO POR MENSULAS ENLAZADAS EN CONTINUIDAD

Por JUAN J. GOMEZ-CORDOBES HERNANDEZ,

Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un estudio del nuevo tipo de puente que propone, así como el procedimiento que preconiza para su construcción, y anuncia sucesivos artículos que completen la exposición del método y propongan las aportaciones o colaboraciones de los llamados a perfeccionar el tipo, que considera de gran porvenir.

I

En la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS del mes de octubre del año 1950, núm. 2826, págs. 522 a 526, existe un artículo del mismo autor en cuyo párrafo final quedó anunciado un nuevo tipo de puente que surgió como consecuencia de un nuevo procedimiento de construcción que se refiere a la construcción en general, y en especial a la construcción mediante materiales susceptibles de fraguar o endurecerse dentro de un molde o encofrado, de los cuales es típico el hormigón con cemento.

La costumbre, hasta ahora, para las construcciones de este tipo ha sido la de emplear los mismos métodos, procedimientos o sistemas que se idearon hace cientos o miles de años para la construcción a base de piedra, ladrillo, etc., sin darse cuenta de que los materiales fraguables, sobre todo el hormigón, por sus características especiales, son susceptibles de motivar el desarrollo de métodos más ventajosos que los antiguos. Así, por ejemplo, la costumbre dominante desde muy antiguo es la de disponer alrededor de la obra a construir un andamiaje apoyado en el terreno. Si la estructura a construir es una obra volada o un arco o puente, se hace necesario construir una cimbra o armazón que, apuntalada en la medida necesaria, sirva para sostener los encofrados que contengan el hormigón mientras está sometido al proceso de fraguado.

La construcción de la cimbra o armazón se agrava cuando las características del terreno dificultan el apuntalamiento de la cimbra. Así, al construir un puente sobre un río en terreno no propicio a obras de cimentación o con gran profundidad de agua (desembocadura de los ríos en el mar), y en casos parecidos (gran altura de rasante), la construcción de la cimbra es muchas veces prácticamente imposible por la dificultad de apearla sobre el terreno que se encuentra debajo. El nuevo procedimiento se caracteriza porque se crea en la obra una serie de agujeros transversales pasantes que, en el material fraguado, y, por tanto, resistente, sirven para alojar barras de hierro fileteadas por uno o ambos extremos, con sus correspondientes tuercas, sustentantes de medios o elementos de forma adecuada para el sostén de los andamios y para el apoyo de los encofrados.

Ventajosamente, tales medios consisten, para los andamios, en ménsulas tornapuntadas, las cuales se cuelgan (fig. 1.^a), debidamente aseguradas, de las barras metálicas insertadas en los agujeros transversales fundamentales del procedimiento: la rama vertical de la ménsula se apoya sobre la pared ya fraguada de la obra, y la rama horizontal de la misma sirve para el apoyo de los sustentadores para el personal (tablones, etc.) y de los medios de protección convenientes. Para aumentar la seguridad del conjunto, la parte vertical de la ménsula puede fijarse en su parte inferior, mediante una segunda barra, en otro de los agujeros previstos durante el moldeo del hormigón.

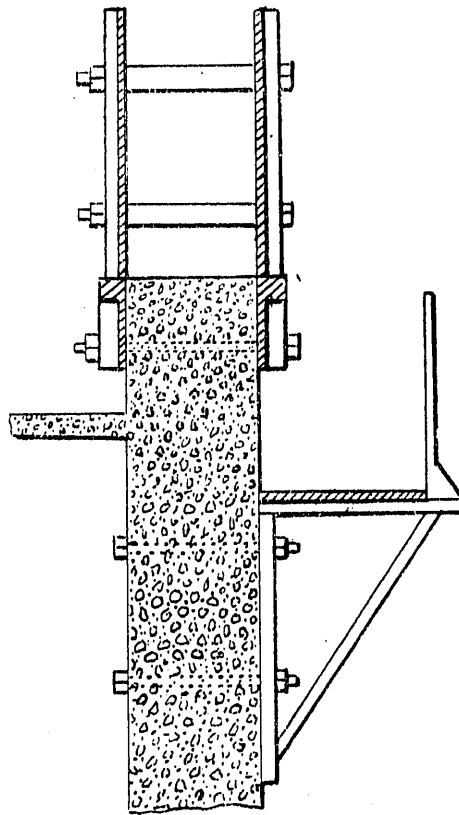


Figura 1.^a

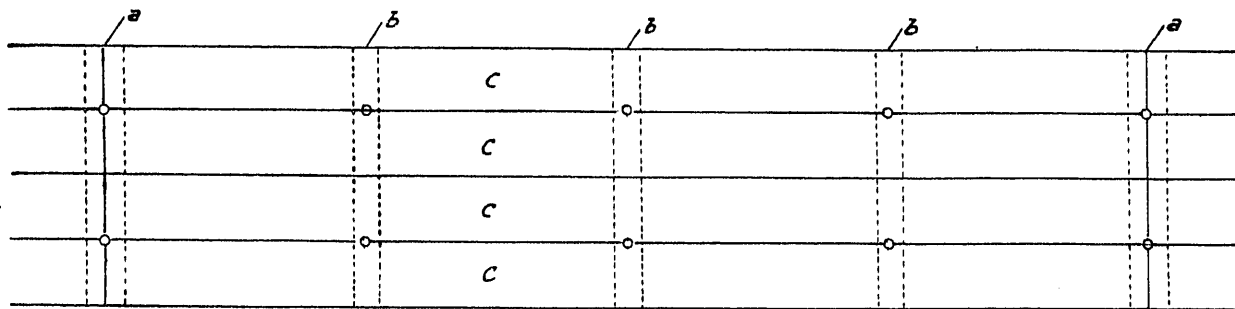


Figura 2.ª

Las figuras 2.ª y 3.ª representan esquemáticamente los dos tableros idénticos que forman el molde, vistos en alzado, respectivamente, por el interior y por el exterior. Según sea el material que se emplee, se construirán los tableros en la forma más práctica, teniendo como punto de vista que su duración sea la mayor posible para que su coste pueda amortizarse en un gran número de obras. Cuando se emplee la madera se formarán con tablas, tal como se representa en las dos citadas figuras y en la siguiente (fig. 4.ª).

A distancias iguales se colocan unas costillas, *a* y *b*, de madera más gruesa que las tablas, empleando para la fijación tornillos de cabeza redonda y tuerca poligonal, que no se representan; las costillas *a*, más gruesas que las *b*, se colocan en los extremos de los tableros y sirven para el empalme de los contiguos cuando el elemento de la construcción tiene mayor longitud que el tablero que se considera. Entre cada dos costillas se pueden colocar, centrados, barrotes

de madera de igual espesor que las tablas *c*, los que se fijan por medio de tornillos golosos.

La figura 4.ª representa una proyección horizontal del molde, formado con pares de tableros idénticos, que se hacen solidarios mediante tornillos, *d*, preparados con longitud adecuada al espesor del elemento correspondiente de la construcción, más el de las tablas *c* y el de las costillas. Para que los tornillos no queden aprisionados en la obra durante el endurecimiento o fraguado del material que llene el molde, se colocan unos tubos, *e*, protectores, de longitud igual al espesor del elemento que se construye, tubos que pueden ser del mismo material que la obra (prefabricados) o de uralita y similares, hierro, cañas perforadas, cartón, etc., con cuya disposición los obreros, al apretar las tuercas, dejan los tableros invariablemente unidos, con la separación que debe existir entre los mismos, para ellos desconocida. Los tornillos podrán ser fileteados por un solo extremo, si en el otro se les pone cabeza poligonal. Al desen-

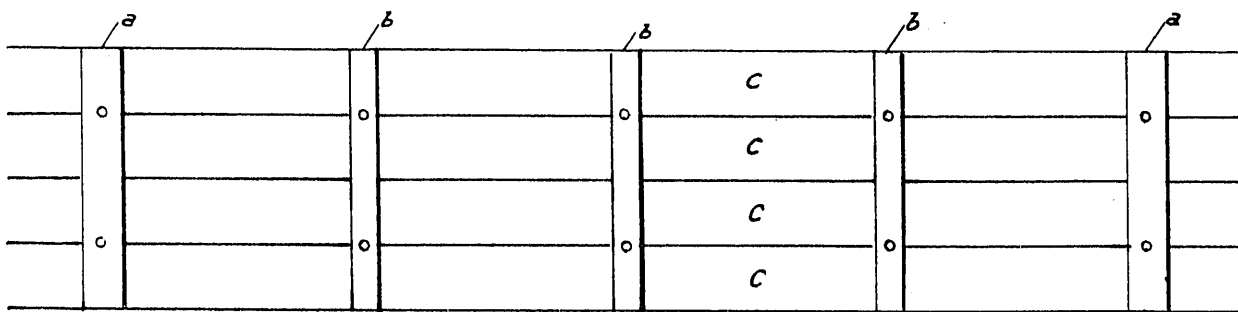


Figura 3.ª

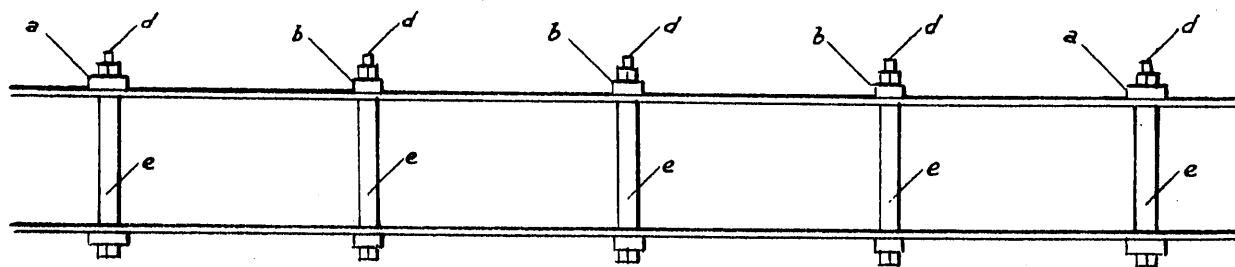


Figura 4.ª

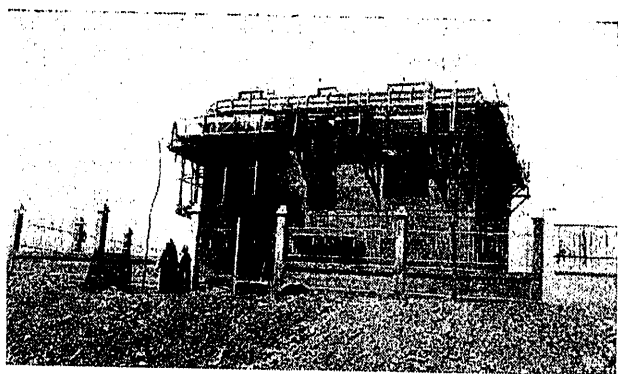


Figura 5.ª

cofrar quedan en la obra los agujeros, que se aprovechan para colgar las palomillas sustentadoras de los andamios y los largueros sustentadores de los encofrados.

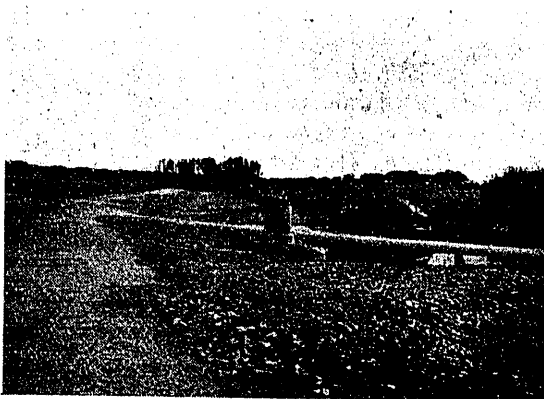
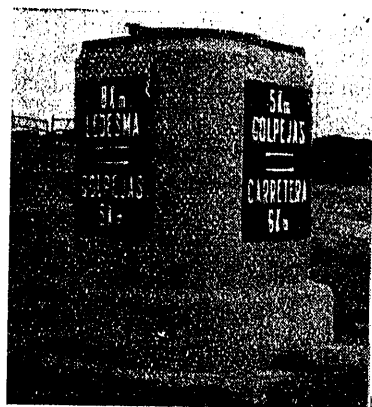


Figura 6.ª

En la parte superior de la figura 1.ª se representa en alzado una sección transversal del molde de madera que estamos describiendo, correspondiente a las figuras anteriores, para la construcción de un elemento rectilíneo (un muro, los pretilos de un puente, malecones, etc.). Cuando el elemento que se construya tenga directriz de forma cualquiera (circular, etcétera), los tableros variarán de forma, pero su construcción y enlace es análogo al descrito a título de ejemplo.

Cuando se emplee el metal en la construcción del molde, se formarán los tableros con chapa reforzada mediante perfiles laminados.

En la figura 1.ª se representa esquemáticamente una sección transversal de un muro de fachada de un edificio en construcción con el andamiaje y el molde dispuesto para ser llenado, y en la figura 5.ª, la fotografía de un chalet de tres pisos en el momento de la construcción de la segunda hilada del

tercer piso. En la figura 6.ª se descubre un poste indicador de dirección en el empalme de dos caminos, de sección triangular y hueco, construido con moldes como los descritos, que dejan en la obra cuatro orificios en cada una de las tres caras, los que se aprovechan para fijar, mediante tornillos con la tuerca al interior, las tres placas de fundición con las correspondientes inscripciones de dirección. El mismo sistema de moldes se emplea para la construcción de puentes, como el de la fotografía de la figura 7.ª, tanto para las pilas como para el tablero; situados los capiteles de las pilas por encima de las máximas avenidas, los tableros del molde de cada viga se proyectan para resistir su peso propio y el de los materiales y obreros, todo con vista a la seguridad contra las avenidas impetuosas de los ríos torrenciales; el tablero se construyó en el invierno 1931-32, con temperaturas de 15 grados bajo cero, mediante el empleo del cemento fundido "Electroland"; al siguiente

día de llenar los moldes de las vigas fueron desmontados los tableros, y al segundo día se colgaron de los agujeros dejados en las mismas por los tornillos de arriostramiento, tantas veces mentados, los ele-

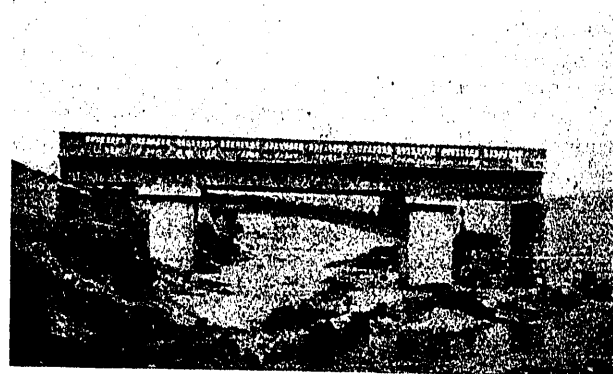


Figura 7.ª

mentos de suspensión de los forjados de la calzada y de las aceras, soportados por las vigas.

Igualmente se construyen moldes para cualquier otro tipo de obra: tajeas y grupos de tajeas, malecones, etc., etc. Actualmente los construye la "Metalúrgica del Tormes, S. A.", en sus amplios talleres de carpintería y de construcciones metálicas de Salamanca. Un molde permite construir más de cien unidades de obra, por lo que, además de la comodidad que supone disponer de moldes bien concebidos y contruidos, de sencillo manejo por obreros no especializados, el coste de amortización por obra construida resulta insignificante.

II

Vista en el anterior apartado la generalidad del procedimiento de construcción seguido por el autor para toda clase de obras de hormigón moldeado, armado o sin armar, entramos a considerar el nuevo tipo de puente anunciado por el título del presente artículo.

El tipo de puente de la fotografía 7.^a se puede construir, cualquiera que sea la altura de la rasante, sin apeaar los encofrados en el terreno que tiene debajo, en la forma expuesta en el apartado anterior. Toda la carga del puente es soportada por las pilas, y los estribos establecen los accesos indispensables; el enlace del estribo con el puente se hace mediante un perfil laminado en simple T, con la cabeza apoyada en el tablero y en el estribo, y el alma del perfil queda pendiente en el espacio libre intermedio. El puente se dilata libremente, sin tener que vencer el rozamiento de los elementos que integran los aparatos de dilatación; se trata de un puente completamente silencioso que, al sentirse cómodo en todo momento, no lanza chasquidos, ruidos o lamentaciones al espacio; mas, no obstante, cuantas veces he hablado de él han sido escuchadas manifestaciones contrarias a la bondad de su tipo. Las cargas máximas de trabajo de los materiales en los tramos en ménsula son las mismas que en los tramos con dos apoyos, desde cuyo punto de vista unos y otros tienen la misma estabilidad elástica. Para luces pequeñas no hay que mentar las flechas, y cuando éstas tengan cierto valor es fácil establecer la continuidad de los tramos en ménsula con los estribos, y entre ellos mismos cuando se trate de un puente de varios tramos del mismo tipo. Existen varios puentes de este tipo contruidos, y uno de dos tramos, todos contruidos con el mismo molde, y disponemos de la correspondiente experiencia en un período de más de veinte años.

Si en el tramo que estamos considerando (fig. 7.^a) anulamos la luz central entre pilas, quedará una sola pila con las dos ménsulas, como se representa esque-

máticamente en la figura 8.^a, a modo de un tronco de árbol con dos ramas horizontales a la misma altura y en prolongación, con cuya estructura se pue-

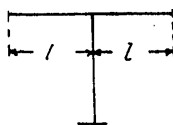


Figura 8.^a

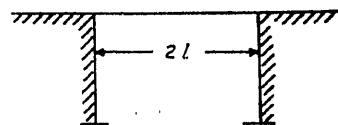


Figura 9.^a

de componer la de la figura 9.^a, para puente de un solo tramo, o la de la figura 10, para puente de dos o más tramos. Estableciendo la continuidad entre las ménsulas contiguas por enlaces que permitan la libre dilatación de las mismas, resulta el nuevo tipo de puente, que deriva del representado en la figura 7.^a, sobre el que tenemos la experiencia de poderse construir sin necesidad de apeaar los encofrados de los elementos que lo constituyen sobre el suelo que tienen debajo, y nos hemos atrevido a presentarlo con la publicación del presente artículo por la posibilidad de ser construido de igual manera, sin que hasta la fecha hayamos construido ninguno. Para

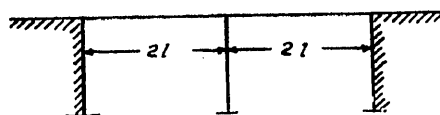


Figura 10.

construir el primero interesaba reducir el peso que habían de soportar los tableros de los encofrados, lo que se consiguió aumentando el número de vigas, con lo que al mismo tiempo se reducía la luz del forjado de la calzada, y la suspensión del correspondiente encofrado de las vigas ya fraguadas resulta sumamente sencilla, cómoda y económica. Designando por p el peso muerto por metro lineal de una (figura 7.^a), y por q la correspondiente sobrecarga uniformemente repartida por metro lineal, equivalente al tren tipo, el momento flector solicitante máximo en la ménsula, de luz, l , tiene la expresión $M = 1/2 (p + q) l^2$, y si unimos en continuidad los dos voladizos centrales de un puente de dos tramos, la luz resultante será $2l$ y el correspondiente momento flector solicitante, $M' = 1/12 (p + q') 4l^2$.

Igualando estos dos momentos, resulta:

$$\frac{1}{2} (p + q) \cdot l^2 = \frac{1}{12} (p + q') \cdot 4l^2;$$

$$p + q' = \frac{3}{2} (p + q); \quad q' = \frac{p + 3q}{2} = q + \frac{1}{2} (p + q),$$

e interpretando el valor obtenido para q' se descubre que el establecimiento de la continuidad entre

dos ménsulas proyectadas para un peso muerto, p , y una sobrecarga, q , permite una sobrecarga mayor en un 50 por 100 de la suma del peso muerto y de la sobrecarga que sirvieron para el proyecto de las ménsulas en el puente de un solo tramo (fig. 7.^a). Este aumento en la sobrecarga, resultante del establecimiento de la continuidad, nos induce a la posibilidad de proyectar y construir las ménsulas con el peso muerto del material, con cuya hipótesis, dando el valor $q = 0$ en la expresión de q' obtenida anteriormente, se obtiene $q' = p/2$, resultado que nos dice la sobrecarga que podremos admitir después de establecida la continuidad entre las ménsulas del nuevo tipo de puente (figs. 9.^a y 10).

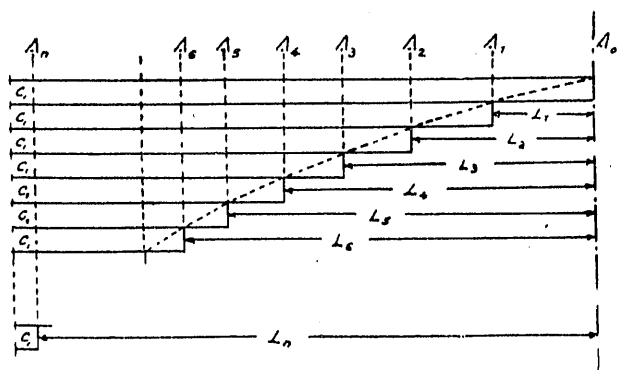


Figura 11.

Fijadas las bases fundamentales del nuevo tipo de puente, comenzamos seguidamente los desarrollos analíticos para determinar las dimensiones de las ménsulas sometidas al peso propio, consideradas formadas por hiladas horizontales de altura constante c_1 (fig. 11). En esta figura, A_0 indica la sección libre de la ménsula, y $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ indican las secciones en las que se produce el cambio de altura a las que corresponden las luces $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$, distancias de las distintas secciones a la A_0 tomada como origen.

Designando por δ la densidad del hormigón armado y por a el ancho o grueso de la ménsula, el peso constante de cada hilada por metro lineal, ex-

presando δ en kilogramos por metro cúbico y a, c_1 en centímetros, es dado por la expresión:

$$p = \delta \cdot \frac{a}{100} \cdot \frac{c_1}{100} \text{ Kg.-m. l.}$$

Seguimos en este trabajo el tratado de hormigón Peña Boeuf, segunda edición, en cuya página 140 se encuentra la expresión del canto útil [38]:

$$c = f(\varphi) \sqrt{\frac{M}{a}},$$

en la que M representa el momento flector solicitante en la sección que se considere. Por la continuidad de las hiladas se puede estimar que el canto útil y el peralte o altura de las mismas son iguales, poniendo las barras de armadura principal en la separación de cada dos consecutivas: en la hilada superior el forjado del piso del puente recubrirá ampliamente la correspondiente armadura resistente.

Los cantos y luces de cálculo correspondientes a las secciones $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 \dots c_1 &= 1 c_1 \dots L_1 \\ A_2 \dots c_2 &= 2 c_1 \dots L_2 \\ A_3 \dots c_3 &= 3 c_1 \dots L_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ A_n \dots c_n &= n c_1 \dots L_n \end{aligned}$$

El momento flector solicitante en la sección A_1 (fig. 11) es dado por la expresión:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \frac{a}{100} \cdot \frac{c_1}{100} \cdot L_1^2 \text{ m.-Kg.} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta a c_1}{10^4} \cdot L_1^2 \cdot 100 \text{ cm.-Kg.} = \frac{\delta a c_1}{200} L_1^2 \text{ cm.-Kg.} \end{aligned}$$

Antes de seguir adelante conviene conocer la siguiente propiedad de los sucesivos momentos en las diversas secciones $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Los momentos sucesivos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ son el producto del momento inicial que acabamos de determinar M_1 , por el cuadrado del subíndice correspondiente:

$$M_1 = 1^2 \cdot M_1;$$

$$c_2 = 2 c_1 = f(\varphi) \sqrt{\frac{M_2}{a}} \therefore 4 c_1^2 = f(\varphi)^2 \frac{M_2}{a} \therefore M_2 = 4 \frac{a c_1^2}{f(\varphi)^2} = 4 \frac{a f(\varphi)^2}{f(\varphi)^2} \frac{M_1}{a} = 2^2 \cdot M_1;$$

$$c_3 = 3 c_1 = f(\varphi) \sqrt{\frac{M_3}{a}} \therefore 9 c_1^2 = f(\varphi)^2 \frac{M_3}{a} \therefore M_3 = 9 \frac{a c_1^2}{f(\varphi)^2} = 9 \frac{a f(\varphi)^2}{f(\varphi)^2} \frac{M_1}{a} = 3^2 \cdot M_1;$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$c_n = n c_1 = f(\varphi) \sqrt{\frac{M_n}{a}} \therefore n^2 c_1^2 = f(\varphi)^2 \frac{M_n}{a} \therefore M_n = n^2 \frac{a c_1^2}{f(\varphi)^2} = n^2 \frac{a f(\varphi)^2}{f(\varphi)^2} \frac{M_1}{a} = n^2 \cdot M_1.$$

Obtenemos directamente los sucesivos valores de los momentos flectores solicitantes, e igualando las correspondientes expresiones obtenidas por dos procedimientos diferentes, resultan otras expresiones que nos permiten hallar las luces:

$$M_1 = \frac{\delta a c_1}{200} L_1^2 \text{ cm.-Kg.}; \quad c_1 = f(\varphi) \sqrt{\frac{M_1}{a}};$$

$$M_2 = \frac{\delta a c_1}{200} [L_2^2 + (L_2 - L_1)^2] = \frac{\delta a c_1}{200} [2 L_2^2 - 2 L_1 L_2 + L_1^2] = 2^2 \frac{\delta a c_1}{200} L_1^2 \text{ cm.-Kg.};$$

$$M_3 = \frac{\delta a c_1}{200} [L_3^2 + (L_3 - L_1)^2 + (L_3 - L_2)^2] = \frac{\delta a c_1}{200} [3 L_3^2 - 2 (L_1 + L_2) L_3 + L_1^2 + L_2^2] = 3^2 \frac{\delta a c_1}{200} L_1^2;$$

...

$$M_n = \frac{\delta a c_1}{200} [n L_n^2 - 2 (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_{n-1}) L_n + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \dots + L_{n-1}^2] = n^2 \frac{\delta a c_1}{200} L_1^2.$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones resulta:

$$c_1 = f(\varphi) \sqrt{\frac{\delta c_1}{200} L_1^2} = \frac{f(\varphi)}{10} \sqrt{\frac{\delta c_1}{2}} \cdot L_1 \therefore L_1 = \frac{10}{f(\varphi)} c_1 \sqrt{\frac{2}{\delta c_1}} = \frac{10}{f(\varphi)} \sqrt{\frac{2 c_1}{\delta}} \text{ metros};$$

$$2 L_2^2 - 2 L_1 L_2 + L_1^2 = 4 L_1^2 \therefore L_2^2 - L_1 L_2 = \frac{3}{2} L_1^2 \therefore L_2 = \frac{L_1}{2} + \sqrt{\frac{L_1^2}{4} + \frac{3 L_1^2}{2}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} L_1 = a_2 \cdot L_1;$$

$$3 L_3^2 - 2 (L_1 + L_2) L_3 + L_1^2 + L_2^2 = 9 L_1^2 \therefore L_3^2 - \frac{2}{3} (L_1 + L_2) L_3 + \frac{1}{3} (L_1^2 + L_2^2) = 3 L_1^2 \therefore L_3 = a_3 \cdot L_1;$$

$$L_3^2 - \frac{2}{3} (1 + a_2) L_1 L_2 + \frac{1}{3} (1 + a_2^2) L_1^2 = 3 L_1^2 \therefore L_3^2 - \frac{2}{3} (1 + a_2) L_1 L_2 = \left(3 - \frac{1 + a_2^2}{3}\right) L_1^2 = \frac{8 - a_2^2}{3} L_1^2;$$

$$L_3 = \left[\frac{1 + a_2}{3} + \sqrt{\frac{(1 + a_2)^2}{9} + \frac{8 - a_2^2}{3}} \right] L_1 = \left[\frac{1 + a_2}{3} + \frac{\sqrt{1 + 2 a_2 + a_2^2 + 24 - 3 a_2^2}}{3} \right] L_1 =$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1 + \sqrt{7}}{2} + \sqrt{25 + 2 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right) \frac{1 + \sqrt{7}}{2}} \right] L_1 = \frac{3 + \sqrt{7} + 2 \sqrt{25 + 1/2 (1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})}}{6} L_1 =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{7} + 2 \sqrt{22}}{6} L_1;$$

$$L_3 = \frac{3 + \sqrt{7} + 2 \sqrt{22}}{6} L_1 = a_3 \cdot L_1.$$

Si siguiendo el mismo procedimiento obtenemos dos valores más consecutivos, dando solamente los resultados:

$$L_4 = \frac{12 + 4 \sqrt{7} + 2 \sqrt{22} + 6 \sqrt{50}}{24} L_1 = a_4 \cdot L_1;$$

$$L_5 = \frac{60 + 20 \sqrt{7} + 10 \sqrt{22} + 6 \sqrt{50} + 24 \sqrt{95}}{120} L_1 = a_5 \cdot L_1.$$

Resumiendo, escribimos seguidamente la relación de los coeficientes obtenidos para deducir las leyes de su formación:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 = \frac{1}{1!}; \\
 a_2 &= \frac{1 + \sqrt{7}}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2!}; \\
 a_3 &= \frac{3 + \sqrt{7} + 2\sqrt{22}}{6 = 3!}; \\
 a_4 &= \frac{12 + 4\sqrt{7} + 2\sqrt{22} + 6\sqrt{50}}{24 = 4!}; \\
 a_5 &= \frac{60 + 20\sqrt{7} + 10\sqrt{22} + 6\sqrt{50} + 24\sqrt{95}}{120 = 5!}; \\
 &\vdots \\
 a_n &=
 \end{aligned}$$

Primera ley.—En cada coeficiente el radicando del último radical se forma restando del cubo del subíndice correspondiente la suma de los cuadrados de los subíndices de los coeficientes que le preceden, como se hace a continuación:

a_1	$1^3 - 0^2$	$1 - 0 = 1$
a_2	$2^3 - 1^2$	$8 - 1 = 7$
a_3	$3^3 - (1^2 + 2^2)$	$27 - 5 = 22$
a_4	$4^3 - (1^2 + 2^2 + 3^2)$	$64 - 14 = 50$
a_5	$5^3 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$	$125 - 30 = 95$
$\vdots$		
a_{n-1}	$(n-1)^3 - (1^2 + 2^2 + \dots + (n-2)^2) = (n-1)^3 - \sum_1^{n-2} n^2$	
a_n	$n^3 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) = n^3 - \sum_1^{n-1} n^2$	

Segunda ley.—Los denominadores de las expresiones de los coeficientes son las factoriales de los subíndices correspondientes.

Tercera ley.—Los términos que van apareciendo en los numeradores, conteniendo un radical y otro factor numérico, existen sin variación en dos coeficientes consecutivos.

Cuarta ley.—El número de términos o sumandos del numerador, en cada coeficiente, es igual al número de unidades del subíndice correspondiente.

Quinta ley.—El numerador de un coeficiente cualquiera se obtiene multiplicando por el subíndice

correspondiente los términos del numerador del coeficiente precedente, menos el penúltimo, que se mantiene igual (tercera ley), y el último, que se forma multiplicando el radical correspondiente, obtenido por la primera ley, por el denominador del coeficiente anterior.

Sexta ley.—Los números enteros que figuran en el numerador de un coeficiente cualquiera, menos el último, multiplicados por los productos sucesivos 1.2, 2.3, 3.4, ..., dan la factorial del subíndice correspondiente. El número entero que multiplica al último radical es, como se dijo en la ley anterior, la factorial del subíndice precedente.

La relación de los coeficientes se puede escribir en la siguiente forma:

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = \frac{\frac{2!}{1.2} + \sqrt{7}}{2!} = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$a_3 = \frac{\frac{3!}{1.2} + \frac{3!}{2.3} \sqrt{7} + 2! \sqrt{22}}{3!} = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3};$$

$$a_4 = \frac{\frac{4!}{1.2} + \frac{4!}{2.3} \sqrt{7} + \frac{4!}{3.4} \sqrt{22} + 3! \sqrt{50}}{4!} = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3.4} + \frac{\sqrt{50}}{4};$$

$$a_5 = \frac{\frac{5!}{1.2} + \frac{5!}{2.3} \sqrt{7} + \frac{5!}{3.4} \sqrt{22} + \frac{5!}{4.5} \sqrt{50} + 4! \sqrt{95}}{5!} = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3.4} + \frac{\sqrt{50}}{4.5} + \frac{\sqrt{95}}{5};$$

⋮

$$a_{n-1} = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3.4} + \frac{\sqrt{50}}{4.5} + \dots + \frac{\sqrt{(n-2)^3 - \sum_1^{n-3} n^2}}{(n-2)(n-1)} + \frac{\sqrt{(n-1)^3 - \sum_1^{n-2} n^2}}{(n-1)};$$

$$a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3.4} + \frac{\sqrt{50}}{4.5} + \dots + \frac{\sqrt{(n-1)^3 - \sum_1^{n-1} n^2}}{(n-1)n} + \frac{\sqrt{n^3 - \sum_1^n n^2}}{n}.$$

El siguiente cuadro contiene las diferencias entre cada dos coeficientes consecutivos:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{7} - 1}{2};$$

$$a_3 - a_2 = \frac{\sqrt{7}}{2.3} + \frac{\sqrt{22}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{22} - \sqrt{7}}{3};$$

$$a_4 - a_3 = \frac{\sqrt{22}}{3.4} + \frac{\sqrt{50}}{4} - \frac{\sqrt{22}}{3} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{22}}{4};$$

$$a_5 - a_4 = \frac{\sqrt{50}}{4.5} + \frac{\sqrt{95}}{5} - \frac{\sqrt{50}}{4} = \frac{\sqrt{95} - \sqrt{50}}{5};$$

⋮

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{\sqrt{(n-1)^3 - \sum_1^{n-2} n^2}}{(n-1)n} + \frac{\sqrt{n^3 - \sum_1^{n-1} n^2}}{n} - \frac{\sqrt{(n-1)^3 - \sum_1^{n-2} n^2}}{(n-1)} = \\ &= \frac{\sqrt{n^3 - \sum_1^{n-1} n^2} - \sqrt{(n-1)^3 - \sum_1^{n-2} n^2}}{n}. \end{aligned}$$

Las diferencias [2] son decrecientes y menores que la unidad, de cálculo muy sencillo y en la última de ellas, $a_n - a_{n-1}$, entran las sumas de los cuadrados de los $n-1$ y $n-2$, primeros números enteros que se determinan a continuación.

La suma de los n primeros números enteros tiene la expresión:

$$\sum_{i=1}^n n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Hagamos la comprobación de las dos últimas expresiones para $n=8$; sabemos que la suma de los cuadrados de los siete primeros números enteros es 140 y que la suma de los cuadrados de los seis primeros es 91:

$$\sum_{i=1}^7 n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 5 = 140;$$

$$\sum_{i=1}^6 n^2 = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 7 \cdot 13 = 91.$$

Fácilmente se descubre que, en la forma expuesta para la determinación de las luces $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$, las cargas de trabajo de los materiales permanecen constantes en todas las correspondientes secciones $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. En efecto: la $f(\varphi)$ que entra en la expresión del canto $c_1 = f(\varphi) \sqrt{M/a}$, depende de dichas cargas A de trabajo de la armadura y H de trabajo del hormigón, y como $f(\varphi)$ ha sido considerada constante en todas las operaciones realizadas para la obtención de las luces, las cargas A y H son las mismas en todas las secciones.

La construcción de las hiladas con altura constante c_1 en toda su longitud resultaría cómoda y la ménsula presentaría la forma escalonada de la figura 11. Fijando la atención en las partes extremas de cada una de las hiladas, correspondientes al extremo libre de la ménsula, se distingue en la primera un rectángulo de dimensiones c_1, L_1 ; en la segunda, un rectángulo de dimensiones $c_1, (L_2, L_1)$; en la tercera, un rectángulo de dimensiones $c_1, (L_3, L_2)$, y así sucesivamente. Las diagonales de estos rectángulos, marcadas de puntos en la citada figura, descomponen a cada uno de los rectángulos en dos triángulos, de los que se pueden suprimir los inferiores, con lo que la ménsula queda limitada por la poligonal formada por las hipotenusas de los triángulos suprimidos. Calculando las luces en la forma hecha, sirviéndonos de los coeficientes [1] o de las diferencias [2], la supresión de los citados triángulos resulta favorable a la estabilidad, porque los correspondientes pesos intervinieron en la determinación de los momentos flectores solicitantes, y se puede disponer de estos momentos suprimidos para introducir otros equivalentes.

Para formar un puente con estas ménsulas conviene integrarlas (fig. 13) con varios nervios, como se dijo al hablar del puente de la figura 7.^a, al objeto de reducir el peso que han de soportar los enco-

frados y el peso de los forjados de la calzada y de arriostramiento de los nervios, forjados que se utilizan, además, como auxiliares de la construcción. Limitadas las ménsulas por la poligonal dibujada de

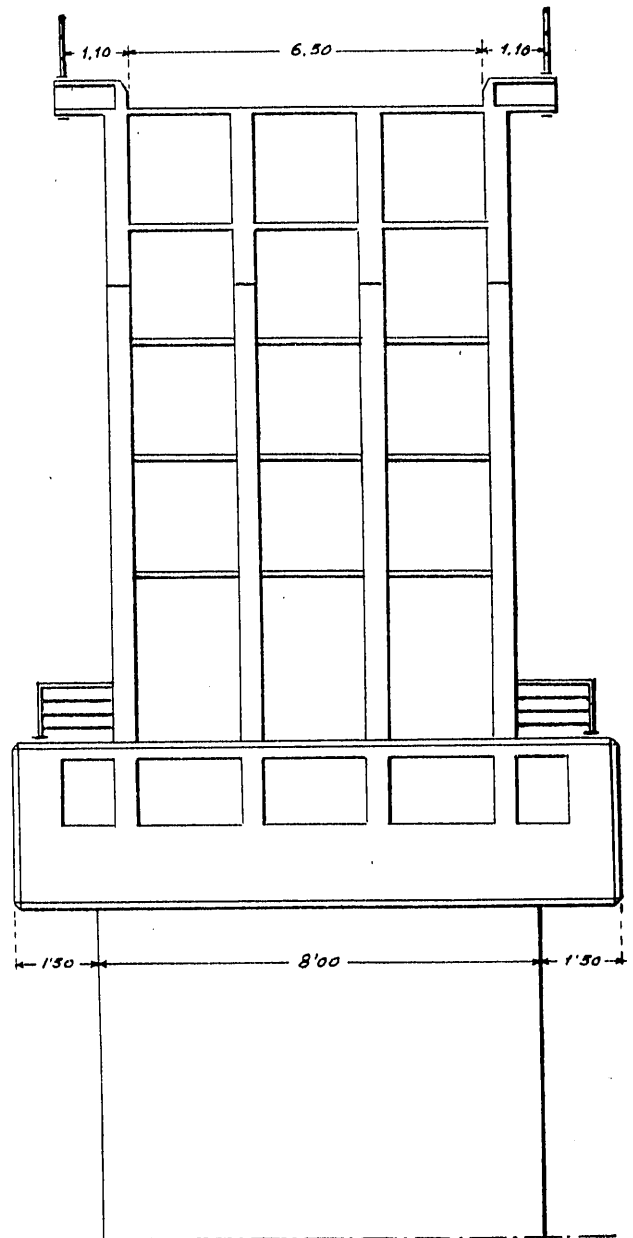


Figura 13.

puntos (fig. 11), la punta libre de las mismas resulta muy aguda y no es aprovechable. Según los casos, se suprimirá la parte correspondiente a una, dos, tres, ... hiladas, y el momento flector correspondiente a las partes suprimidas nos permite introducir otro producido por los forjados anteriormente mencionados.

El resto de lo que queda por exponer de este puente lo dejamos para otro u otros artículos. Lo expuesto es suficiente para presentar anticipadamente las dos figuras siguientes: la figura 12, correlativa de la figura 8.^a, representa una proyección vertical longitudinal del elemento que, por repetición del mismo, permite componer puentes; una pila circular hueca rematada por un capitel, sobre el que se apoyan o descansan dos ménsulas idénticas unidas en continuidad, distinguiéndose en la proyección un semialzado y una semisección, y la figura 13 es una proyección vertical transversal del mismo elemento. Este elemento se ha tomado del proyecto de un puente para carretera comarcal o de segundo orden, con 20 m. de altura de rasante aproximadamente; la pila, con 8 m. de diámetro exterior, se arriostra con el número de pisos que se estimen necesarios, que pueden servir para almacenar el cemento, herramienta, etc., durante la construcción del resto de la obra, dejando en su parte central el espacio libre necesario para instalar un montacargas elevador de materiales y del personal. Entre el forjado de la calzada y el capitel se establecen otros forjados o pisos de arriostramiento auxiliares de la construcción, considerándose todos los forjados como aditamentos productores de momentos flectores compensadores de los correspondientes a las partes de la ménsula suprimidas, ya descritas anteriormente. El capitel, en el sentido longitudinal (fig. 12), tiene 10 m., y 11 en el transversal (fig. 13), resultando una plataforma en la parte superior del mismo de 110

metros cuadrados, con espacio suficiente para las instalaciones exigidas por la construcción del tablero del puente, integrado por nervios en ménsula y forjados por los mismos sustentados. La longitud total salvada por el elemento representado en las dos últimas figuras se totaliza en 60 m., de los que 10 m. corresponden al capitel, y el resto, por partes iguales, a los vuelos de las ménsulas.

El piso corrido bajo el forjado de la calzada se aprovecha para la instalación de los medios que han de establecer la continuidad de los elementos, como el que acabamos de describir, que integren el puente.

La parte puntiaguda de la ménsula ha sido suprimida a partir de la sección A_3 , en que su canto variable alcanza la altura de tres hiladas superiores. La poligonal, en la parte restante, se confunde sensiblemente con la curva definida por sus vértices, en la que está inscrita. Esta curva tiene su pendiente mínima en su parte superior, pendiente que va creciendo constantemente, cualquiera que sea la luz o el número de hiladas que se consideren, por lo que se comprende que las mayores dificultades de construcción se presentan en las hiladas superiores de las ménsulas. El aumento de luz produce aumento de hiladas, que van surgiendo en la parte inferior, junto al capitel, y como las diferencias [2] de las luces son decrecientes y la altura de las hiladas constante, queda justificada la variación de la pendiente de la curva, y, por consiguiente, si llegamos a construir un elemento como el representado, la construcción de elementos de mayor luz, dentro de las posibilidades actuales, no presentará mayores dificultades.

El nuevo tipo de puente anunciado ha sido, con lo expuesto, presentado. Los numerosos ilustres lectores de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS y químicos de la industria del cemento y el hierro, poquito a poco se encargarán de mejorarlo.