

NOMOGRAMAS PARA EL CALCULO DE SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGON ARMADO

Por ANTONIO LOPEZ NIETO,
Ayudante de Obras Públicas.

Por considerar que ha de ser de utilidad para una parte de nuestros lectores en sus trabajos profesionales, y para que sirva de comparación con otros nomogramas publicados en nuestra REVISTA, nos complacemos en dar a la publicidad el presente trabajo.

Son innumerables los métodos, principalmente nomográficos o a base de tablas, que se han publicado para simplificar el cálculo de secciones de hormigón. Pero si se examinan con algún detenimiento, se echa de ver en muchos de ellos una zona de aplicación particularizada en exceso al hacer constantes algunas variables que intervienen en las fórmulas, cuando no el mayor número de aquéllas, así como también al reducir, además, el campo de variación de las restantes magnitudes a límites que dejan fuera del mismo muchos casos que, no por ser muy usuales, deben ignorarse. Todo ello refleja, sin duda, de un género de problemas que, en alguna ocasión, ocupó al autor del gráfico o tabla (para él, herramienta de trabajo utilísima), pero que, en parte, pierde tal carácter para los calculistas de hormigón enfrentados con piezas en las que esas condiciones resulten inadmisibles o molestas.

Carentes otros del primero de los defectos aquí apuntados, y gozando, por el contrario, a veces, de una generalidad considerable, son capaces de resolver con sencillez unas variantes del cálculo de una sección, pero en cambio su utilización es penosa o imposible para atacar otras variantes; es el caso, por citar un ejemplo muy conocido, de los ábacos de Mörsch, que, siendo datos las dimensiones, la sollicitación y las tensiones máximas admisibles, nos dan, mediante la utilización del compás sobre el propio ábaco, un par de secciones de armadura tal, que su suma es mínima; en cambio, para comprobar una sección hay que efectuar una serie de tanteos numéricos que equivalen a una curva de error.

Procurando evitar en lo posible los inconvenientes mencionados, hemos construido una serie de nomogramas que resuelven el cálculo de la sección rectangular. Todos ellos (véase nota sobre la construcción de los nomogramas) representan las ecuaciones de la teoría llamada clásica del hormigón armado: hipótesis de Hooke y de Navier, considerándose que el hormigón no trabaja a tracción. Como se verá, se han empleado, en lo posible, las notaciones de la

Instrucción española para el proyecto de obras de hormigón.

Hemos dividido el campo de variación de la excentricidad en tres partes, a fin de aprovechar al máximo las particularidades de cada una, sin aumentar el número de nomogramas hasta una cifra que pudiera considerarse enojosa, dando así lugar, sin apenas duplicidad entre los valores de la excentricidad de cada parte, a la construcción de tres grupos de tres nomogramas de alineación cada grupo, todos ellos de manejo análogo, a saber:

A) Compresión axial con flexión: toda la sección trabaja a compresión.

B) Flexión con compresión axial: la sección trabaja a compresión y a tracción.

C) Flexión con tracción axial: la sección trabaja a compresión y a tracción.

También hemos construido un grupo de tres nomogramas:

D) Determinación del brazo mecánico.

Dentro de la zona de valores de la excentricidad asignada a cada grupo de nomogramas, se puede operar con datos cualesquiera de las restantes variables, ya que no se ha supuesto constante ninguna de ellas (*), cubriendo, por otra parte, los campos de variación de las mismas todos los casos que puedan presentarse.

Los nomogramas del grupo B) que aparecen en este artículo, resuelven los siguientes problemas:

(Son datos comunes a todos ellos, sin especificarlos en cada caso, sollicitación, recubrimiento de la armadura de compresión — de forma aproximada cuando menos — y coeficiente de equivalencia.)

1) Dadas las demás variables, hallar las tensiones de trabajo del hormigón y del acero.

2) Dadas las dimensiones y las tensiones admisibles, hallar las armaduras de manera que las tensiones admisibles sean las de trabajo.

(*) Observaremos, sin embargo, que en los nomogramas del grupo A) se consideran iguales entre sí los recubrimientos de las dos armaduras.

3) Dadas las dimensiones y las tensiones admisibles, hallar las secciones de armadura de manera que, alcanzándose la tensión admisible en el hormigón, su suma sea un mínimo.

4) Dadas las tensiones admisibles y { una dimensión, la relación canto-ancho, } hallar { la otra dimensión } y las armaduras, de manera que la sección de ésta sea un mínimo y las tensiones de trabajo sean las admisibles.

5) Dadas las tensiones admisibles y { una dimensión, la relación canto-ancho, } hallar { la otra dimensión } y las armaduras, de manera que el precio de la sección sea un mínimo.

En la práctica interesan, sobre todo, los problemas 1) y 3), ya que el 2) carece de todo atractivo al poderse resolver con igual sencillez el 3), sucediéndole lo mismo al 4) respecto al 5), el que, a excepción de los otros que pueden hallarse directamente, exige el empleo de una curva auxiliar.

Los nomogramas del grupo D), que juntamente con los anteriores publicamos en esta ocasión, sirven, como su título indica, para la determinación del brazo mecánico de manera rigurosa en las secciones en que el esfuerzo cortante máximo tiene lugar en la fibra neutra o en sus proximidades. Su manejo no puede ser más simple.

Consecuencia, en parte, de las pretendidas ventajas, presentan los nomogramas B) algunos inconvenientes: el número de variables del problema obliga a una real dificultad en el manejo de nomogramas, pues cada variable de entrada complica éstos al introducir un nuevo sistema acotado (escala o familia); su lectura exige estar bien familiarizados con ellos, a fin de evitar errores, siendo esta dificultad de más relieve cuanto menos práctica se tenga en el manejo de nomogramas en general. Si dividimos las familias de curvas y las escalas en algunas partes tales que cada una tenga una importancia determinada por el número de veces, medio que comparativamente puede emplearse en la práctica, las áreas y longitudes ocupadas en los nomogramas no son proporcionales a su importancia; por ejemplo, si nos fijamos en la escala acotada en $r(q + q')$ de los nomogramas B), observaremos que la zona utilizable en una inmensa mayoría de casos es la comprendida entre $r(q + q') = 0,03$ y $r(q + q') = 0,40$, menor que la mitad de su longitud total; no obstante, la exactitud mínima que se puede obtener es francamente aceptable. Estos hechos hacen que los nomogramas A), B), C), tengan su mayor utilidad en aquellos casos que, otros más particularizados pero más sencillos, no pueden resolver.

Notaciones y unidades.

- c , canto útil de la sección.
- b , ancho de la sección.
- a' , recubrimiento de la armadura de compresión.
- q , cuantía de la armadura de tracción.
- q' , cuantía de la armadura de compresión.
- X , profundidad de la fibra neutra a partir del borde comprimido.
- B , brazo mecánico.
- A , tracción unitaria de la armadura de tracción.
- H , compresión unitaria máxima producida en el hormigón.
- r , coeficiente de equivalencia.

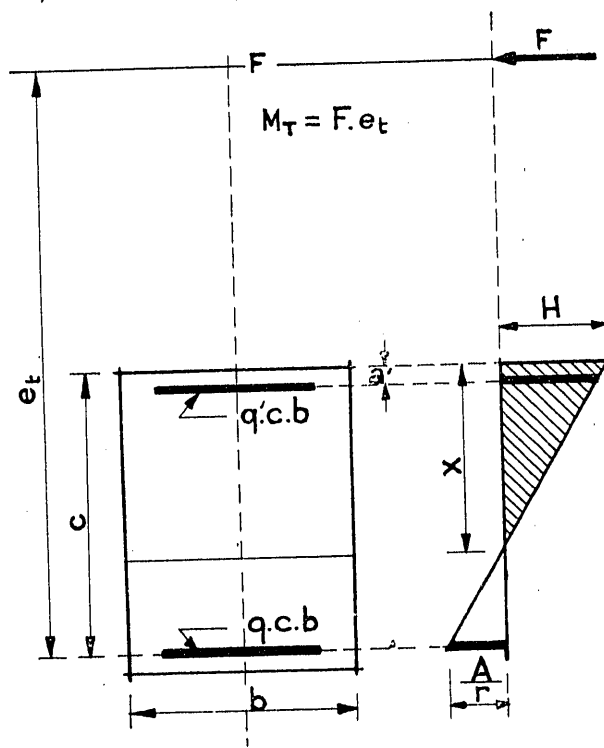


Figura 1.^a

Como de costumbre, reduciremos la solicitación dada por el análisis, en el caso de flexión compuesta, a una fuerza conocida en posición y magnitud, siendo:

- F , magnitud de la fuerza.
- e_t , excentricidad de la fuerza respecto a la armadura de tracción.
- e_c , excentricidad de la fuerza respecto a la armadura de compresión.

En consecuencia:

- S , sección de la armadura de tracción $= q \cdot c \cdot b$.
- S' , sección de la armadura de compresión $= q' \cdot c \cdot b$.
- M_T , momento de la fuerza respecto a la armadura de tracción $= F \cdot e_t$.
- M_C , momento de la fuerza respecto a la armadura de compresión $= F \cdot e_c$.

Se debe utilizar como unidad de longitud la misma en cada sección y deducir de ésta y de la de fuerza elegida, las unidades derivadas para las tensiones y momentos, y de la primera, la unidad de superficie.

Las variables de entrada en los nomogramas son:

$$\text{Nomogramas B): } r(q+q'), \quad r \cdot q', \quad \frac{A}{r \cdot H},$$

$$\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H} \text{ y } \frac{e_t}{c}.$$

$$\text{Nomogramas D): } r \cdot q', \quad \frac{A}{r \cdot H}, \quad \frac{B}{c}.$$

Como puede comprobarse, carecen de dimensiones.

No interviene en esas variables el recubrimiento a' porque lo hemos puesto en función del canto útil, haciendo $a' = \beta \cdot c$, en donde β es un número fijo en cada nomograma. Elegimos $\beta = 0,05$; $\beta = 0,08$; $\beta = 0,11$ dentro de cada grupo, valores para cada uno de los cuales se ha construido un nomograma del grupo; esto nos permite, dados el recubrimiento y el canto, hallar $\beta = \frac{a'}{c}$, y considerando los tres valores anteriores de β como centrales de las tres regiones:

$$0,035 \leq \beta \leq 0,065; \quad 0,065 \leq \beta \leq 0,095; \quad 0,095 \leq \beta \leq 0,125,$$

respectivamente, que abarcan todos los casos posibles, al ser dentro de cada una casi despreciable la diferencia de los resultados que se obtendrían con el recubrimiento correspondiente a un valor extremo de β y el recubrimiento obtenido con el valor central —por no superar el error propio de lectura de los nomogramas, salvo en una zona restringida y de escaso interés práctico que corresponde a secciones con la fibra neutra en las proximidades de la armadura de compresión—, podemos asimilar cualquier recubrimiento al del valor central de la región que le corresponde y operar en el nomograma respectivo prescindiendo de aquél y sin efectuar ninguna interpolación entre cada dos.

Los nomogramas B) están formados por dos escalas rectilíneas paralelas acotadas en $r(q+q')$ y $\frac{e_t}{c}$, que enmarcan el nomograma, y por tres fami-

lias de curvas acotadas en $r \cdot q'$, $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, que ocupan buena parte del interior del mismo. Todo punto de esta región del nomograma tiene tres cotas, ya que por él pasan tres curvas: $r \cdot q'$, $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ que, bien se leen directamente, bien se interpolan a ojo entre las dos curvas más próximas de cada fami-

lia. Por lo tanto, determinado un punto por intersección de dos curvas, podemos leer la cota de la tercera curva que pasa por él, y también determinado un punto por una alineación cualquiera de lectura y una de las curvas, podemos leer las cotas de las otras dos.

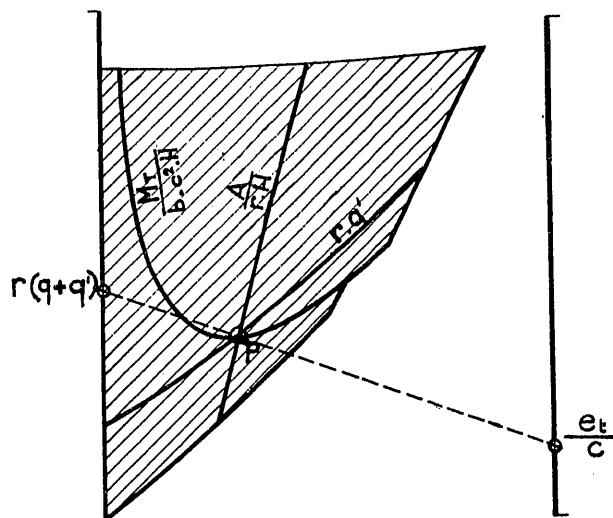


Fig. 2.a — Comprobación de tensiones.

Vamos a examinar el manejo de estos nomogramas para los problemas que son capaces de resolver:

1) Datos: a' , r , b , c , q , q' , M_T , e_t . Incógnitas: A , H .

Encontramos $\beta = \frac{a'}{c}$ y, consiguientemente, el nomograma que debemos emplear.

Hallamos $r \cdot q'$, $r(q+q')$ y $\frac{e_t}{c}$, variables de entrada en este caso. La alineación determinada por los puntos de cotas $r(q+q')$ y $\frac{e_t}{c}$, situados en las dos escalas, corta a la curva $r \cdot q'$ en un punto, P (v. fig. 2.a), por el que pasan dos curvas acotadas en $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$. Leídos los valores de estas expresiones en el nomograma, obtenemos, operando en la segunda de ellas, H , e introduciendo este valor en la primera, A .

2) Datos: a' , r , b , c , M_T , e_t y A y H , admisibles. Incógnitas: q , q' .

Encontramos, como en el caso 1), $\beta = \frac{a'}{c}$ y el

nomograma. Las curvas acotadas en $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ nos determinan un punto en su intersección, por el que pasa una tercera curva de cota $r \cdot q'$, que leemos. La alineación definida por el punto de intersección de $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ y el punto de cota $\frac{e_t}{c}$, situado en

la escala correspondiente, corta a la escala de $r(q + q')$ en otro punto cuya cota pasa a ser conocida. Obtenidos así $r \cdot q'$ y $r(q + q')$, con facilidad hallamos q y q' y, finalmente, s y s' , áreas de las armaduras.

3) Datos: a' , r , b , c , M_T , e_t y A y H , admisibles. Incógnitas: q , q' tales, que $q + q'$ sea un mínimo. Determinamos, como en los casos anteriores, el nomograma y las variables de entrada $\frac{e_t}{c}$ y $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$.

Desde el punto $\frac{e_t}{c}$ trazamos la tangente a la curva $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ (v. fig. 3.^a). Por el punto de tangencia P pasan dos curvas de cotas $\frac{A}{r \cdot H}$ y $r \cdot q'$, que leemos; también leemos la cota del punto de intersección de la tangente, alineación de lectura, con la escala $r(q + q')$; evidentemente puede comprobarse que, para los datos del problema, este valor es un mínimo y, por lo tanto, la suma de las secciones de armadura es también mínima; por último, conocidos $r \cdot q'$ y $r(q + q')$ mín., hallamos esas armaduras. Delémos, partiendo del valor $\frac{A}{r \cdot H}$ leído sobre el punto de tangencia P , obtener el de A que resulta, siendo H la tensión admisible en el hormigón, necesitándose para la validez del resultado encontrado que el valor de A así determinado sea menor o igual al admisible, lo que sucede casi siempre para valores de la excentricidad algo alejados del caso de flexión simple. De no ser así, este problema se reduce al 2).

4) Datos: β , r , M_T , e_t y A y H , admisibles, y uno de estos tres valores: c , b , $\frac{c}{b}$. Incógnitas: q , q' , y uno de estos tres valores en correspondencia con

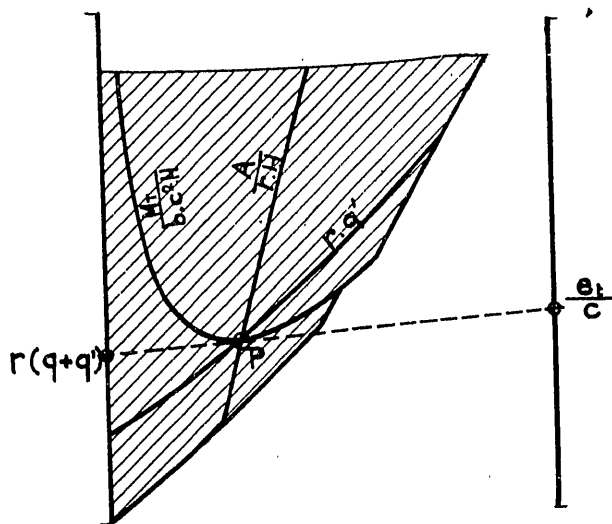


Fig. 3.^a — Determinación de la armadura mínima.

los tres datos anteriores: b , c o b y c , simultáneamente; tales, que las tensiones de trabajo sean las admisibles y que $q + q'$ sea un mínimo para las dimensiones que obtenemos de la sección.

Hallamos $\frac{A}{r \cdot H}$ y $\frac{e_t}{c}$, en donde tomamos para c , si es incógnita, el valor supuesto en el dimensionamiento anterior al análisis (*). Movemos una escuadra transparente, de manera que uno de sus lados pase por el punto $\frac{e_t}{c}$ hasta que la alineación definida por el lado de la misma que pasa por ese punto sea sensiblemente tangente a una curva $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ en su punto de intersección con la recta del nomograma de cota $\frac{A}{r \cdot H}$ (A y H son las tensiones admisibles, datos del problema). Situada así la alineación de lectura, leemos los valores de $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, $r \cdot q'$ y $r(q + q')$ mín. los dos primeros en las curvas respectivas que pasan por el punto de intersección de esa alineación con la recta $\frac{A}{r \cdot H}$ y el tercero, en la intersección de la alineación y la escala $r(q + q')$, encontrando, por tanto, seguidamente las dimensiones y secciones de redondos.

Este problema, aunque a veces da soluciones muy convenientes, en otros, cuando las parejas de $\frac{e_t}{c}$ y $\frac{A}{r \cdot H}$ son tales que la posición de la alineación de tangencia corresponde a curvas de cota elevada en $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, ofrece secciones de acero muy elevadas, lo que reduce su interés.

5) Con los mismos datos que en el problema anterior, calcular las mismas incógnitas, con la condición de que el precio de la sección resultante, incluidos hormigón, redondos y la parte de encofrado función del perímetro, sea mínimo.

Desde el punto $\frac{e_t}{c}$ trazamos tres o cuatro alineaciones de lectura, tangentes a otras tantas curvas cualesquiera $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$. Cada alineación nos determina, leyendo las cotas de las curvas $r \cdot q'$, $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ y $\frac{A}{r \cdot H}$ que pasan por el punto de tangencia, y la de su intersección con la escala $r(q + q')$, las dimensiones, armaduras y tensiones de una sección y, por tanto, mediante un cálculo auxiliar, su precio en pesetas.

(*) Si tomamos c como dato y no es inconveniente tomar a b como incógnita, de manera que se cumplan todas las condiciones enunciadas, no hay que operar con este supuesto.

Llevando sobre una cuadrícula cartesiana, en abscisas, los valores de las curvas $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ tangentes a las alineaciones trazadas, y en ordenadas, los precios respectivos de las secciones resultantes, y trazando la curva determinada por estos puntos (v. fig. 4.^a), podemos obtener el valor de $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$, que nos da una sección de mínimo coste y, por tanto, volviendo

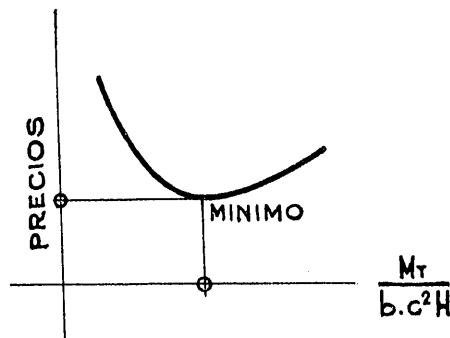


Fig. 4.^a — Determinación de la sección de mínimo precio.

al nomograma, sus características. Conviene comprobar en el mismo las tensiones, que no pueden ser mayores que las admisibles. Al ser el precio de los redondos muy superior al del hormigón, resulta que el precio mínimo corresponde a secciones en la menor armadura posible, de hecho sin armar, alejadas muchas veces de las necesidades constructivas; sucede alguna vez, no obstante, que si el precio del encofrado es elevado, tal mínimo corresponde a una sección con armadura intermedia.

Los nomogramas *D*) están formados por dos escalas rectilíneas perpendiculares acotadas en $r \cdot q'$ y $\frac{B}{c}$, y una escala curvilínea acotada en $\frac{A}{r \cdot H}$. Siendo su empleo posterior al de los nomogramas de los grupos *A*), *B*), *C*), siempre conoceremos $r \cdot q'$ y $\frac{A}{r \cdot H}$

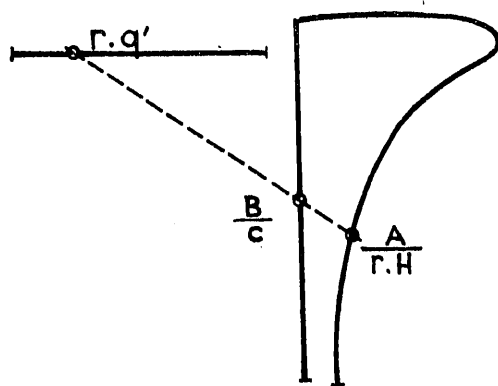


Fig. 5.^a — Determinación del brazo mecánico.

Su manejo se reduce (v. fig. 5.^a) a trazar la alineación que pasa por los puntos acotados en $r \cdot q'$ y $\frac{A}{r \cdot H}$ y leer la intersección de la misma con la escala $\frac{B}{c}$, de donde se deduce *B*.

Ejemplos de lectura.

1.^o Sean los datos: $a' = 2$ cm.; $r = 10$; $b = 26$ centímetros; $c = 50$ cm.; $q = 0,0182$; $q' = 0,01$; $M_T = 1\,050\,000$ cm.-Kg.; $e_t = 500$ cm. Vamos a hallar las tensiones del acero estirado y máxima del hormigón:

$$\beta = \frac{2}{50} = 0,04 \approx 0,05;$$

luego empleamos el nomograma 1. Establecemos:

$$r \cdot q' = 0,1; \quad r(q + q') = 0,282; \quad \frac{e_t}{c} = 10.$$

Con estos datos, el nomograma da:

$$\frac{A}{r \cdot H} = 1,45; \quad \frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H} = 0,26,$$

de donde:

$$H = 62 \text{ Kg./cm.}^2; \quad A = 900 \text{ Kg./cm.}^2.$$

2.^o Sea una sección en la que conocemos $a' = 3,6$ centímetros; $r = 12$; $b = 15$ cm.; $c = 50$ cm.; $M_T = 675\,000$ cm.-Kg.; $e_t = 55$ cm.; $A = 1\,000$ kilogramos/cm.²; $H = 45$ Kg./cm.² (tensiones admisibles), y vamos a hallar las armaduras de manera que, sin rebasar las tensiones admisibles, su suma sea mínima:

$$\beta = \frac{3,6}{50} = 0,072 \approx 0,08;$$

luego empleamos el nomograma 2. Determinamos

$\frac{e_t}{c} = 1,1$, $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H} = 0,4$. Trazamos desde el punto $\frac{e_t}{c} = 1,1$ la tangente a la curva $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H} = 0,4$, y esa alineación nos da:

$$r \cdot q' = 0,24; \quad \frac{A}{r \cdot H} = 0,96; \quad r(q + q')_{\min} = 0,342,$$

de donde: $q = 0,0085$; $q' = 0,02$; $A = 518$ kilogramos/cm.² $< 1\,000$ Kg./cm.² (tensión admisible).

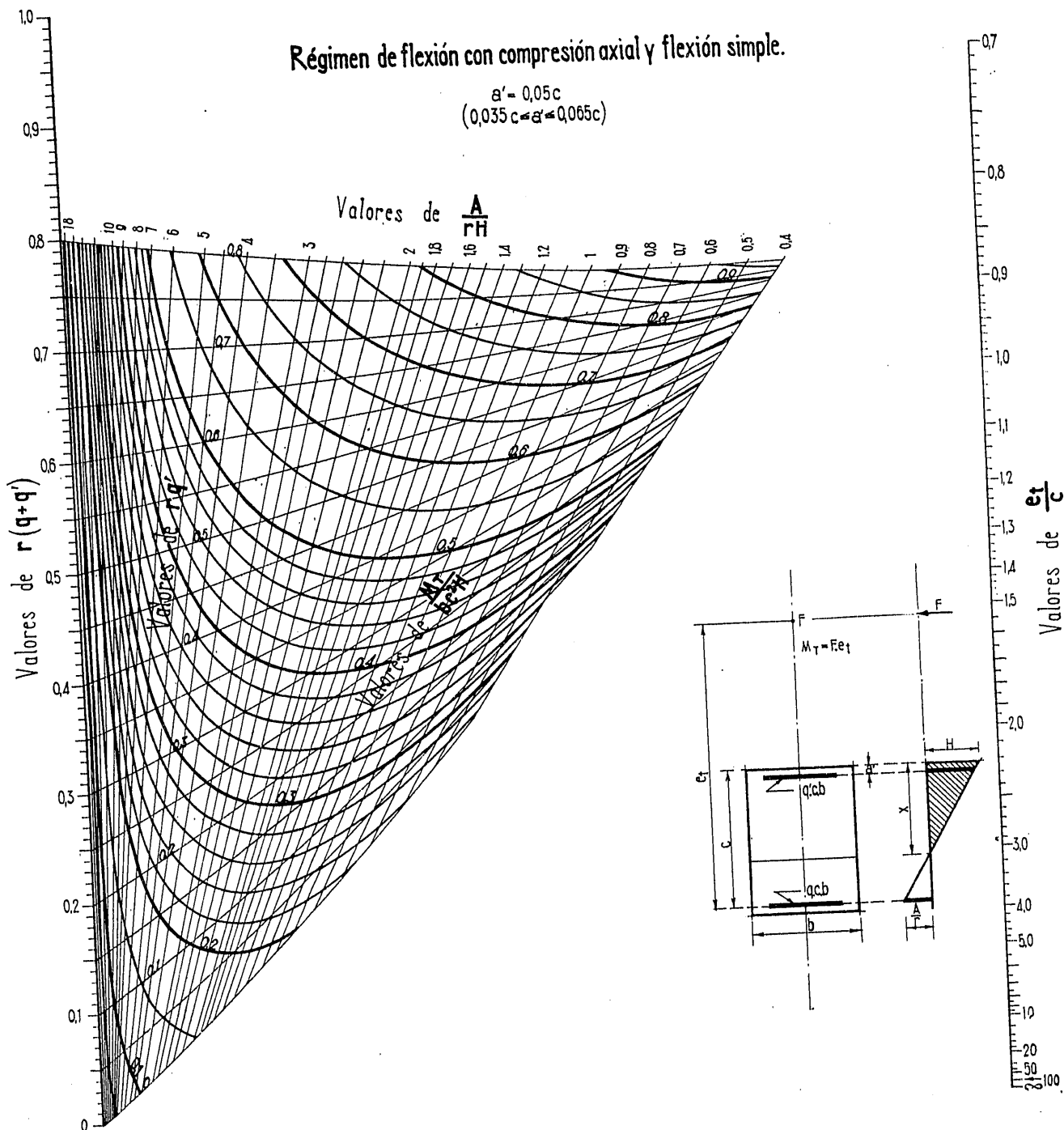
1

B)

Régimen de flexión con compresión axial y flexión simple.

$$a' = 0,05c$$

$$(0,035c \leq a' \leq 0,065c)$$



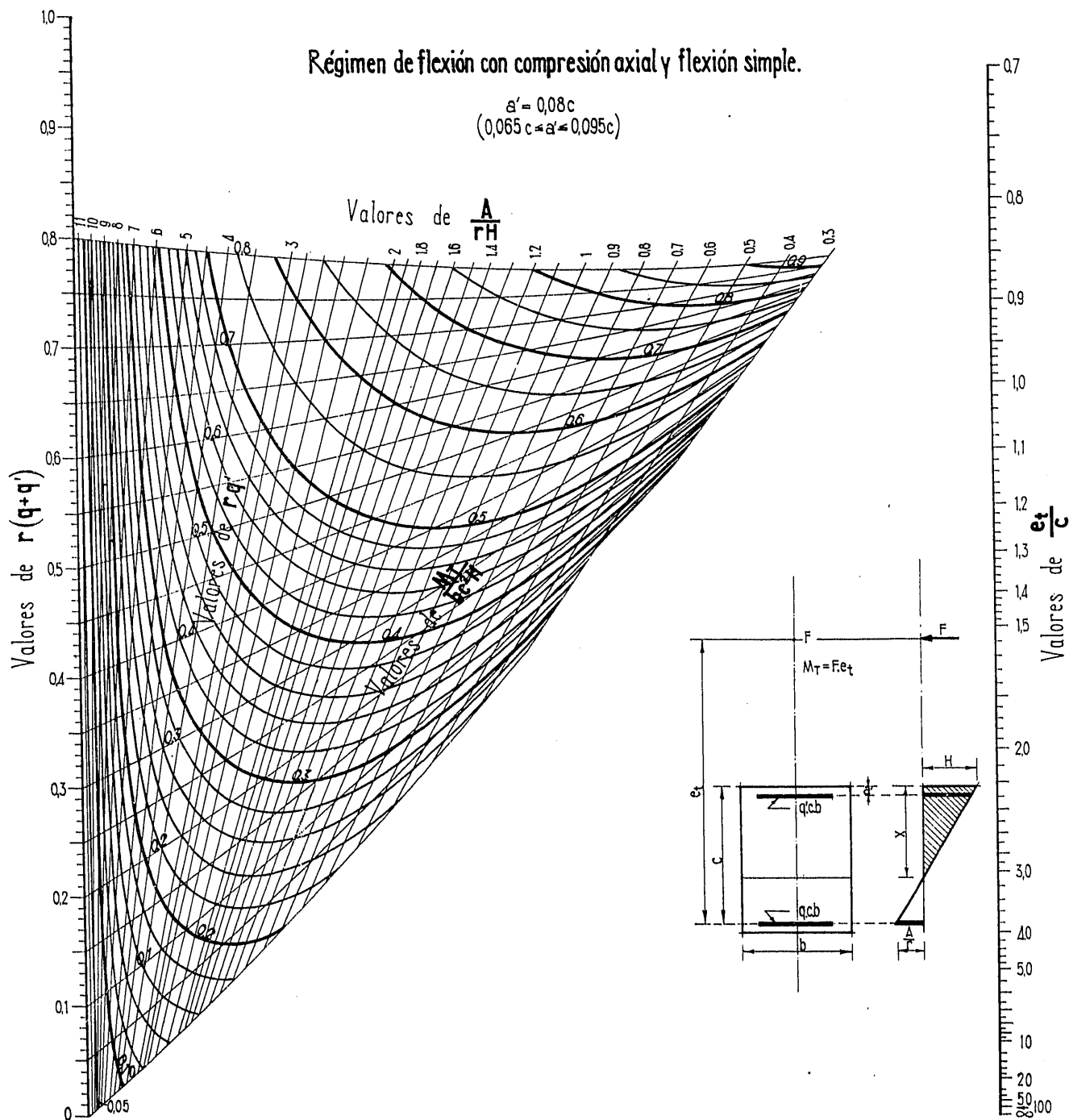
2

B)

Régimen de flexión con compresión axial y flexión simple.

$$\alpha' = 0,08c$$

$$(0,065c \leq \alpha' \leq 0,095c)$$



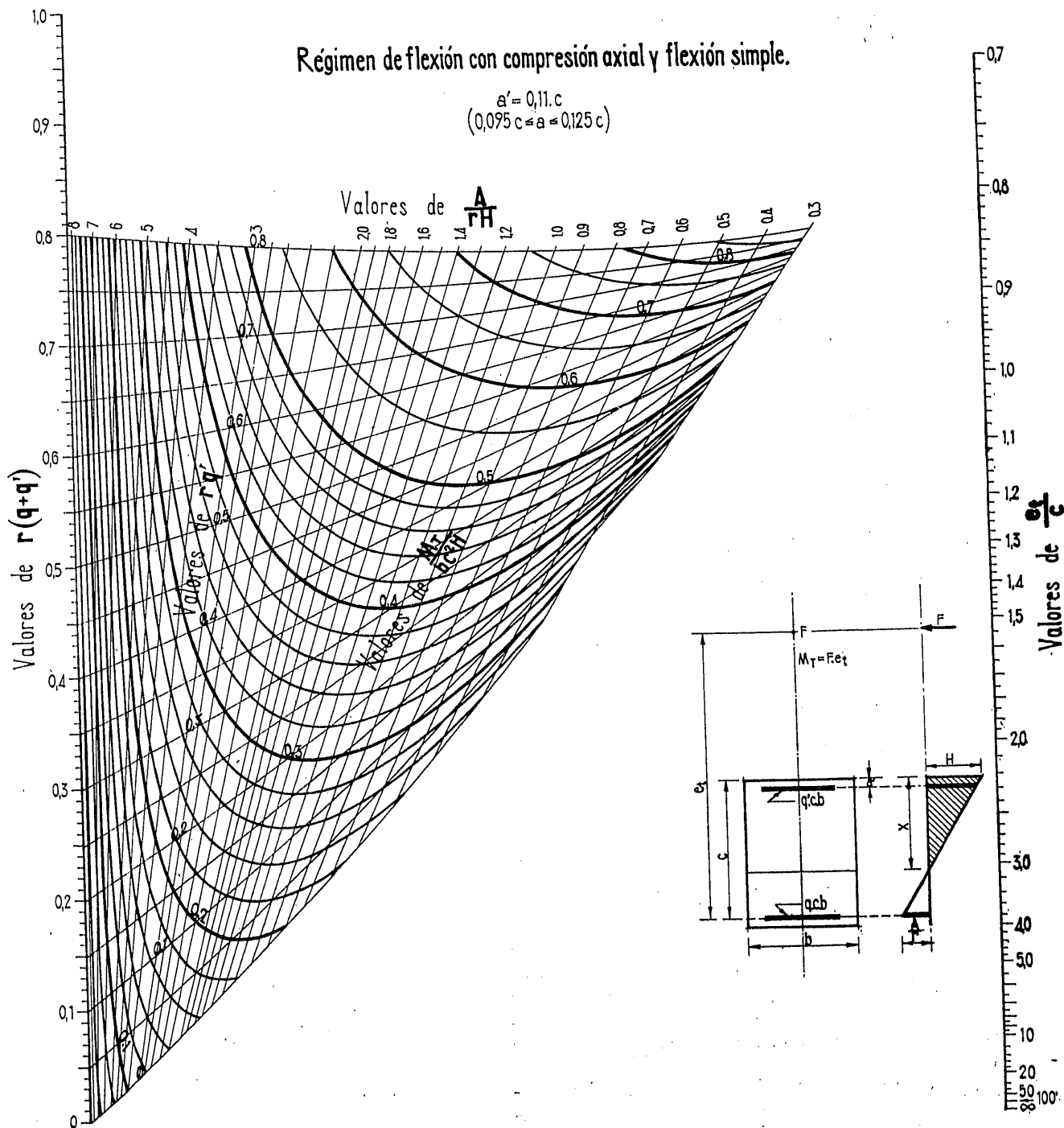
3

B)

Régimen de flexión con compresión axial y flexión simple.

$$a' = 0,11 \cdot c$$

$$(0,095 \cdot c \leq a \leq 0,125 \cdot c)$$



3.ª Sea una sección en la que: $a' = 4$ cm.; $r = 15$; $c = 40$ cm.; $M_T = 403\,000$ cm.-Kg.; $e_t = \infty$ (flexión simple); $A_{adm.} = 1\,100$ Kg./cm.²; $H_{adm.} = 42$ Kg./cm.². Se pide calcular b y las armaduras, de manera que las tensiones admisibles sean las de trabajo, y que, con la anterior condición, la suma de esas armaduras sea mínima:

$$\beta = \frac{4}{40} = 0,10 \approx 0,11;$$

empleamos el nomograma 3. Hallamos $\frac{e_t}{c} = \infty$ y $\frac{A}{r.H} = 1,75$. Giramos una escuadra, con uno de sus lados pasando por el punto $\frac{e_t}{c} = \infty$, hasta que la alineación definida por ese lado sea tangente a una de las curvas $\frac{M_T}{b.c^2.H}$ en el punto de intersección de ella con la recta $\frac{A}{r.H} = 1,75$. Determinamos aproximadamente, en este caso, la posición de esa alineación, siendo tangente a la curva $\frac{M_T}{b.c^2.H} = 0,3$. Lee-
mos, además de ese valor,

$$r.q' = 0,22; \quad r(q + q')_{\min} = 0,42,$$

y, por último, a partir de estos resultados, llegamos a $b = 20$ cm.; $q = 0,013$; $q' = 0,015$.

Para hallar ahora el brazo mecánico, recurrimos al nomograma 1' del grupo D), y partiendo de los datos $r.q' = 0,225$; $\frac{A}{r.H} = 1,75$, obtenemos $\frac{B}{c} = 0,883$, de donde $B = 35,3$ cm.

Cálculo de las secciones solicitadas a flexión con tracción axial empleando los nomogramas B).

El cálculo de las secciones solicitadas a flexión con tracción axial (nomogramas C)) puede hacerse también, en una gran parte del campo de variación de e_t , con los nomogramas B), ahora publicados: se traza el simétrico del valor de la excentricidad, que figure como dato en la sollicitación, respecto a $\frac{e_t}{c} = \infty$ y con el punto así hallado se opera igual que para los casos explicados, pues las ecuaciones correspondientes son idénticas a las de los nomogramas B), sin más que cambiar e_t por $-e_t$.

(*) Incluimos un cuadro en redondos para el más fácil armado de las secciones, reproducido de *Teoría y práctica del Hormigón Armado*, tomo III, E. Mörsch.

Nota sobre la construcción de los nomogramas.

Dada una sección rectangular y su sollicitación (flexión compuesta), escribiremos, tomando momentos respecto a las dos armaduras:

$$\frac{M_c}{b.c^2.H} = r.q \cdot \frac{1 - \frac{X}{c}}{\frac{X}{c}} (1 - \beta) - \frac{X}{2c} \left(\frac{X}{3c} - \beta \right); \quad [1]$$

$$\frac{M_T}{b.c^2.H} = r.q' \cdot \frac{\frac{X}{c} - \beta}{\frac{X}{c}} (1 - \beta) + \frac{X}{2c} \left(1 - \frac{X}{3c} \right); \quad [2]$$

y además:

$$\frac{M_T}{M_c} = \frac{\frac{e_t}{c}}{\frac{e_t}{c} - 1 + \beta}. \quad [3]$$

Eliminamos entre estas tres ecuaciones, primero, M_T , y luego, $\frac{M_c}{b.c^2.H}$, obteniendo entonces la ecuación de tercer grado que da la profundidad de la fibra neutra, en donde, si para abreviar, hacemos $\varphi = \frac{X}{c}$, queda:

$$\frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^2}{2} (e_t - 1) + \varphi \cdot r.q' (\beta + e_t - 1) + \varphi \cdot r.q \cdot e_t + r.q' \cdot \beta (1 - e_t - \beta) - r.q \cdot e_t = 0. \quad [4]$$

Para poder determinar nomográficamente el mínimo de $r(q + q')$ (problema 3, y en nuestros nomogramas parte de los 4 y 5), se pueden emplear — principio de los ábacos de Mörsch — las ecuaciones [1] y [2], representable cada una, para un β determinado, por un ábaco de tres variables. Se acoplan los dos ábacos de manera que en los mismos $r.q$ y $r.q'$ tengan como sistemas acotados familias de rectas, paralelas todas ellas, que intercepten sobre cualquier transversal escalas regulares con los orígenes de graduación coincidentes, y teniendo la misma familia acotada para $\frac{X}{c}$.

La ecuación [4] admite varias representaciones en puntos alineados (*), pero es preciso introducir previa-

(*) Ver, por ejemplo, J. Belgrano y A. López Nieto: "Nomograma para la determinación de la profundidad unitaria de la fibra neutra en piezas de sección rectangular", REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, agosto de 1951, en donde se representa por un nomograma de alineación una ecuación similar a la [4], y J. M. Urcelay: "Cálculo nomográfico de la sección rectangular de hormigón armado", *Informes de la Construcción*, núm. 42, el cual representa, para un sólo β , ecuaciones similares a la [4] y a la [2], por medio de un nomograma de alineación, la primera, y de un ábaco, dibujado al utilizar los elementos de la red del nomograma anterior, la segunda.

Diámetro — mm.	Peso por metro lineal — Kg.	Sección — cm. ²	Sección de 2 hierros — cm. ²	3 hierros — cm. ²	4 hierros — cm. ²	5 hierros — cm. ²	6 hierros — cm. ²	7 hierros — cm. ²	8 hierros — cm. ²	9 hierros — cm. ²	10 hierros — cm. ²
1	0,006	0,0079	0,016	0,024	0,031	0,039	0,047	0,055	0,063	0,071	0,079
2	0,024	0,031	0,053	0,094	0,128	0,157	0,188	0,222	0,25	0,28	0,31
3	0,055	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,42	0,49	0,56	0,63	0,71
4	0,098	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,76	0,88	1,00	1,13	1,26
5	0,153	0,20	0,39	0,50	0,78	0,98	1,18	1,37	1,57	1,77	1,96
6	0,220	0,28	0,56	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83
7	0,300	0,38	0,77	1,15	1,54	1,92	2,31	2,69	3,08	3,46	3,85
8	0,392	0,50	1,00	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03
9	0,496	0,64	1,27	1,91	2,54	3,18	3,82	4,45	5,09	5,73	6,36
10	0,612	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85
11	0,740	0,95	1,90	2,85	3,80	4,75	5,70	6,65	7,60	8,55	9,50
12	0,881	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,91	9,05	10,18	11,31
13	1,034	1,33	2,65	3,98	5,31	6,64	7,96	9,29	10,62	11,95	13,27
14	1,199	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,77	12,32	13,86	15,39
15	1,377	1,77	3,53	5,30	7,07	8,84	10,60	12,37	14,14	15,91	17,67
16	1,568	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,09	20,11
17	1,768	2,27	4,54	6,81	9,08	11,35	13,62	15,89	18,16	20,43	22,70
18	1,983	2,54	5,09	7,63	10,18	12,72	15,27	17,81	20,36	22,90	25,45
19	2,209	2,84	5,67	8,51	11,34	14,18	17,02	19,85	22,68	25,52	28,35
20	2,488	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,84	21,99	25,14	28,28	31,42
21	2,698	3,46	6,93	10,39	13,85	17,32	20,78	24,24	27,70	31,17	34,64
22	2,962	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61	30,41	34,21	38,01
23	3,257	4,15	8,31	12,46	16,62	20,77	24,93	29,08	33,24	37,40	41,55
24	3,525	4,52	9,05	13,57	18,10	22,62	27,14	31,67	36,19	40,71	45,24
25	3,824	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09
26	4,136	5,31	10,62	15,93	21,24	26,55	31,86	37,17	42,47	47,78	53,09
27	4,461	5,73	11,45	17,18	22,90	28,63	34,35	40,08	45,80	51,53	57,26
28	4,797	6,16	12,31	18,47	24,63	30,79	36,94	43,10	49,26	55,42	61,58
29	5,146	6,60	13,21	19,81	26,42	33,02	39,62	46,23	52,84	59,44	66,05
30	5,507	7,07	14,14	21,21	28,27	35,34	42,41	49,48	56,55	63,62	70,68
31	5,889	7,55	15,09	22,64	30,19	37,74	45,29	52,83	60,38	67,93	75,48
32	6,266	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,26	56,30	64,34	72,38	80,42
33	6,644	8,55	17,11	25,66	34,21	42,76	51,32	59,87	68,42	76,97	85,53
34	7,074	9,08	18,16	27,24	36,32	45,40	54,48	63,56	72,63	81,71	90,79
35	7,496	9,62	19,24	28,86	38,48	48,11	57,73	67,34	76,97	86,59	96,21
36	7,930	10,18	20,36	30,54	40,72	50,90	61,07	71,26	81,43	91,61	101,79
37	8,377	10,75	21,50	32,26	43,01	53,76	64,51	75,27	86,02	96,77	107,52
38	8,836	11,34	22,68	34,02	45,36	56,70	68,04	79,38	90,73	102,07	113,41
39	9,307	11,94	23,89	35,84	47,78	59,73	71,68	83,62	95,57	107,51	119,46
40	9,791	12,56	25,13	37,70	50,26	62,83	75,40	87,96	100,53	113,09	125,66
41	10,280	13,20	26,41	39,61	52,81	66,01	79,22	92,42	105,63	118,82	132,03
42	10,794	13,85	27,71	41,56	55,42	69,27	83,12	96,98	110,83	124,68	138,54
43	11,314	14,52	29,04	43,56	58,09	72,61	87,13	101,05	116,18	130,70	145,22
44	11,846	15,20	30,41	45,61	60,82	76,03	91,23	106,43	121,64	136,84	152,05
45	12,391	15,90	31,81	47,71	63,62	79,52	95,42	111,33	127,23	143,13	159,04
46	12,948	16,62	33,24	49,86	66,48	83,10	99,71	116,34	132,95	149,57	166,19
47	13,517	17,35	34,70	52,05	69,40	86,75	104,09	121,45	138,79	156,14	173,49
48	14,098	18,09	36,19	54,29	72,38	90,48	108,58	126,67	144,77	162,86	180,96
49	14,692	18,86	37,71	56,57	75,43	94,28	113,14	132,00	150,86	169,72	188,57
50	15,296	19,63	39,27	58,90	78,54	98,17	117,81	137,44	157,08	176,71	196,35

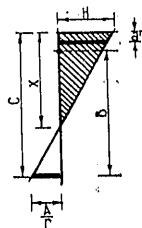
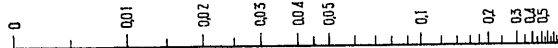
①

Determinación del brazo mecánico

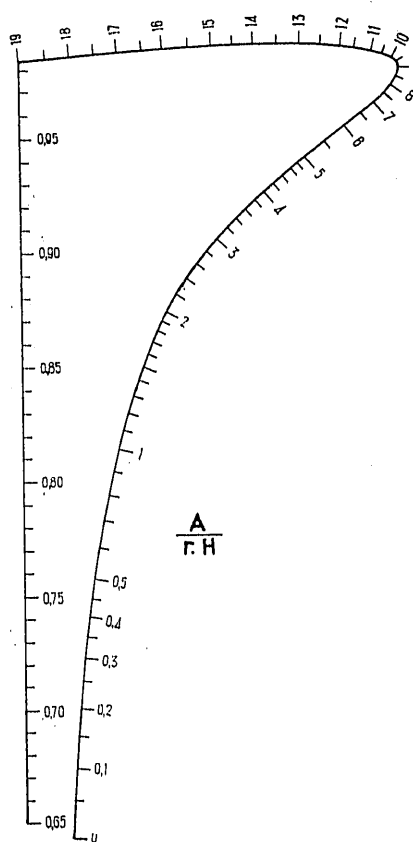
D)

$a' = 0,06 C$
 $(0,036 \leq a' \leq 0,066 C)$

r, q'



$\frac{B}{c}$



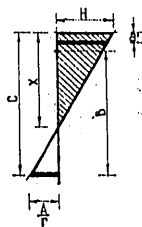
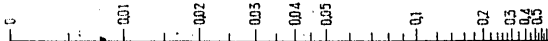
②

Determinación del brazo mecánico

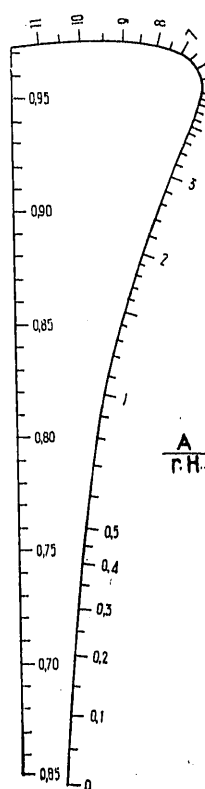
D))

$a' = 0,08 C$
 $0,066 C \leq a' \leq 0,095 C$

r, q'



$\frac{B}{c}$



mente un artificio para que, sin dejar de ser representable por alineación y sin aumentar los sistemas acotados, aparezca $r(q + q')$ como elemento del nomograma y sea éste último capaz de resolver esos problemas.

La [4] puede transformarse en la:

$$\frac{1}{e_t} \left[\frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) + r \cdot q' (\beta - 1) (\varphi - \beta) \right] + \left[\frac{\varphi^2}{2} + r \cdot q' (\varphi - \beta) \right] + r \cdot q (\varphi - 1) = 0.$$

Si ahora sumamos y restamos al mismo tiempo $r \cdot q' (\varphi - 1)$, se llega a:

$$\frac{1}{e_t} \left[\frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) + r \cdot q' (\beta - 1) (\varphi - \beta) \right] + \left[\frac{\varphi^2}{2} + r \cdot q' (1 - \beta) \right] + r (q + q') (\varphi - 1) = 0, [5]$$

en donde ya aparece $r(q + q')$, siendo todavía representable por puntos alineados para un β determinado, pues utilizando las notaciones usuales en Nomografía, es de la forma $F_1 = G_{34} + H_{34} \cdot F_2$. Transformando la [5] en el determinante generador correspondiente, queda:

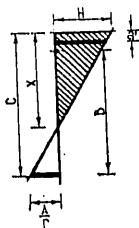
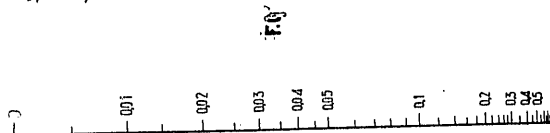
$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 300 \cdot r(q + q') & 1 \\ 250 & \frac{200}{e_t} & 1 \\ 250 \left[(1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) \right] & 200 \left[\frac{\varphi^2}{2} + (1 - \beta) \cdot r \cdot q' \right] & 1 \\ (1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) - \frac{2}{3} (\varphi - 1) & (1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) - \frac{2}{3} (\varphi - 1) & 1 \end{array} \right| = 0;$$

③

$\alpha = 0,11 \text{ C}$
($0,095 \text{ C} \leq \alpha' \leq 0,125 \text{ C}$)

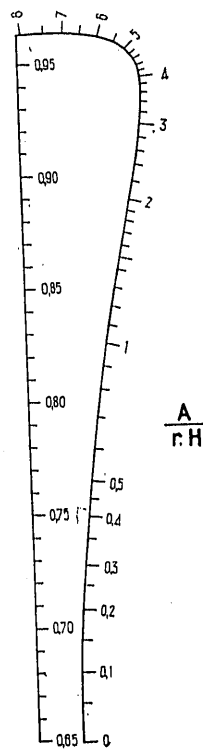
Determinación del brazo mecánico

D)



$\frac{B}{C}$

$\frac{A}{r \cdot H}$



determinante que equivale a la condición de alineación de tres puntos dados en un sistema cartesiano por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 300 \cdot r \cdot q' \cdot q' \end{cases} \quad \begin{cases} x = 250 \\ y = \frac{200}{e_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{250 \left[(1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) \right]}{(1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) - \frac{2}{3} (\varphi - 1)} \\ y = \frac{200 \left[\frac{\varphi^2}{2} + (1 - \beta) \cdot r \cdot q' \right]}{(1 - \beta) \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{\varphi}{3} - 1 \right) - \frac{2}{3} (\varphi - 1)} \end{cases}$$

En otras palabras, la condición de alineación de los puntos dados por estas tres ecuaciones equivale a la relación [5].

Siendo la unidad gráfica 0,6 mm. y dando a β los valores 0,05, 0,08 y 0,11, hemos construido los nomogramas del grupo B) 1, 2 y 3, respectivamente.

En las redes $(\varphi, r \cdot q')$ de cada uno de ellos dibujamos en forma de ábaco, ya que también se puede utilizar el principio citado en (*), la relación definida por la ecuación [2], dando en ésta a β el mismo valor particular que el que ha servido para construir la red, lo que nos permite trazar una familia de curvas acotadas en $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$. Finalmente, sustituimos las líneas de los nomogramas acotadas en φ por otras acotadas en $\frac{A}{r \cdot H}$ mediante la relación $\varphi = \frac{1}{1 + \frac{A}{r \cdot H}}$.

La resolución del problema 3) surge de forma evidente, pudiendo interpretarse la representación construida como un caso particular de los "ábacos de contactos tangenciales", de W. Margoulis, para el cálculo de máximos y mínimos (**).

Para el haz de rectas concurrentes en todo punto de $\frac{e_t}{c}$, el lugar geométrico de los puntos de tangencia de esas rectas y las curvas $\frac{M_T}{b \cdot c^2 \cdot H}$ es una línea que puede acortarse en $\frac{e_t}{c}$ (según la terminología de

M. d'Ocagne: "la trayectoria de contacto" de $\frac{e_t}{c}$). No hemos trazado esas líneas por la facilidad de obtener sin ellas el punto de tangencia con suficiente aproxi-

(*) Ver cita anterior.

(**) *Les abaques à transparent orienté ou tournant*. W. Margoulis. Gauthier-Villars, París.

mación y por la confusión que ello acarrearía en los nomogramas.

La ecuación que da el brazo mecánico B en función de $r \cdot q'$, β , φ y c , es:

$$\frac{B}{c} = (1 - \beta) + \frac{\varphi^2 (3\beta - \varphi)}{6 \cdot r \cdot q' (\varphi - \beta) + 3\varphi^2},$$

o lo que es igual:

$$\frac{1}{\frac{B}{c} - (1 - \beta)} = r \cdot q' \cdot \frac{6(\varphi - \beta)}{\varphi^2 (3\beta - \varphi)} + \frac{3}{3\beta - \varphi}, \quad [6]$$

expresión que puede ponerse en la forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & 600 \left[\frac{B}{c} - (1 - \beta) \right] & 1 \\ -\frac{1}{r \cdot q'} & 0 & 1 \\ \frac{2(\varphi - \beta)}{\varphi^2} & 200(3\beta - \varphi) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

por lo que la [6] estará representada por un nomograma de alineación cuyos elementos tienen por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 600 \cdot \left[\frac{B}{c} - (1 - \beta) \right] \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{r \cdot q'} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2(\varphi - \beta)}{\varphi^2} \\ y = 200(3\beta - \varphi) \end{cases}$$

Haciendo $\beta = 0,05; 0,08; 0,11$, hemos dibujado los nomogramas D) 1', 2', 3', respectivamente, en donde hemos sustituido φ por $\frac{1}{1 + \frac{A}{r \cdot H}}$, y tomamos como uni-

dad gráfica 0,5 mm.

A fin de mejorar la disposición de estos nomogramas les hemos hecho objeto de una transformación homográfica, lo que conserva la alineación como llave de lectura, definida por la correspondencia entre las rectas:

$$\begin{aligned} x = -\infty & \longrightarrow x' = -150 \\ x = 0 & \longrightarrow x' = 0 \\ x = 10 & \longrightarrow x' = 100 \\ y = 0 & \longrightarrow y' = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las nuevas coordenadas, en función de las primitivas, serán:

$$\begin{cases} x' = \frac{150x}{25 - x} \\ y' = \frac{25y}{25 - x} \end{cases}$$