

EL METODO DE CROSS Y EL DIAGRAMA DE WILLIOT

Por JOSE LOPEZ RODRIGUEZ,
Ingeniero de Caminos.

El presente artículo es una amistosa réplica o comentario del autor al artículo de nuestro compañero Sr. Miranda Lafuente, publicado en el número de diciembre pasado de esta REVISTA.

No creo que sean muchos los que hayan aventajado al autor de estas sencillas notas aclaratorias en el divertido deporte de comenzar artículos y antes de llegar a medio hacerlos pasaportarlos para el cesto de los papeles. Aunque, naturalmente, los años hayan quebrantado y mermado bastante tal afición. Como residuo de ella puede pasar el artículo que no ha mucho empecé diciendo así:

"Aquel donoso comentario de nuestro admirado Angel Ganivet sobre las que antaño fueron las llamadas *garantías constitucionales* (que solían, de ordinario, suspenderse siempre que ocurría *algo gordo*), no menos agudo que ingenioso; aquello de que tales garantías sólo servían cuando no servían para nada, me ha venido de molde, y molde muy adecuado, para poder dar, con referencia al empleo del diagrama de Williot en la práctica operatoria del método de Cross, la exposición comprimida de mi veto al conocido diagrama, contenida en este plagio al insigne pensador granadino: El diagrama de Williot es, en la práctica del método de Cross, una cosa que sirve para cuando no sirve para nada."

Tal apreciación mía arguye palpable desacuerdo con ciertos pormenores de un trabajo que acabo de leer en el número 2852 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS (páginas 526 a 533), titulado "Comentario acerca de "El método de Cross en serio y en broma" del Sr. López Rodríguez", del que es autor mi querido amigo y muy distinguido compañero D. Emilio Miranda Lafuente; y ese desacuerdo obliga a hacer algunas aclaraciones, que paso a detallar brevemente, bien que sin esperanza de alcanzar en ellas el grado insuperable de laconismo de mi *discípulo aventajadísimo* Sr. Miranda, en su trabajo mencionado. Diré ante todo, a quienes no lo sepan, cómo es tal discípulo, el autor del artículo sobre el que van a versar las notas aclaratorias integrantes del presente.

Entre los folletos, libros y libretos que componen mi modesta biblioteca conservo con la mayor estimación el cuaderno núm. 72 de las publicaciones del Instituto Técnico de la Construcción, regalo de D. Emilio Miranda, que contiene un interesante trabajo del donante, que lleva, por título "Una aplicación de la estabilidad de flotación al cálculo de estructuras", que personalmente me entregó en Málaga su autor,

con esta dedicatoria: "Al maestro en estas cuestiones, D. José López Rodríguez, con la "mecha" del discípulo ante el profesor".

No recuerdo haber sido maestro nunca y menos de Miranda Lafuente, cuya competencia reconocemos todos; es que somos ambos meridionales y disfrutamos los privilegios de la bula que graciosamente y sin pedirla nos concedió siglos ha el sol de Andalucía, para el uso hiperbólico de las exageraciones de toda suerte; pero voy ladinamente a aprovecharme de lo que D. Miranda hubo de autorizar con su prestigiosa firma en la cariñosa dedicatoria copiada, rogando sin empacho alguno al benévolo lector que lo tenga por rigurosamente cierto y comprobado, en lo que resta de este artículo por lo menos. En virtud de lo cual, este *maestro* a precario, en el más severo y doctoral de todos los tonos habidos y por haber (como cuadra de ordinario al profesor más por *honoris* que por *causa*, que es precisamente mi caso), pasa sin el menor titubeo a exponer, sin exponerse, cuanto podrá verse en lo que sigue:

En el género de los métodos de aproximaciones sucesivas, debemos al notable profesor norteamericano Hardy Cross una verdadera obra maestra. Me refiero a la distribución Cross de los momentos flectores en una estructura reticular plana, con traslaciones rigurosamente nulas de sus nudos, que es cosa de genial concepción, sencillez insuperable, acabada, originalísima... (siguen otros adjetivos encomiásticos).

También debemos al profesor Cross el método de cálculo de estructuras reticulares planas (sometidas a causas actuantes en su plano, por supuesto), que lleva su nombre, extraordinariamente difundido en la actualidad, que se basa fundamentalmente en la maravillosa distribución de momentos flectores de Cross, que se acaba de mencionar. Este método de Cross es, en cambio, una *cosa a medio hacer*, como probaremos oportunamente; y el tener ese convencimiento dió origen a la ficción de los dos métodos de Cross (el A y el C) en mi librito titulado "El método de Cross en serio y de broma" (no en broma, como muchos — Miranda Lafuente entre ellos — han mal leído), juguetito sencillo dedicado a mis hijos, modesto borrón crítico editado con caritativa finalidad, compuesto durante las vacaciones oficiales de 1951

Un grupo importantísimo de estructuras reticulares está constituido por las que en una nota de mi librito llamé estructuras RECTICULARES (así, con mayúsculas, figura al final de la página 123 del mismo), que son aquellas en las que los ejes de sus barras se cortan en *ángulo recto*. Los entramados de edificios y demás estructuras similares, integrantes de ese destacadísimo grupo, para nada necesitan recurrir al diagrama de Williot, si se calculan por el método de Cross. En ese grupo, naturalmente, se verifica lo de que el diagrama de Williot sirve para cuando no sirve para nada.

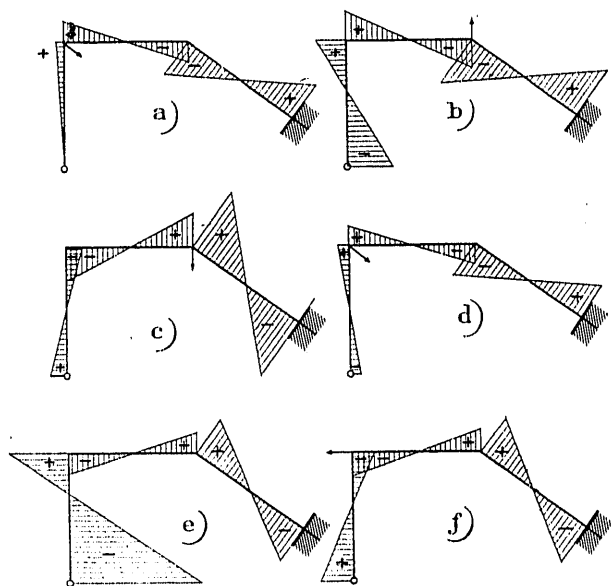


Figura 3.^a

Para muchos, el método de Cross se reduce a una simple receta útil para el cálculo de entramados y cosas por el estilo; pero no transigimos con que la aportación más valiosa hecha al cálculo de estructuras reticulares, en el primer tercio del presente siglo (según los norteamericanos), se reduzca tan desconsideradamente en su positiva importancia. Estamos tan lejos de ello como de admitir que el método de Cross *C* resuelve de la manera más sencilla y exacta cualquier clase de estructuras, por mucha que fuere su complicación.

El método de Cross *C* (o sea, con el diagrama de Williot) no resuelve *sencillamente* las cuestiones de cálculo de estructuras reticulares planas con barras inclinadas o cuyos ejes formen ángulos diferentes del recto. El que no lo crea así, pruebe a deducir siquiera las leyes lineales de variación de los momentos flectores en las distintas barras de mi poste, mediante el método de Cross, y se convencerá de ello. Más le convencerá de tal ausencia de sencillez el trabajo de mi compañero Miranda Lafuente en el número 2.852 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, a pesar de tra-

tarse de un pórtico como el de la figura 2.^a, que es el de mi librito, cuyo cálculo, por aplicación de los teoremas de Castigliano, es más breve y sin dificultad que efectuado por otro procedimiento cualquiera. El epígrafe del texto de mi librito (pág. 13) "Dos sencillas metamorfosis de los teoremas de Castigliano", encabeza la parte del mismo donde se explica el modo más práctico de operar en tal caso sin duda alguna.

No hay que extremar la pasión por el método de Cross *C*, llevándola a términos inconvenientes, lo mismo por exceso que por defecto. A nadie se le ocurriría aplicar el método de Cross para obtener la ley de variación de los momentos flectores en una viga recta empotrada en un extremo, sometida a las acciones de un par flector en su extremo libre y a una fuerza aplicada en el punto medio de su eje, por ejemplo; y de igual modo, el sencillo pórtico de mi librito, el de la figura 2.^a, no basta, hágase su cálculo por el método de Cross *A* o por el método de Cross *C*, para sentar conclusiones definitivas. ¿Qué menos, para ello, que efectuar la comparación de los mecanismos operatorios que al efecto se empleen, a base del ejercicio de cálculo de *mi poste* (fig. 1.^a)?

He llamado o calificado de *indigente* al diagrama de Williot en lo que antecede y voy a probarlo con auxilio de la figura 2.^a. Los detalles de ésta permiten escribir directamente las expresiones de los momentos flectores en las tres barras que componen el pórtico representado en dicha figura, que son las siguientes:

Barra *AB* (pilar vertical, articulado en su base):

$$m_1 = m_A + t z_1.$$

Barra *BC* (dintel horizontal):

$$m_2 = m_A + m_B + t l + n z_2 - \frac{3}{5} f_B z_2.$$

Barra *CD* (inclinada y empotrada perfectamente en *D*):

$$m_3 = m_A + m_B + m_C + t \left(l - \frac{3}{5} z_3 \right) + n \left[l + \frac{4}{5} z_3 \right] - \frac{3}{5} f_B l + \frac{4}{5} f_C z_3;$$

cuyas derivadas, respecto a las reacciones en el apoyo articulado (o a las componentes de la reacción), *t* y *n*, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d m_1}{d t} &= z_1; & \frac{d m_2}{d t} &= l; & \frac{d m_3}{d t} &= l - \frac{3}{5} z_3; \\ \frac{d m_1}{d n} &= 0; & \frac{d m_2}{d n} &= z_2; & \frac{d m_3}{d n} &= l + \frac{4}{5} z_3. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los valores del producto *E I* en cada una de las tres barras de nuestro pórtico y reduciendo al de la flexión el trabajo elástico total,

las derivadas de éste con relación a las fuerzas t y n (teoremas de Castigliano), igualadas a cero, nos dan un sistema de dos ecuaciones, con las incógnitas t y n , del que, resuelto, se obtienen:

$$t = -\frac{436}{379} \cdot \frac{m_A}{l} - \frac{175}{379} \cdot \frac{m_B}{l} + \frac{56}{379} \cdot \frac{m_C}{l} + \frac{24}{379} f_B + \frac{40}{379} f_C;$$

$$n = -\frac{807}{9,854} \cdot \frac{m_A}{l} - \frac{2,685}{4,927} \cdot \frac{m_B}{l} - \frac{3,234}{4,927} \cdot \frac{m_C}{l} + \frac{2,025}{4,927} f_B - \frac{1,552}{4,927} f_C.$$

Estos valores de las reacciones (o componentes de la reacción en A) nos permiten calcular fácilmente los momentos en los nudos de nuestro pórtico; e imponiendo las condiciones de las nulidades de los giros en los mismos, obtiéndose estas expresiones, que se pasa a detallar:

$$789 \cdot m_A - 849 \cdot m_B + 1,818 \cdot m_C + 194,4 \cdot f_B l + 324 \cdot f_C l = 0,$$

que es la relación que habrá de tener lugar entre las causas actuantes (los pares flectores m_A , m_B y m_C y las fuerzas f_B y f_C), en nuestro sencillo pórtico de la figura 2.^a, para que sea nulo el giro en el nudo C .

Si queremos que sean nulos los giros en los nudos B y C , las indicadas cinco causas actuantes habrán de verificar al sistema formado por la anterior expresión y por esta otra:

$$1,885,5 \cdot m_A - 2,619 \cdot m_B + 1,778 \cdot m_C + 307,2 \cdot f_B l + 512 f_C l = 0.$$

Por último, para que sean nulos los giros en los tres nudos A , B y C , todas las causas expresadas habrán de cumplir las tres condiciones o relaciones formadas por las dos anteriores y esta tercera:

$$322 \cdot m_A - 175 \cdot m_B + 56 m_C + 24 \cdot f_B l + 40 \cdot f_C l = 0.$$

Téngase en cuenta que dichas tres últimas expresiones corresponden a unas direcciones determinadas de las fuerzas f_B y f_C ; pero como estas fuerzas, aplicadas en los nudos B y C , pueden tener infinitas direcciones en el plano de nuestro pórtico, compréndese fácilmente la indeterminación del problema, la infinidad de soluciones que caben, para los valores de las causas que consideramos, al objeto de conseguir la nulidad de los giros en los nudos B y C solamente (como en el trabajo del Sr. Miranda Lafuente) o en los tres nudos A , B y C del pórtico de la figura 2.^a. Por ello afirmé que el diagrama de Williot era un *indigente*.

He reunido en el cuadrito que sigue una serie de valores que verifican a las anteriores expresiones o condiciones de las nulidades de los giros en B y C o en los tres nudos, A , B y C ; son, precisamente, los cinco valores que han dado los casos a a e) de la figura 3.^a y última de estas notas aclaratorias.

Valores de las causas actuantes en los casos que se detallan:

Casos	m_A	m_B	m_C	f_B	f_C
a)	0	$+\frac{36}{550} l$	$-\frac{42}{550} l$	+1	0
b)	$-\frac{24}{137} l$	0	$-\frac{14}{137} l$	0	+1
c)	$+\frac{8}{119} l$	$-\frac{8}{119} l$	$+\frac{14}{119} l$	0	-1
d)	$-\frac{24}{595} l$	$+\frac{24}{595} l$	$-\frac{6}{85} l$	+1	0
e)	-l	$-\frac{137}{220} l$	$+\frac{63}{440} l$	0	0

Los cinco grupos o series de valores de las causas actuantes en nuestro pórtico de la figura 2.^a, reunidos en el precedente cuadrito, merecen el leve comentario que pasamos a hacer: En los cuatro primeros actúa, en cada uno, una de las fuerzas, f , que se ha tomado como unidad; no ocurriendo así en el caso e), en el quinto y último de ellos, por ser nulos los valores de las fuerzas f_B y f_C , lo que ha motivado que se tome como unidad el momento flector (1. l) en el apoyo articulado.

Todos los múltiplos y submúltiplos de los valores de cada una de las cinco líneas (o para cada caso) de nuestro cuadrito darán, evidentemente, giros nulos en los nudos superiores (casos a), b) y c)) o extremos del dintel de nuestro pórtico o en los tres nudos, A , B y C , de dicha sencilla estructura (casos c) y d) del cuadrito). Por ejemplo, nulos serán esos giros para esta serie de valores del caso a):

$$0; \quad +36 \cdot l; \quad -42 \cdot l; \quad +550; \quad y \quad 0$$

o esta otra del caso c):

$$+8 \cdot l; \quad -8 \cdot l; \quad +14 \cdot l; \quad 0; \quad y \quad -119;$$

o, finalmente, la que sigue del caso c):

$$-440 \cdot l; \quad -274 \cdot l; \quad +63 \cdot l; \quad 0; \quad y \quad 0$$

(ordenando las causas actuantes, como en el cuadrito se ha hecho).

Necesitamos un mínimo de *tres* (casos *a*), *b*) y *c*)) valores de las causas actuantes para que sean nulos los giros en los *dos nudos* extremos del dintel, y un mínimo de *cuatro* valores, como en los casos *c*) y *d*), para lograr la nulidad de los giros en los *tres nudos*, *A*, *B* y *C*, del sencillo pórtico de que tratamos.

Las cinco primeras figuritas de nuestra figura 3.^a corroboran, por las rectas de momentos correspondientes (que pasan, como es debido, por puntos medios de los ejes de las respectivas barras), la certeza de la nulidad de los giros en cada caso; pero he añadido el caso *f*) y la final de las figuritas de la figura 3.^a, para que el lector pueda sentir la riqueza asombrosa de soluciones para las nulidades de giro, en los nudos de una estructura reticular, de mi fastuosa *cimbra simbólica*. En los casos del cuadrado, la fuerza f_B es de dirección paralela a la barra *CD*, y la f_C normal, al dintel de nuestro pórtico; pues bien, para la figurita *f*), cuyos cálculos omitimos, he dado a la fuerza f_B la dirección del eje de la barra *BC* o dintel; y como ella muestra, habrán de ser los giros nulos en *B* y en *C*, para los valores de las causas actuantes que han dado las leyes lineales de variación de los momentos flectores en ella representadas, que son los que siguen:

$$m_A = + \frac{18}{137} \cdot l; \quad m_B = 0; \quad m_C = + \frac{21}{274} \cdot l; \\ f_B = -1; \quad f_C = 0.$$

Hay en todo lo que se acaba de detallar ciertos vislumbres de la noción de mi *cimbra simbólica*, indicio de cómo por ella cabe la realización de las *traslaciones sin giros* de los nudos, complemento obligado de los *giros sin traslaciones* en los mismos, que son el alma de la ingeniosa distribución Cross de los momentos flectores en una estructura reticular, que reuní en mi librito en el esquemático *teorema de las quintaesencias* (que me había facilitado el método de Cross *A*).

He querido (con permiso del lector, por supuesto) prescindir en estas notas de dar la noción de mi *cimbra simbólica*, por varias estimables razones: ya, precedentemente, dije la de no alargar este articulo demasiado; pero hay otras, tales como desear exponerla prescindiendo de los teoremas de Castigliano y del diagrama de Williot, con auxilio del cálculo de mi poste, por el método de Cross *químicamente puro*, que bastará para dar una teoría clarísima de mi dicha *cimbra*, con toda la generalidad apetecible y no con el auxilio del sencillo pórtico de la figura 2.^a, animador de mi librito, que, para el borrón crítico del mismo, pudo acaso resultar suficiente cuadrando al juguete.

Pero ahora que estoy en *maestro*, ni debo ni puedo descender a tales minucias, que, además, pueden prestarse a confusiones. ¡Ah, de las malas interpretaciones! ¡Cómo debe prestarse a ellas mi librito! Anda por esos mundos esta frase (o pensamiento, o lo que sea) de Dale Carnegie: "Todo lo que puede ser mal interpretado es mal interpretado siempre"; y pueden llegar las interpretaciones hasta el extremo de tomar en serio las bromas como se pone de manifiesto en el trabajo de mi querido amigo D. Emilio Miranda. El que éste haya desfigurado un poco el título de mi librito, llamándole "El método de Cross en serio y en broma" (es *de broma*, corrijo por vez tercera), prueba que no prestó acaso toda la atención a mi juguete. El título de éste es *suma* de estos otros dos:

El método de Cross en serio (conjunto de todo lo que seriamente tuve a bien criticar en tal método).

El método de Cross *de broma* (todo lo que chancé éste por su exclusiva cuenta y riesgo).

¡Ah de las malas interpretaciones! Me place rectificar lo dicho al principio, de que había llegado a mí a destiempo el trabajo del Sr. Miranda Lafuente y que la cuestión en él planteada había pasado para mí a segundo término. Como todo lo que puede ser mal interpretado es mal interpretado siempre, no me agradaría que pudiera tomar a descortesía tal manifestación mi amigo y compañero E. Miranda; por lo que pondré un puntito crítico a su interesante trabajo. Es censurable en éste que se haya omitido una explicación del truco en el que la broma se basa, que es de lo más sencillo que darse puede; la simple vista de la figura 3.^a lo pone de relieve, y en mi librito aparece en la parte *d*) de su figura 14, *avalado* por una ingenuidad de los años escolares del Sr. Prieto Moresi. En las páginas 12 y 103 a 106 podrá el lector de mi librito informarse de esto y hasta romper la *cadena cinemática*, que me hubiera agradado ver romper a Miranda, que bien pudo hacer que cada eslabón saltara por su lado.

Tal omisión es perfectamente excusable, tratándose de un compañero de múltiples, serias y provechosas actividades, al que dispenso, de la mejor gana, por tal motivo, el que me estropeará un poco el tan *discurrido* título sumatorio de mi librito.

Voy a terminar detallando el ejercicio de cálculo de mi poste (el de la figura 1.^a); pero no quiero dejar en el tintero la declaración sincera y cordial de que este artículo se ha librado de la muerte en el cesto de los papeles, como tantos otros, víctimas de ese afán de empezar y no acabar nada, tan de la indolencia y osada pluma mía, tan sólo, quizá, por la satisfacción de rendir los merecidos honores a mi buen amigo D. Emilio Miranda, que después de todo...

(Me están zumbando conjuntamente ahora la frase de Dale Carnegie y la bula del sol andaluz que al principio dije: me insinúa la primera que pesa mucho la autoridad de Miranda Lafuente, por todos acatada, y que pudiera su trabajo interpretarse, como que es cosa obligada e imprescindible, el empleo del diagrama de Williot en la práctica del método de Cross; y la bula quiere hacerme ver que no hice mal uso de ella al afirmar que el diagrama de Williot en la práctica del método de Cross es una cosa que sirve para cuando no sirve para nada.)

No quiero volver sobre el asunto; me restan unos pocos renglones de vida como maestro *in partibus infidelibus*, que deseo aprovechar, detallando el problema que someto a mi discípulo Miranda, seguro de que su resolución (secundada por la mía) pondrá en claro cuanto así haya de quedar, rindiendo el debido culto al señorío de la verdad.

La figura 1.ª define bastante bien la estructura (poste) que va a calcularnos D. Emilio Miranda, por el que antes llamé el método de *Cross-Williot*. No consigné en ella, distraídamente, este otro dato de interés para la resolución de la cuestión que voy a plantear. Me refiero a la relación del momento resistente (W) al área de la sección en las diez barras de dicha estructura (S), a la que se me ocurrió dar este valor:

$$\frac{W}{S} = \frac{1}{75};$$

si bien puede adoptar Miranda Lafuente otro cualquiera, que aceptará este su *profesor*.

El problema a resolver es hallar en qué barra y en qué extremo de ella (de las de mi poste, por supuesto) tiene lugar la máxima carga de compresión de la estructura, y obtener igualmente en cuál de las barras del poste y en cuál de los nudos extremos de la misma se tiene la máxima carga unitaria de trabajo a extensión.

No deseo la representación de las elásticas de estas barras, para no distraer a D. Emilio Miranda de sus múltiples, serias y provechosas actividades profesionales; me bastan las menos figuras, no debiendo omitir una en la que, a modo que en la adjunta figura 3.ª, se representen las leyes lineales de variación de los momentos flectores a lo largo de las diez barras de *mi poste*. Y (antes que se me olvide) se reducirá el trabajo de la deformación al debido a los momentos flectores, lisa y llanamente.

Créanne los lectores que ya iba tomándole el gusto a la *cátedra*, y que al apearne de ella, cumpliendo puntualmente lo ofrecido, experimento cierto desagrado. Desciendo a los bancos de los alumnos, sin otro alivio que la esperanza de oír la lección magnífica que va a dar a todos D. Emilio Miranda, que ocupará la tribuna lo antes que le sea posible; pero antes de dejar el sillón, he querido una vez más reiterarle mi interés dirigiéndole protocolariamente la concesión consabida:

El distinguido Ingeniero D. Emilio Miranda Lafuente tiene la palabra.