

APLICACIONES ESPACIALES DEL METODO DE LAS TRANSFORMACIONES

Por FEDERICO GODED ECHEVERRIA,
Ingeniero de Caminos.

Presentamos a continuación el cuarto artículo sobre el elevado tema del epígrafe, que nos remite el autor, y que sin duda interesará a los lectores versados en estas materias.

IV

Obtención de la función de tensión de los cilindros.

Antes de proceder a su generalización conviene recordar la forma usual de obtener esta importante función, la cual puede utilizarse, no solamente para el estudio de cilindros con distribuciones de fuerzas simétricas alrededor del eje, sino con distribuciones de fuerzas más generales (*).

Se comienza buscando una solución de la forma:

$$\varphi = f(r) \cdot \sin z, \quad [106]$$

de la ecuación $S\varphi = 0$. Reemplazando en esta ecuación el valor de φ anterior, resulta la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$r \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr} - f \cdot r = 0, \quad [107]$$

cuya integral general es conocida.

En efecto, si en la ecuación de Bessel:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad [108]$$

se efectúa el cambio $x = jr$, se llega a la siguiente:

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} - (r^2 + \nu^2) y = 0, \quad [109]$$

la cual coincide con la propuesta [107] para $\nu = 0$.

(*) El estudio de los cilindros fué primeramente iniciado por Lamé y Clapeyron en "Memoire sur l'équilibre interieure des corps solides homogènes", *Journal de Crelle*, volumen 7. Pero quien en realidad encontró por primera vez la solución general de este tipo de problemas fué el Profesor L. Pochhammer, en el año 1876, en su trabajo "Beitrag zur theorie der Biegung des Kreiscylinders", en el volumen 81 del *Journal de Crelle*. Este profesor encontró la solución general del problema de un cilindro circular de longitud infinita, sometido, en su superficie, a un sistema cualquiera de cargas, repetido a intervalos regulares.

La solución encontrada comprendía el caso de los sistemas de cargas no simétricos con respecto al eje del cilindro. Su solución general no es cómoda, excepto en los casos en que pueden detenerse los desarrollos en el tercero o cuarto término, lo cual puede hacerse con una buena aproximación cuando la relación del diámetro a la longitud del cilindro es una cantidad pequeña. A la misma solución llegó, casi simultáneamente, M. C. Chree en "The equations of

Esta última tiene como soluciones particulares las dos funciones de Bessel modificadas, de primera y segunda especies.

La de primera especie es, según sabemos, la siguiente:

$$I_\nu(r) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2K}}{K! \Gamma(\nu+K+1)}, \quad [110]$$

y la de segunda especie, para valores de ν no enteros, es la siguiente:

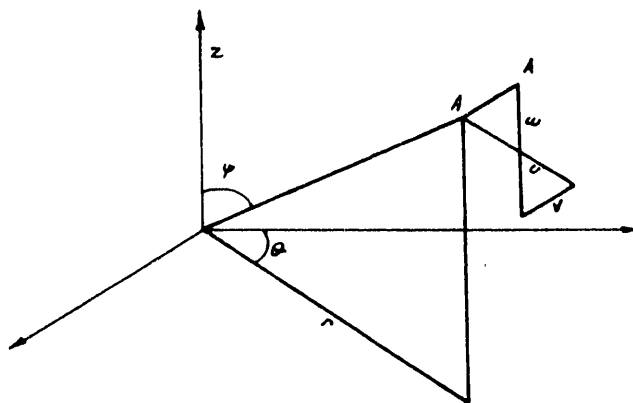
$$K_\nu(r) = \frac{\pi}{2} \times \frac{I_{-\nu}(r) - I_\nu(r)}{\sin \nu \pi}, \quad [111]$$

y cuando el orden ν es igual a n entero:

$$K_n(r) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(r). \quad [112]$$

an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates, their solution and application", *Camb. Phil. Trans.*, volumen 14.

Las primeras aplicaciones prácticas de esta solución general son debidas a L. N. G. Filon, quien, en el trabajo "On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical Systems of Load", en *Phil Trans of the Royal Society of London*, series A, vol. 198, año 1902, estudia y resuelve tres problemas de gran interés práctico.



La solución de Pochhammer-Chree, utilizada por Filon, y que es susceptible de ser ampliada por el presente método, es la relativa a aquellos sistemas de cargas tales que los recorridos tangenciales que originan son independientes de θ (r, θ y ψ son las coordenadas polares esféricas de un punto, u, v y ω , los recorridos radial tangencial y en el sentido del eje z , respectivamente).

Así pues, la integral general buscada de la [107] será:

$$f = a_1 I_0(r) + a_2 K_0(r). \quad [113]$$

Y la solución de la forma [106] de la ecuación $S^2 \varphi = 0$ será, pues, la siguiente:

$$\varphi = [a_1 I_0(r) + a_2 K_0(r)] \text{ sen } z. \quad [114]$$

Se procede de una manera análoga para encontrar soluciones de la misma forma de la ecuación $S^2 \varphi = 0$.

Reemplazando [106] en la ecuación $S^2 \varphi = 0$, se llega a la ecuación de cuarto orden siguiente:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - 1 \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - f \right) = 0, \quad [115]$$

Recordaremos que en esta hipótesis (ver el trabajo citado de L. N. G. Filon) las derivadas $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial w}{\partial r}$ deben satisfacer a la ecuación en derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} \right) = D^2 f = 0. \quad [a]$$

Llamando D al operador del primer paréntesis. Pero es fácil comprobar que entre el operador D y el operador S [41], existe la relación:

$$D \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} S f; \quad [b]$$

y de aquí se deduce:

$$\frac{\partial}{\partial r} S^2 f = D \frac{\partial}{\partial r} S f = D^2 \frac{\partial f}{\partial r}. \quad [c]$$

Por consiguiente, si $S \varphi = 0$, será $D \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ y también, si $S \varphi \neq 0$, $S^2 \varphi = 0$, será:

$$D \frac{\partial \varphi}{\partial r} \neq 0 \quad D^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Así pues, derivando, con respecto a r , las soluciones de las ecuaciones $S \varphi = 0$ y $S^2 \varphi = 0$, obtendremos soluciones de la ecuación [a].

Por lo tanto, la generalización de la función de tensión de los cilindros (solución de $S^2 \varphi = 0$) proporcionará simultáneamente, por simple derivación con respecto a r , una generalización de la función de los recorridos de Filon, solución de la ecuación [a].

La función utilizada por Filon en el trabajo antes mencionado es la siguiente:

$$f = A \cos(Kz + \alpha) I_1(Kr) + B \cos(K\alpha + \beta) K_1(Kr) + C \cos(Kz + \gamma) r I_0(Kr) + D \cos(Kz + \delta) r K_0(Kr) + E z \cos(Kz + \epsilon) I_1(Kr) + F z \cos(Kz + \theta) K_1(Kr), \quad [d]$$

que es fácil comprobar, puede deducirse derivando con respecto a r la [143] cuando $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$.

La función de Filon, generalizada, se obtendrá, como acabamos de decir, derivando con respecto a r la [141], que obtendremos después. En resumen, el presente método nos proporciona nuevos medios para el estudio de los cilindros, en los dos casos de distribución de fuerzas simétricas, con respecto al eje, y no simétrica con recorrido v independiente de θ , debiendo utilizar, en el primero, la función de tensión [141], y en el segundo, la función de recorridos de Filon, obtenida por derivación de la anterior.

la cual tiene como soluciones particulares, además de las dos halladas, $I_0(r)$ y $K_0(r)$, los dos siguientes (*):

$$f = a_3 r I_1(r) + a_4 r K_1(r), \quad [116]$$

que aquí no obtendremos, limitándonos a comprobar que estas funciones satisfacen a la ecuación diferencial.

Para esta comprobación es preciso utilizar las fórmulas de recurrencia siguientes (**):

$$\left. \begin{aligned} -1) \quad I_{v-1}(r) - I_{v+1}(r) &= \frac{2v}{r} I_v(r). \\ -2) \quad K_{v+1}(r) - K_{v-1}(r) &= \frac{2v}{r} K_v(r). \\ -3) \quad r \frac{dI_v(r)}{dr} &= v I_v(r) + r I_{v+1}(r). \\ -4) \quad r \frac{dK_v(r)}{dr} &= v K_v(r) - r K_{v+1}(r). \end{aligned} \right\} \quad [117]$$

En efecto, haciendo uso de [117-3] podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr I_1(r)}{dr} &= I_1(r) + r \frac{dI_1(r)}{dr} = 2 I_1(r) + r I_2(r); \\ \frac{d^2 r I_1(r)}{dr^2} &= 2 I_1(r) + I_2 + r I_2(r) = \frac{2 I_1(r)}{r} + \\ &\quad + 5 I_2(r) + r I_3(r); \end{aligned} \right\} \quad [118]$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r I_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dr I_1(r)}{dr} - r I_1(r) &= \\ = \frac{4 I_1(r)}{r} + 6 I_2(r) + r I_3(r) - r I_1(r) &= 2 I_0(r), \end{aligned} \quad [119]$$

ya que de [117-1] se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4 I_1(r)}{r} &= 2 I_0(r) - 2 I_2(r); \\ r I_3(r) &= r I_1(r) - 4 I_2(r). \end{aligned} \right\} \quad [120]$$

Vemos, pues, que $r I_1(r)$ satisface a la ecuación diferencial de cuarto orden [115].

(*) Estas dos nuevas soluciones particulares suelen obtenerse reduciendo el problema a la solución de una ecuación de segundo orden, aprovechando la forma especial de la ecuación de cuarto, que resulta, como hemos visto, de la aplicación reiterada de un operador, pero pueden también obtenerse de una manera más rápida y sencilla, como luego se verá en nota fuera de texto, utilizando la transformación que en el párrafo siguiente exponemos.

(**) *A treatise on the theory of Bessel Functions*, de G. N. Watson, pág. 79, second edition, Cambridge, 1944.

Análogamente se demuestra, haciendo uso de las [117-2] y [117-4], que $r K_1(r)$ satisface también a la misma ecuación diferencial. Podremos, pues, decir que la solución general de la forma [106] de $S^2 \varphi = 0$ es:

$$\varphi = [a_1 I_0(r) + a_2 K_0(r) + a_3 r I_1(r) + a_4 r K_1(r)] \sin z. \quad [121]$$

Como nada se altera en el proceso de cálculo seguido reemplazando $\cos z$ por $\sin z$, se observa que la ecuación $S^2 \varphi = 0$ es también satisfecha por la función:

$$\varphi = [b_1 I_0(r) + b_2 K_0(r) + b_3 r I_1(r) + b_4 r K_1(r)] \cos z. \quad [122]$$

Para las aplicaciones prácticas es preciso disponer de un mayor número de constantes, lo cual se consigue fácilmente observando que, gracias a la homogeneidad de la ecuación $S^2 \varphi = 0$, si la función $\varphi(r, z)$ la satisface, también lo hará la función $\varphi(qr, qz)$.

Llegamos así, finalmente, a la función de tensión de los cilindros, normalmente usada en las aplicaciones, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi = & [a_1 I_0(qr) + a_2 K_0(qr) + a_3 r I_1(qr) + a_4 r K_1(qr)] \sin z + \\ & [123] \\ & + [b_1 I_0(qr) + b_2 K_0(qr) + b_3 r I_1(qr) + b_4 r K_1(qr)] \cos z. \end{aligned}$$

Haciendo aquí:

$$q = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad [124]$$

siendo l la longitud del cilindro y aplicando el principio de superposición; la función de tensión hallada [123] proporciona, en virtud de las fórmulas [85] sobre la superficie exterior del cilindro, la distribución de fuerzas deseada, expresada por medio de series de Fourier. Generalmente, la convergencia lograda es lenta, lo cual dificulta extraordinariamente las aplicaciones. Las condiciones de sustentación se estudian, como siempre, hallando los recorridos. Estos, se sabe (*), son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} U = - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}; \\ \omega = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-2\nu) S^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]; \end{aligned} \right\} [125]$$

y, por lo tanto, vendrán también expresados por series de Fourier. Cuando se consideran cilindros macizos, como en los estudios de Filon citados, se anulan los coeficientes b_i , ya que, en otro caso, aparecerían tensiones infinitas, pues $K_n(0) = \infty$.

(*) *The Mathematical Theory of Elasticity*, de A. E. H. Love, fourth edition, New York, 1944, pág. 276.

A pesar de la dificultad antes expuesta de la lenta convergencia de las series, la función de tensión [123] ha sido muy utilizada, en la solución de numerosos problemas de tipo práctico, como indicamos en la nota del principio de este epígrafe.

Generalización de la función de tensión de los cilindros.

Comenzaremos demostrando la existencia de otra transformación, que es consecuencia de las anteriormente encontradas, y que nos va a ser muy útil para la generalización buscada.

Supongamos una función φ tal que $L\varphi = 0$. Entonces podremos aplicar a esta función la transformación [38], deduciendo así la nueva función:

$$f_1(R\psi) = R^{-1} \varphi(R_1^{-1} \psi); \quad [126]$$

y según sabemos, será también $L f_1 = 0$. Podremos, por consiguiente, aplicar a esta nueva función la transformación [39], de la que obtendremos la función:

$$f_2(R\psi) = R f_1(R^{-1} \psi) = R^2 \varphi(R\psi); \quad [127]$$

la cual será tal que $L^2 f_2 = 0$.

Pero si hacemos en [18] $q = 2$ y $f = \varphi$, obtenemos:

$$\begin{aligned} L(\varphi R^2) &= 6\varphi + 6R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + B\varphi = \\ &= R^2 L\varphi + 6\varphi + 4R \frac{\partial \varphi}{\partial R}. \end{aligned} \quad [128]$$

Aplicando ahora a los dos miembros el operador L , resulta:

$$L^2(\varphi R^2) = L(R^2 L\varphi) + 6L\varphi + 4L\left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R}\right). \quad [129]$$

Y como acabamos de ver que cuando $L\varphi = 0$ es también $L^2(\varphi R^2) = 0$ de la ecuación anterior, se deduce que en esta hipótesis deberá ser también:

$$L\left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) = 0. \quad [130]$$

Esta nueva transformación es particularmente útil para el fin propuesto, ya que al aplicarla a una función del tipo de las que entran en [123], deja invariante el argumento de las funciones Bessel, como a continuación veremos.

Consideremos ahora, para mayor comodidad, la función de tensión de los cilindros sin la constante q , que introduciremos solamente al final.

Tendremos:

$$\varphi = [a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + a_4 \varphi_4] \operatorname{sen} z + [b_1 \varphi_5 + b_2 \varphi_6 + b_3 \varphi_7 + b_4 \varphi_8] \cos z; \quad [131]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= I_0(r) \operatorname{sen} z & \varphi_2 &= K_0(r) \operatorname{sen} z \\ \varphi_3 &= r I_1(r) \operatorname{sen} z & \varphi_4 &= r K_1(r) \operatorname{sen} z \\ \varphi_5 &= I_0(r) \cos z & \varphi_6 &= K_0(r) \cos z \\ \varphi_7 &= r I_1(r) \cos z & \varphi_8 &= r K_1(r) \cos z. \end{aligned} \right\} \quad [132]$$

De estas ocho funciones solamente las $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$ y φ_6 satisfacen a $L\varphi = 0$.

Partiendo de una cualquiera de estas cuatro funciones, pueden obtenerse tres sucesiones indefinidas distintas de funciones que satisfacen a $L^2\varphi = 0$, y en total, por consiguiente, doce sucesiones. Combinando después linealmente entre sí estas sucesiones, se llega sin dificultad a la función de tensión generalizada.

La aplicación reiterada de la transformación [130] a cada una de las cuatro funciones antes mencionadas, nos proporcionará las cuatro primeras sucesiones de nuevas funciones, que satisfacen a la ecuación $L\varphi = 0$.

Designaremos por φ_{iR} la función obtenida al aplicar la transformación [130] a la φ_i por $\varphi_{i,2R}$ la obtenida, aplicando la misma transformación a la φ_{iR} , etc.

Tendremos, pues, partiendo de la función φ_i , la sucesión de funciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{iR} &= R \frac{\partial \varphi_i}{\partial R}; \\ \varphi_{i,2R} &= R \frac{\partial \varphi_{iR}}{\partial R} = R \frac{\partial \varphi_i}{\partial R} + R^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R^2}; \\ \varphi_{i,3R} &= R \frac{\partial \varphi_{i,2R}}{\partial R} = R \frac{\partial \varphi_i}{\partial R} + 3R^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R^2} + R^3 \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial R^3}; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{i,nR} &= R \frac{\partial \varphi_{i,(n-1)R}}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad [133]$$

Así, por ejemplo, la función φ_1 dará origen a la sucesión de funciones siguientes, las cuales expresamos por medio de las φ_i , utilizando las fórmulas de recurrencia [117] (*):

amos por medio de las φ_i , utilizando las fórmulas de recurrencia [117] (*):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= I_0(r) \operatorname{sen} z = I_0(R \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen}(R \cos \psi); \\ \varphi_{1R} &= R [\operatorname{sen} \psi I'_0(R \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen}(R \cos \psi) + \cos \psi I_0(R \operatorname{sen} \psi) \cos(R \cos \psi)] = r I'_0(r) \operatorname{sen} z + z I_0(r) \cos z = r I_1(r) \operatorname{sen} z + z I_0 \cos z = \\ &= \varphi_3 + z \varphi_5. \\ \varphi_{1,2R} &= R [\operatorname{sen} \psi I_1(R \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen}(R \cos \psi) + \cos \psi I_0(R \operatorname{sen} \psi) \cos(R \cos \psi)] + \\ &+ R^2 [\operatorname{sen}^2 \psi I'_1(R \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen}(R \cos \psi) + 2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi I_1(R \operatorname{sen} \psi) \cos(R \cos \psi) - \\ &- \cos^2 \psi I_0(R \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen}(R \cos \psi)] = \\ &= (r^2 - z^2) I_0(r) \operatorname{sen} z + 2rz I_1(r) \cos z + \\ &+ z I_0(r) \cos z = (r^2 - z^2) \varphi_1 + 2z \varphi_7 + z \varphi_5. \end{aligned} \right\} \quad [134]$$

Igualmente, las otras tres funciones dan origen a las tres sucesiones:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2R} &= -r K_1(r) \operatorname{sen} z + z K_0(r) \cos z = -\varphi_8 + z \varphi_6; \\ \varphi_{2,2R} &= (r^2 - z^2) K_0(r) \operatorname{sen} z - 2rz K_1(r) \cos z + \\ &+ z K_0(r) \cos z = (r^2 - z^2) \varphi_2 - 2z \varphi_8 + z \varphi_6; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{5R} &= r I_1(r) \cos z - z I_0(r) \operatorname{sen} z = \varphi_7 - z \varphi_1; \\ \varphi_{5,2R} &= (r^2 - z^2) I_0(r) \cos z - 2rz I_1(r) \operatorname{sen} z - \\ &- z I_0(r) \operatorname{sen} z = (r^2 - z^2) \varphi_5 - 2z \varphi_3 - z \varphi_1; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{6R} &= -r K_1(r) \cos z - z K_0(r) \operatorname{sen} z = -\varphi_8 - z \varphi_2; \\ \varphi_{6,2R} &= (r^2 - z^2) K_0(r) \cos z + 2rz K_1(r) \operatorname{sen} z - \\ &- z K_0(r) \operatorname{sen} z = (r^2 - z^2) \varphi_6 + 2z \varphi_4 - z \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad [135]$$

Utilizando las fórmulas de recurrencia antes citadas, es fácil comprobar que todas estas funciones satisfacen a la ecuación $L\varphi = 0$. Aplicando a estas sucesiones la propiedad [44], podremos obtener otras cuatro sucesiones de funciones, tales que satisfagan a $L^2\varphi = 0$. En efecto, tendremos, según [44]:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,nR} &= z \varphi_{i(n-1)R}, \\ L \psi_{i(n-1)R} &= 0, \\ L^2 \psi_{i,nR} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad [136]$$

(*) Se comprueba, como antes dijimos, la permanencia en esta transformación del argumento de las funciones Bessel, contrariamente a lo que sucede en las transformaciones [38] y [39].

y las cuatro segundas sucesiones de funciones así obtenidas serán (*):

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1,R} &= z \varphi_1 = z I_0(r) \operatorname{sen} z; \\ \psi_{1,2R} &= z \varphi_{1,R} = z r I_1(r) \operatorname{sen} z + z^2 I_0(r) \cos z = \\ &= z \varphi_3 + z^2 \varphi_5; \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_{2,R} &= z \varphi_2 = z K_0(r) \operatorname{sen} z; \\ \psi_{2,2R} &= z \varphi_{2,R} = z^2 \varphi_0 - z \varphi_8; \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_{5,R} &= z \varphi_5; \\ \psi_{5,2R} &= z \varphi_{5,R} = z \varphi_7 - z^2 \varphi_1; \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_{6,R} &= z \varphi_6; \\ \psi_{6,2R} &= -z \varphi_8 - z^2 \varphi_2. \end{aligned} \right\} [137]$$

El tercer grupo de cuatro sucesiones indefinidas de funciones que satisfacen a $L^2 \varphi = 0$, puede obtenerse aplicando la transformación [127] al primer grupo de series [134] y [135].

En efecto, designando por:

$$\lambda_{i,nR} = (r^2 + z^2) \varphi_{i(n-1)R}, \quad [138]$$

será, según [127]:

$$L^2 \lambda_{i,nR} = 0. \quad [139]$$

Tendremos así el grupo de cuatro sucesiones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,R} &= (r^2 + z^2) \varphi_1; \\ \lambda_{1,2R} &= (r^2 + z^2) \varphi_{1,R} = (r^2 + z^2) \varphi_3 + z(r^2 + z^2) \varphi_5; \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{2,R} &= (r^2 + z^2) \varphi_2; \\ \lambda_{2,2R} &= (r^2 + z^2) (2\varphi_0 - \varphi_8); \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{5,R} &= (r^2 + z^2) \varphi_5; \\ \lambda_{5,2R} &= (r^2 + z^2) (\varphi_7 - z \varphi_1); \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{6,R} &= (r^2 + z^2) \varphi_6; \\ \lambda_{6,2R} &= (r^2 + z^2) (-\varphi_8 - z \varphi_2). \end{aligned} \right\} [140]$$

(*) Se observa que partiendo de las cuatro funciones, φ_1 , φ_2 , φ_6 y φ_8 , se deducen por este método las otras cuatro φ_3 , φ_4 , φ_7 y φ_5 . En efecto, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1,R} - \psi_{5,R} &= \varphi_3. \\ \varphi_{2,R} - \psi_{6,R} &= \varphi_4. \\ \varphi_{5,R} + \psi_{1,R} &= \varphi_7. \\ \varphi_{6,R} + \psi_{2,R} &= -\varphi_8. \end{aligned} \right\}$$

Reemplazando estas funciones en $L^2 \varphi = 0$, se comprueba que $r I_1(r)$ y $r K_1(r)$ son soluciones de la ecuación diferencial [115]. Como ambas son linealmente independientes, son las dos soluciones particulares que faltaban y que indicamos antes podrían obtenerse también por este método.

La función de tensión generalizada, obtenida combinando linealmente las sucesiones de funciones que acabamos de obtener, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi &= F_0(qr) \operatorname{sen} qz + F_1(qr) z \operatorname{sen} qz + F_2(qr) z^2 \operatorname{sen} qz + \dots + \\ &+ f_0(qr) \cos qz + f_1(qr) z \cos qz + f_2(qr) z^2 \cos qz + \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m(qr) z^m \operatorname{sen} qz + \sum_{m=0}^{\infty} f_m(qr) z^m \cos qz \quad [141] \end{aligned}$$

después de la introducción del factor q .

En esta sucesión indefinida se introducen ocho constantes, cuatro en $F_i(r)$ y cuatro en $f_i(r)$ por cada unidad que se eleve el exponente de z .

Veamos la forma de deducir $F_i(r)$ y $f_i(r)$ cuando detenemos el desarrollo en $m = 1$.

Las funciones que entran en $F_i(r)$ y $f_i(r)$ se deducen, como ya dijimos, combinando linealmente las que integran las sucesiones [134], [135], [137] y [140]. Tendremos en este caso:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\varphi_{1,2R} + \lambda_{1,R} - \psi_{5,R}) &= r^2 \varphi_1 + z \varphi_7; \\ \frac{1}{2} (\varphi_{2,2R} + \lambda_{2,R} - \psi_{6,R}) &= r^2 \varphi_2 - z \varphi_8; \\ \frac{1}{2} (\varphi_{5,2R} + \lambda_{5,R} - \psi_{5,R}) &= r^2 \varphi_5 - z \varphi_3; \\ \frac{1}{2} (\varphi_{6,2R} + \lambda_{6,R} - \psi_{6,R}) &= r^2 \varphi_6 + z \varphi_4; \end{aligned} \right\} [142]$$

y estas cuatro funciones, unidas a las ψ_{1R} , ψ_{2R} , ψ_{5R} y ψ_{6R} , componen el grupo de ocho funciones que constituyen las $F_i(r)$ y $f_i(r)$.

Así, pues, la función de tensión en este caso será:

$$\begin{aligned} \varphi &= [a_1 I_0(qr) + a_2 K_0(qr) + a_3 r I_1(qr) + a_4 r K_1(qr) - \\ &- a_7 r^2 I_0(qr) + a_8 r^2 K_0(qr)] \operatorname{sen} qz + \\ &+ [b_1 I_0(qr) + b_2 K_0(qr) + b_3 r I_1(qr) + b_4 r K_1(qr) + \\ &+ b_7 r^2 I_0(qr) - b_8 r^2 K_0(qr)] \cos qz + \\ &+ [a_5 I_0(qr) + a_6 K_0(qr) + a_7 r I_1(qr) + \\ &+ a_8 r K_1(qr)] z \operatorname{sen} qz + \\ &+ [b_5 I_0(qr) + b_6 K_0(qr) + b_7 r I_1(qr) + \\ &+ b_8 r K_1(qr)] z \cos qz. \end{aligned} \quad [143]$$

Se dispone, pues, de dieciséis coeficientes. Deteniendo el desarrollo en $m = 2$, tendríamos veinticuatro coeficientes, y así sucesivamente. Dando a q los valores [124], tendremos, tanto los recorridos como las tensiones, expresadas en series de Fourier. Así,

por ejemplo, deteniendo el desarrollo en $m = 1$, tendríamos:

$$\sigma = \sum A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{e} + \sum B_n \cos \frac{\pi n z}{e} + [144]$$

$$+ z \left[\sum C_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{e} + \sum D_n \cos \frac{n \pi z}{e} \right]$$

y expresiones análogas para los recorridos. Utilizando distintos términos de la función de tensión generalizada aquí obtenida, se pueden resolver nuevos e interesantes problemas en los cilindros.

El proceso de cálculo es largo, aunque no tiene dificultad alguna. Esta nueva función, como indicamos en la nota del epígrafe anterior, puede también servir con ventaja para la resolución de nuevos problemas con distribuciones de fuerzas no simétricas.

Terminamos así este resumen de algunas aplicaciones a problemas espaciales del método de las transformaciones, esperando que pronto una publicación más completa pueda reunir las aplicaciones planas y espaciales, con ejemplos de aplicación práctica en ambas.

ERRATAS ADVERTIDAS EN LOS ARTÍCULOS ANTERIORMENTE PUBLICADOS

	D I C E	D E B E D E C I R
Página 237, fórmula 33	$q = m + 1$	$q = m - 1$
» 239, línea 31, 1. ^a columna.	del mismo tipo de la [53]	del mismo tipo de la [55]
» 241, fórmula 81	$A B^{-1}$	$A R^{-1}$
» 286, última línea, 2. ^a columna.	$d \psi$	$d \theta$
» 287, fórmula 94	$\int_{r=a}^{r=b} 2 \pi r (\sigma_{\psi})_{\psi} = \pi/2 r dr$	$\int_{r=a}^{r=b} 2 \pi r (\sigma_{\psi})_{\psi} = \pi/2 r dr$
	$\frac{-4 A (1 + r)}{E R \operatorname{sen}^2 \psi}$	$\frac{-4 A (1 + \nu)}{E R \operatorname{sen}^2 \psi}$
» 287, fórmula 99	$\frac{4 A (1 + r)}{E R}$	$\frac{4 A (1 + \nu)}{E R}$
» 288 fórmula 104, sustituir por.	$\omega = \int \frac{\partial \omega}{\partial z} dz = \int \frac{\partial \omega}{\partial r} = - \frac{4 A (1 + \nu)}{E} \log \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}}$	