

CALCULO DE PRESAS-BOVEDAS CILINDRICAS DE ESPESOR CONSTANTE

Por JUAN CERDÓ PONS,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un procedimiento de cálculo de presas-bóvedas cilíndricas de espesor constante, inspirado, según indica el mismo, en el método propuesto por R. Vidal para láminas cilíndricas, y que sólo presenta, a su juicio, complicaciones algebraicas.

I. Generalidades.

Como es sabido, una presa-bóveda continua se calcula en la actualidad por dos procedimientos diferentes:

Es el primero la consideración de arcos virtuales empotrados, en los que se supone dividida la estructura por planos horizontales, y el segundo, el procedimiento del "trial load", en el que se supone dividida la estructura en dos sistemas de elementos resistentes: por planos horizontales que limitan arcos empotrados en arranques y por planos verticales que limitan piezas en voladizo, empotradas en la sección inferior; la igualación de las deformaciones en los dos sistemas conduce al conocimiento de la carga soportada por cada elemento y, por tanto, de las tensiones internas del sólido.

Tanto uno como otro sistema adolecen del defecto de que las condiciones reales de trabajo son completamente diferentes de las supuestas en el cálculo, pues en éste no se tiene en cuenta la continuidad del sólido, siendo ésta precisamente una cualidad del mismo que falsea por completo los resultados. Tanto se ha escrito sobre la inexactitud de los dos métodos señalados, que nos creemos relevados del trabajo de demostrarla, y sólo la reseñamos como justificación del tipo de presa y método de cálculo que proponemos.

En los primeros tiempos de construcción de presas-bóvedas, éstas empezaron calculándose por las fórmulas de los tubos, suponiendo el sólido que forma parte de la estructura como un trozo de un tubo o pared de un depósito cilíndrico. Este cálculo, para los primeros ensayos de presas-bóvedas, con alturas reducidas (si bien no resiste un examen elástico no demasiado rigorista), podía aceptarse sin temor; pero al ir avanzando la técnica de su construcción alcanzándose alturas mayores, los errores de la teoría se pusieron de manifiesto (aparte que su aplicación se reducía al caso de valles en U con paredes casi paralelas), y se abandonó el método para dar paso a los dos que mencionamos anteriormente. Es de hacer notar que con este procedimiento se obtenían espesores muy pequeños comparados con las dimensiones de altura y radio de la bóveda, por lo que pueden considerarse estos ensayos como los primeros balbuceos de presa de tipo laminar.

Nada se ha intentado, hasta ahora, para desentrañar el proceso de transmisión de esfuerzos en el sólido que constituye la presa-bóveda, con rigor mayor que el que pueden darnos los procedimientos de su división "virtual" en elementos. Lo único que se ha hecho (al menos, que sepamos) para proyectar una presa-bóveda en la cual el régimen de tensión sea conocido, ha sido adaptar la estructura al cálculo, es decir, crear un sólido cuyo cálculo se conoce. Nos referimos a las presas de anillos independientes ideadas por D. Alfonso Peña.

Estas presas, que juzgamos una de las estructuras más originales e interesantes que se han conocido, adolecen, como es sabido, de la necesidad del establecimiento de juntas horizontales. No queremos decir con ello que sea un defecto difícil de subsanar, ya que la interposición en la junta de rodillos de fibrocemento parece que ha dado un resultado satisfactorio; pero sí creemos que si se pudiera conseguir que el trabajo de una presa-bóveda fuera tan conocido (aunque más complejo), como lo es en las de este tipo, y no fuera necesaria la creación de las juntas, se habría evitado la preocupación que estos puntos débiles tienen que producir forzosamente.

El tipo que proponemos en este trabajo no es más que otro intento de adaptación de la estructura al cálculo. En él se pueden determinar las tensiones con la aproximación que se quiera, mediante el método que exponemos más adelante, y cuya complicación es solamente algébrica, pues la resolución del problema en ecuaciones diferenciales no tiene dificultad ninguna, mediante unos desarrollos en serie convenientes (1).

Se trata simplemente de un sólido limitado por dos superficies cilíndricas coaxiales de eje vertical, que constituyen los paramentos de aguas arriba y aguas abajo; por un plano horizontal a la altura de coronación y por las márgenes del valle en el cual se encaja. La estructura es continua y está empotrada en toda la zona de contacto con las sustentaciones. Por la definición de sus paramentos se deduce la constancia del espesor del sólido. Naturalmente, el

(1) El método está inspirado en el propuesto por R. Vidal para láminas cilíndricas.

terreno de las márgenes puede sustituirse por macizos artificiales, si ello conviene.

Antes de seguir adelante, conviene hacer algunas observaciones acerca de la forma y espesor de la estructura que estudiamos. Su forma cilíndrica dará lugar a las dificultades de encaje en el valle, que presentan estos tipos de presa; ello quiere decir que estas presas tendrán un fácil encaje en aquellos casos de valles en U, y en los otros casos en los que por tener el valle otra forma el encajarla resulte difícil, pueden adoptarse multitud de disposiciones a fin de que resulte factible (adición de macizos supletorios, profundizar las sustentaciones, etc.), de las que puede adoptarse la mejor, mediante un adecuado estudio económico.

La constancia del espesor parece, a primera vista, ilógico, y sin embargo, surge inmediatamente la consideración de que, por ejemplo, la sección inferior no se mueve, y la superior es la que presenta mayores deformaciones en su plano, y de que, siendo máximo el momento de empotramiento en la inferior, es nulo en la superior; existe, por tanto, visto de esta manera burda, una especie de compensación en las tensiones, que hace que el espesor uniforme no se considere disparatado. No quiere esto decir que consideremos la mejor manera de dimensionar la presa el proyectar espesor constante, sino que, como esta condición es fundamental para el desarrollo de su cálculo, la adoptamos sin reservas. Téngase presente que, por ejemplo, en la presa de Pabellón (Méjico), calculada por el método de descomposición en arcos horizontales, y que es una de las más delgadas del mundo, para una altura de 35 m., tiene en su sección inferior un espesor del orden de 2,5 m., y en la superior, otro del orden de 1,25 m. (el talud del paramento aguas abajo es, por tanto, de 0,032). Creemos que este ejemplo, en el que no se tiene en cuenta el aumento (de abajo a arriba) de empujes por la deformación elástica de la estructura, puede justificar en algo el perfil que hemos adoptado.

II. Hipótesis previas.

Para el establecimiento del cálculo de estas presas, partimos de las siguientes hipótesis, de las cuales damos en cada caso la justificación pertinente:

1.^a La presa es un sólido continuo.

La continuidad, sea cual sea el material de que se construya la presa, es una condición fácil de cumplir. Aun en el caso de que el material sea hormigón en masa o armado y haya necesidad, por tanto, de dejar juntas de hormigonado como consecuencia de los fines de jornada de trabajo, pueden dejarse éstas normalmente a los esfuerzos totales de compresión (o de tracción si ha lugar en caso de hormigón armado), y para los efectos de la transmisión de esfuerzos es como si estas soluciones de continuidad no existieran.

2.^a La presa está empotrada en laderas y fondo.

El establecimiento de estos empotramientos no tiene dificultad práctica ninguna.

3.^a El terreno que forma las laderas y fondo tiene un coeficiente de elasticidad infinito.

Esta hipótesis no se cumple en la práctica; pero como la determinación del coeficiente de elasticidad es un problema muy complejo tratándose de rocas, el tener en cuenta en los cálculos unas deformaciones de las mismas, aproximadas muy burdamente, no parece lógico.

Sin embargo, si se quisiera tener en cuenta este efecto, con el método que proponemos puede llegarse a él, por medio de aproximaciones sucesivas, del siguiente modo: se determinan los esfuerzos en los bordes partiendo de la inmovilidad de ellos y se calculan después los recorridos y deformaciones de la roca para estos esfuerzos. Se hace un nuevo cálculo igualando los recorridos de la presa a los calculados anteriormente para las sustentaciones, determinándose así unos nuevos valores de los esfuerzos de borde, que darán lugar a otros recorridos en la roca. Si éstos difieren demasiado de los obtenidos anteriormente, puede hacerse otro cálculo teniendo en cuenta estos últimos recorridos, y así sucesivamente.

4.^a El material que constituye la presa es elástico e isótropo.

Los materiales de construcción que se emplean en la actualidad, dentro de los límites de error considerados en Ingeniería, cumplen estas dos condiciones.

5.^a Se supone que el material sigue la ley de Hooke.

Esta ley es la admitida generalmente en los cálculos elásticos, y nosotros la adoptamos por su mayor sencillez; no obstante el método de cálculo que desarrollamos más adelante, puede llevarse a cabo sin más complicación que la mayor complejidad algébrica, con otras leyes de tensión-deformación.

6.^a Se supone nulo el coeficiente de Poisson.

La anulación de este coeficiente no obedece más que a la conveniencia de simplificar algébricamente los cálculos para la mejor comprensión del método, y ninguna dificultad ofrece tenerlo en cuenta, ya que basta partir de las expresiones $1'$ en vez de las 2 , llegándose a desarrollar el método en la misma forma.

Por otra parte, la influencia del coeficiente de Poisson es pequeña en la mayoría de los casos.

7.^a Se prescinde en el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio interno de las fuerzas de masa. Se supone que éstas se distribuyen con arreglo a las teorías de la Resistencia de Materiales, sumándose después a las tensiones obtenidas para la aplicación de cargas las debidas al peso propio, para tener el estado de tensión del sólido.

Creemos que esta hipótesis es menos errónea que el resolver el problema elástico considerando las fuerzas de masa. Es evidente que si las fuerzas de masa no actuasen hasta que la estructura estuviera construida, entonces el considerar que se reparten las tensiones correspondientes con arreglo a la teoría de

Resistencia de Materiales, entrañaría un error al no poder seguir las zonas de empotramiento en las laderas los recorridos compatibles con la distribución de tensiones apuntada; pero las fuerzas de masa empiezan a actuar desde el momento en que se empieza la construcción, por lo que, a medida que va avanzando ésta, la estructura presenta las deformaciones correspondientes y no es ningún problema insoluble el conseguir con gran aproximación que las deformaciones sean iguales a las del sólido sin coacción lateral. En estas condiciones no hay gran error al considerar el reparto de las tensiones debidas al peso propio en la forma señalada.

8.^a Se admite el principio de Saint-Venant en la sección de coronación.

Este principio se suele admitir siempre en las soluciones elásticas, por lo que nosotros lo admitiremos también sin reservas.

9.^a Aparte del peso propio, se supone que sobre la estructura actúan las siguientes cargas:

a) Carga de agua normal al paramento de aguas arriba y aplicada al mismo.

b) Viento constante en magnitud, actuando normalmente al paramento de aguas abajo y supuesto actuando como una succión sobre el paramento de aguas arriba.

Indicamos aquí la carga de viento, aun a sabiendas de que solamente podrá tener importancia en presas muy delgadas y en el caso de embalse vacío.

El suponer que actúa como succión en el paramento de aguas arriba en vez de presión en el de aguas abajo, es solamente con el fin de aprovechar parte del cálculo relativo a la carga de agua, y dada la pequeñez de la presión, creemos que no introduce demasiado error.

c) Esfuerzos debidos a la temperatura.

III. Cálculo.

Tomamos un sistema de coordenadas cilíndricas, en el cual el eje coincide con el de los paramentos. El origen se toma en el punto de intersección del eje con el plano horizontal de la superficie libre del agua a embalse lleno. Sea z la distancia de un punto cualquiera del sólido al plano horizontal citado, considerando las positiva cuando está más bajo del mismo; sea r la distancia del punto al eje, y sea θ el ángulo que forma el plano vertical definido por el eje y el punto, con un plano origen pasando por el eje. El plano origen de las θ se tomará según la conveniencia de cada caso, considerándose las θ positivas, según el movimiento del reloj.

Las tensiones a considerar serán las siguientes:

s_z = tensión normal dirigida según z . Positiva en tracción.

s_r = tensión normal dirigida según r . Positiva en tracción.

s = tensión normal horizontal situada en el plano tangente a la superficie cilíndrica ideal, con eje en el de origen y que pase por el punto. Positiva en tracción.

t_{rz} = tensión tangencial situada en un plano vertical que pasa por el eje. Positiva cuando en el elemento diferencial en la cara $r=r$ está dirigida hacia arriba y en la cara $r=r+dr$ está dirigida hacia abajo.

$t_{z\theta}$ = tensión tangencial situada en el plano tangente. Positiva cuando en el elemento diferencial en la cara $z=z$ está dirigida hacia la izquierda y para $z=z+dz$ hacia la derecha.

$t_{r\theta}$ = tensión tangencial situada en el plano horizontal que pasa por el punto. Positiva cuando en el elemento diferencial en la cara $\theta=\theta$ está dirigida hacia el eje y para $\theta=\theta+d\theta$ está dirigida en sentido contrario.

Los recorridos a considerar serán:

u = recorrido según z . Positivo hacia abajo.

v = recorrido según r . Positivo alejándose del eje.

w = recorrido según la tangente. Positivo en el mismo sentido que las θ .

El problema se resuelve descomponiéndolo en fases:

1.^a Encontrar una solución general de tensiones y recorridos tal, que haga que s_r , t_{zr} y $t_{r\theta}$ sean nulas en los paramentos de aguas arriba y aguas abajo.

Este problema, que como veremos se resuelve planteando dos ecuaciones cuyo grado depende de la aproximación con que se opere, dará unos ciertos valores de las tensiones y recorridos en función de unas ciertas constantes arbitrarias, cuyo número es igual al doble del grado de las ecuaciones planteadas.

2.^a Encontrar una solución de tensiones y recorridos tal, que haga que en el paramento de aguas abajo las tensiones s_r , t_{zr} y $t_{r\theta}$ sean nulas, y en el paramento de aguas arriba lo sean las t_{zr} y $t_{r\theta}$ y la s_r coincida con la carga de agua (o la de viento, en su caso).

Esta solución dará para las tensiones y recorridos valores perfectamente determinados.

3.^a Hallar una solución de recorridos con tensiones nulas que represente una elevación o disminución de la temperatura, supuesto el sólido libre.

Con esta solución se tendrán unos recorridos perfectamente determinados.

4.^a Sumar las tensiones y recorridos de las fases primera y segunda, e integrar las tensiones a lo largo del espesor para tener los esfuerzos normales y tan-

genciales y los momentos flectores y de torsión totales en cada sección. Estos valores vendrán en funciones lineales de las constantes arbitrarias, cuya determinación se hace como a continuación se indica.

Para que la solución de tensiones sea compatible con las sustentaciones, es necesario: a) Que en la sección superior sean nulas las tensiones s_z , t_{zr} , $t_{z\theta}$. b) Que en toda la zona de contacto con el cauce, sean nulos los recorridos u , v , w , y los giros correspondientes.

Nosotros sustituimos estas condiciones por las siguientes:

a) Que en la sección superior sean nulos los momentos flectores y de torsión y el esfuerzo normal y los tangenciales correspondientes a esta sección. b) Que en ciertos puntos de la superficie de contacto con el lecho y márgenes del río, los recorridos y los giros sean nulos.

Las dos condiciones que imponemos, como se ve, no son las exactas, pero con ellas se puede aproximar cuanto se quiera la solución con sólo elevar el grado de la ecuación de que hacemos referencia en la primera fase, pues se eleva simultáneamente el número de constantes arbitrarias, y con él, el número de condiciones que podemos imponer.

La primera condición impuesta equivale a aplicar el principio de Saint-Venant, que consideramos aceptado y, por tanto, no discutiremos su aplicación.

La segunda condición se aplicará para el número de puntos que el número de constantes nos permita. Naturalmente que, a mayor número de éstas, mayor exactitud entrañará la solución.

El modo de operar va a ser el siguiente: Como resultado de la aproximación con que operemos, plantearemos unas ecuaciones de un cierto grado.

Las constantes arbitrarias se determinarán aplicando la condición primera, a la sección superior, y la segunda, a ciertos puntos en contacto con las sustentaciones. Conocidas estas constantes, la solución elástica está perfectamente determinada y podrán hallarse los lugares geométricos de los puntos que tengan uno de los recorridos o uno de los giros nulos. Estos lugares geométricos serán superficies que pasarán por los puntos que hemos considerado para la determinación de las constantes, que no coincidirán, en general, con la superficie de sustentación, pero que si la distancia entre ellas (medida según z , según r o según θ) es menor que el error con que se suministran los datos, pueden considerarse coincidentes y, por tanto, exacta la solución encontrada. En el caso de que las distancias fueran mayores, hay que buscar una solución más aproximada, elevando el grado de las ecuaciones y anulando los recorridos y los giros en mayor número de puntos. Es evidente que de cada

vez las dos superficies diferirán menos y, por tanto, debe llegarse a la aproximación deseada.

La elección de los puntos que se consideren fijos debe ser cuidadosa, así como los recorridos lineales y angulares que deban considerarse nulos en ellos, pues de la acertada distribución de estos puntos y recorridos depende el que se llegue más pronto a la solución.

5.^a Sumar las tensiones y recorridos de la primera y tercera fases, y operar en igual forma que se hizo en la cuarta.

6.^a Sumar las soluciones de la cuarta y quinta fases para tener las sollicitaciones más desfavorables, y comprobar con ellas la estructura.

A continuación desarrollamos el método de cálculo hasta donde es posible, sin complicar demasiado la exposición, prescindiendo de transformaciones y cálculos intermedios.

Ecuaciones de equilibrio interno en tensiones.

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds_z}{dz} + \frac{dt_{zr}}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dt_{z\theta}}{d\theta} + t_{zr} \right) &= 0; \\ \frac{dt_{zr}}{dz} + \frac{ds_r}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{dt_{r\theta}}{d\theta} + s_r - s_\theta \right) &= 0; \\ \frac{dt_{z\theta}}{dz} + \frac{dt_{r\theta}}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{ds_\theta}{d\theta} + t_{r\theta} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Tensiones en función de recorridos.

$$\left. \begin{aligned} s_z &= \lambda \rho + 2G \frac{du}{dz}; \\ s_r &= \lambda \rho + 2G \frac{dv}{dr}; \\ s_\theta &= \lambda \rho + 2G \left(\frac{dw}{r d\theta} + \frac{v}{r} \right); \\ t_{r\theta} &= G \left(\frac{dw}{dr} + \frac{dv}{r d\theta} - \frac{w}{r} \right); \\ t_{z\theta} &= G \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{r d\theta} \right); \\ t_{zr} &= G \left(\frac{dv}{dz} + \frac{du}{dr} \right); \end{aligned} \right\} \quad [1']$$

siendo:

E = módulo de elasticidad.

ν = coeficiente de Poisson.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\rho = \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dr} + \frac{dw}{r d\theta} + \frac{v}{r};$$

con $v = 0$, las expresiones [1'] se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} s_z &= E \frac{du}{dz}; \\ s_r &= E \frac{dv}{dr}; \\ s_\theta &= E \left(\frac{dw}{r d\theta} + \frac{v}{r} \right); \\ t_{r\theta} &= \frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dr} + \frac{dv}{r d\theta} - \frac{w}{r} \right); \\ t_{z\theta} &= \frac{E}{2} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{du}{r d\theta} \right); \\ t_{zr} &= \frac{E}{2} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} [2]$$

Sustituyendo las expresiones [2] en las ecuaciones [1], se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d^2 u}{r^2 d\theta^2} + \frac{du}{r dr} + \\ + \frac{d^2 v}{dz dr} + \frac{dv}{r dz} + \frac{d^2 w}{r dz d\theta} = 0; \\ \frac{d^2 u}{dz dr} + \frac{d^2 v}{dz^2} + 2 \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{d^2 v}{r^2 d\theta^2} + \\ + 2 \frac{dv}{r dr} + \frac{d^2 w}{r dr d\theta} - 3 \frac{dw}{r^2 d\theta} - \\ - 2 \frac{v}{r^2} = 0; \\ \frac{d^2 u}{r dz d\theta} + \frac{d^2 v}{r dz d\theta} + 2 \frac{dv}{r^2 d\theta} + \\ + \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{r^2 d\theta^2} = 0. \end{aligned} \right\} [3]$$

Ensayamos la solución de recorridos:

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{\frac{x}{R}} U \cos n\theta + e^{\frac{y}{R}} T \sin n\theta; \\ v &= e^{\frac{x}{R}} V \cos n\theta + e^{\frac{y}{R}} Q \sin n\theta; \\ w &= e^{\frac{x}{R}} W \sin n\theta + e^{\frac{y}{R}} S \cos n\theta; \end{aligned} \right\} [4]$$

donde x e y son constantes adimensionales; n , un número entero, y R , el radio del paramento de aguas abajo.

Los valores U, T, V, Q, W, S , son funciones de r solamente.

Sustituyendo los valores [4] en las ecuaciones [3], haciendo el cambio de variable $r = R(1+h)$ y teniendo en cuenta que las ecuaciones deben ser

idénticamente nulas en θ (ya que deben verificarse para cualquier valor de θ), se tienen los dos sistemas siguientes, en los que se han suprimido ya factores comunes:

$$\left. \begin{aligned} \left(2x^2 - \frac{n^2}{(1+h)^2} \right) U + \frac{1}{1+h} \frac{dU}{dh} + \frac{d^2 U}{dh^2} + \\ + x \frac{dV}{dh} + x \frac{V}{1+h} + x n \frac{W}{1+h} = 0; \\ x \frac{dU}{dh} + \left(x^2 - \frac{n^2+2}{(1+h)^2} \right) V + \frac{2}{1+h} \frac{dV}{dh} + \\ + 2 \frac{d^2 V}{dh^2} + \frac{n}{1+h} \frac{dW}{dh} - 3n \frac{W}{(1+h)^2} = 0; \\ x n \frac{U}{1+h} + 2n \frac{V}{(1+h)^2} + \frac{n}{1+h} \frac{dV}{dh} - \\ - \left(x^2 - \frac{2n^2}{(1+h)^2} \right) W - \frac{d^2 W}{dh^2} = 0. \end{aligned} \right\} [5]$$

$$\left. \begin{aligned} \left(2y^2 - \frac{n^2}{(1+h)^2} \right) T + \frac{1}{1+h} \frac{dT}{dh} + \frac{d^2 T}{dh^2} + \\ + y \frac{dQ}{dh} + y \frac{Q}{1+h} - n y \frac{S}{1+h} = 0; \\ y \frac{dT}{dh} + \left(y^2 - \frac{n^2+2}{(1+h)^2} \right) Q + \frac{2}{1+h} \frac{dQ}{dh} + \\ + 2 \frac{d^2 Q}{dh^2} + 3n \frac{S}{(1+h)^2} - \frac{n}{(1+h)} \frac{dS}{dh} = 0; \\ n y \frac{T}{1+h} + 2n \frac{Q}{(1+h)^2} + \frac{n}{1+h} \frac{dQ}{dh} + \\ + \left(y^2 - \frac{2n^2}{(1+h)^2} \right) S + \frac{d^2 S}{dh^2} = 0. \end{aligned} \right\} [6]$$

Ahora bien: U, T, V, Q, W, S , son funciones de r y, por tanto, de h . Admitirán, pues, un desarrollo en serie potencial de h , con coeficientes constantes, uniformemente convergentes para todo valor de h menos que la unidad, o sea:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 h + U_2 h^2 + U_3 h^3 + \dots \\ V &= V_0 + V_1 h + V_2 h^2 + V_3 h^3 + \dots \\ W &= W_0 + W_1 h + W_2 h^2 + W_3 h^3 + \dots \\ T &= T_0 + T_1 h + T_2 h^2 + T_3 h^3 + \dots \\ Q &= Q_0 + Q_1 h + Q_2 h^2 + Q_3 h^3 + \dots \\ S &= S_0 + S_1 h + S_2 h^2 + S_3 h^3 + \dots \end{aligned} \right\} [7]$$

Por otra parte, $\frac{1}{1+h}$ y $\frac{1}{(1+h)^2}$ se desarrollan en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + \dots \\ \frac{1}{(1+h)^2} &= 1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + \dots \end{aligned} \right\} [8]$$

Vamos a ver ahora que, cualquiera que sea la potencia en que nos detengamos al considerar el desarrollo [7] y [8], todos los coeficientes que entran en los [7] se pueden determinar perfectamente en función de los dos primeros de cada desarrollo. En efecto: Al sustituirlos en los sistemas [5] y [6], deteniéndonos en los términos de grado p , obtenemos seis ecuaciones con $p + 1$ términos en cada una, que tienen que ser idénticamente nulas, ya que se tienen que verificar para cualquier valor de h , o sea que en total tenemos $6(p + 1)$ ecuaciones entre los coefi-

cientes, y como en total tenemos que determinar $6(p + 3)$ de ellos (téngase en cuenta que entran las derivadas segundas), nos quedan indeterminados sólo 12, que tomamos los dos primeros de cada desarrollo.

Más adelante veremos cómo se pueden determinar estos 12 coeficientes.

Sustituyendo los valores [7] y [8] en los sistemas [5] y [6] y haciendo idénticamente nulas las ecuaciones, obtenemos los sistemas siguientes:

$$\begin{aligned}
 & (2x^2 - n^2)U_0 + xV_0 + nxW_0 + U_1 + xV_1 + 2U_2 = 0. \\
 & (x^2 - n^2 - 2)V_0 - 3nW_0 + xU_1 + 2V_1 + nW_1 + 4V_2 = 0. \\
 & -n^2xU_0 - 2nV_0 + (x^2 - 2n^2)W_0 - nV_1 + 2W_2 = 0. \\
 & 2n^2U_0 - xV_0 - nxW_0 + (2x^2 - n^2 - 1)U_1 + xV_1 + nxW_1 + 2U_2 + 2xV_2 + 6U_3 = 0. \\
 & (2n^2 + 4)V_0 + 6nW_0 + (x^2 - n^2 - 4)V_1 - 4nW_1 + 2xU_2 + 4V_2 + 2nW_2 + 12V_3 = 0. \\
 & nxU_0 + 4nV_0 + 4n^2W_0 - nxU_1 - nV_1 + (x^2 - 2n^2)W_1 - 2nV_2 + 6W_3 = 0. \\
 & -3n^2U_0 + xV_0 + nxW_0 + (2n^2 + 1)U_1 - xV_1 - nxW_1 + (2x^2 - n^2 - 2)U_2 + xV_2 + \\
 & \quad + nxW_2 + 3U_3 + 3xV_3 + 12U_4 = 0. \\
 & -3(n^2 + 2)V_0 - 9nW_0 + (2n^2 + 6)V_1 + 7nW_1 + (x^2 - n^2 - 6)V_2 - 5nW_2 + 3xU_3 + 6V_3 + \\
 & \quad + 3nW_3 + 24V_4 = 0. \\
 & -nxU_0 - 6nV_0 - 6n^2W_0 + nxU_1 + 3nV_1 + 4n^2W_1 - nxU_2 + (x^2 - 2n^2)W_2 - 3nV_3 + \\
 & \quad + 12W_4 = 0. \\
 & 4n^2U_0 - xV_0 - nxW_0 - (3n^2 + 1)U_1 + xV_1 + nxW_1 + (2n^2 + 2)U_2 - xV_2 - nxW_2 + (2x^2 - \\
 & \quad - n^2 - 3)U_3 + xV_3 + nxW_3 + 4U_4 + 4xV_4 + 20U_5 = 0. \\
 & 4(n^2 + 2)V_0 + 12nW_0 - (3n^2 + 8)V_1 - 10nW_1 + (2n^2 + 8)V_2 + 8nW_2 + (x^2 - n^2 - 8)V_3 - 6nW_3 + \\
 & \quad + 4xU_4 + 8V_4 + 4nW_4 + 40V_5 = 0. \\
 & nxU_0 + 8nV_0 + 8n^2W_0 - nxU_1 - 5nV_1 - 6n^2W_1 + nxU_2 + 2nV_2 + 4n^2W_2 - nxU_3 + nV_2 + \\
 & \quad + (x^2 - 2n^2)W_3 - 4nV_4 + 20W_5 = 0. \\
 & \dots \dots \dots \\
 & (2y^2 - n^2)T_0 + yQ_0 - nyS_0 + T_1 + yQ_1 + 2T_2 = 0. \\
 & (y^2 - n^2 - 2)Q_0 + 3nS_0 + yT_1 + 2Q_1 - nS_1 + 4Q_2 = 0. \\
 & nyT_0 + 2nQ_0 + (y^2 + 2n^2)S_0 + nQ_1 + 2S_2 = 0. \\
 & 2n^2T_0 - yQ_0 + nyS_0 + (2y^2 - n^2 - 1)T_1 + yQ_1 - nyS_1 + 2T_2 + 2yQ_2 + 6T_3 = 0. \\
 & (2n^2 + 4)Q_0 - 6nS_0 + (y^2 - n^2 - 4)Q_1 + 4nS_1 + 2yT_2 + 4Q_2 - 2nS_2 + 12Q_3 = 0. \\
 & -nyT_0 - 4nQ_0 + 4n^2S_0 + nyT_1 + nQ_1 + (y^2 - 2n^2)S_1 + 2nQ_2 + 6S_3 = 0. \\
 & -3n^2T_0 + yQ_0 - nyS_0 + (2n^2 + 1)T_1 - yQ_1 + nyS_1 + (2y^2 - n^2 - 2)T_2 + yQ_2 - nyS_2 + 3T_3 + \\
 & \quad + 3yQ_3 + 12T_4 = 0. \\
 & -(3n^2 + 6)Q_0 + 9nS_0 + (2n^2 + 6)Q_1 - 7nS_1 + (y^2 - n^2 - 6)Q_2 + 5nS_2 + 3yT_3 + 6Q_3 - 3nS_3 + \\
 & \quad + 24Q_4 = 0. \\
 & nyT_0 + 6nQ_0 - 6n^2S_0 - nyT_1 - 3nQ_1 + 4n^2S_1 + nyT_2 + (y^2 - 2n^2)S_2 + 3nQ_3 + 12S_4 = 0. \\
 & 4n^2T_0 - yQ_0 + nyS_0 - (3n^2 + 1)T_1 + yQ_1 - nyS_1 + (2n^2 + 2)T_2 - yQ_2 + nyS_2 + (2y^2 - n^2 - \\
 & \quad - 3)T_3 + yQ_3 - nyS_3 + 4T_4 + 4yQ_4 + 20T_5 = 0. \\
 & (4n^2 + 8)Q_0 - 12nS_0 - (3n^2 + 8)Q_1 + 10nS_1 + (2n^2 + 8)Q_2 - 8nS_2 + (y^2 - n^2 - 8)Q_3 + 6nS_3 + \\
 & \quad + 4yT_4 + 8Q_4 - 4nS_4 + 40Q_5 = 0. \\
 & -nyT_0 - 8nQ_0 + 8n^2S_0 + nyT_1 + 5nQ_1 - 6n^2S_1 - nyT_2 - 2nQ_2 + 4n^2S_2 + nyT_3 - nQ_3 + \\
 & \quad + (y^2 - 2n^2)S_3 + 4nQ_4 + 20S_5 = 0. \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & (2y^2 - n^2)T_0 + yQ_0 - nyS_0 + T_1 + yQ_1 + 2T_2 = 0. \\
 & (y^2 - n^2 - 2)Q_0 + 3nS_0 + yT_1 + 2Q_1 - nS_1 + 4Q_2 = 0. \\
 & nyT_0 + 2nQ_0 + (y^2 + 2n^2)S_0 + nQ_1 + 2S_2 = 0. \\
 & 2n^2T_0 - yQ_0 + nyS_0 + (2y^2 - n^2 - 1)T_1 + yQ_1 - nyS_1 + 2T_2 + 2yQ_2 + 6T_3 = 0. \\
 & (2n^2 + 4)Q_0 - 6nS_0 + (y^2 - n^2 - 4)Q_1 + 4nS_1 + 2yT_2 + 4Q_2 - 2nS_2 + 12Q_3 = 0. \\
 & -nyT_0 - 4nQ_0 + 4n^2S_0 + nyT_1 + nQ_1 + (y^2 - 2n^2)S_1 + 2nQ_2 + 6S_3 = 0. \\
 & -3n^2T_0 + yQ_0 - nyS_0 + (2n^2 + 1)T_1 - yQ_1 + nyS_1 + (2y^2 - n^2 - 2)T_2 + yQ_2 - nyS_2 + 3T_3 + \\
 & \quad + 3yQ_3 + 12T_4 = 0. \\
 & -(3n^2 + 6)Q_0 + 9nS_0 + (2n^2 + 6)Q_1 - 7nS_1 + (y^2 - n^2 - 6)Q_2 + 5nS_2 + 3yT_3 + 6Q_3 - 3nS_3 + \\
 & \quad + 24Q_4 = 0. \\
 & nyT_0 + 6nQ_0 - 6n^2S_0 - nyT_1 - 3nQ_1 + 4n^2S_1 + nyT_2 + (y^2 - 2n^2)S_2 + 3nQ_3 + 12S_4 = 0. \\
 & 4n^2T_0 - yQ_0 + nyS_0 - (3n^2 + 1)T_1 + yQ_1 - nyS_1 + (2n^2 + 2)T_2 - yQ_2 + nyS_2 + (2y^2 - n^2 - \\
 & \quad - 3)T_3 + yQ_3 - nyS_3 + 4T_4 + 4yQ_4 + 20T_5 = 0. \\
 & (4n^2 + 8)Q_0 - 12nS_0 - (3n^2 + 8)Q_1 + 10nS_1 + (2n^2 + 8)Q_2 - 8nS_2 + (y^2 - n^2 - 8)Q_3 + 6nS_3 + \\
 & \quad + 4yT_4 + 8Q_4 - 4nS_4 + 40Q_5 = 0. \\
 & -nyT_0 - 8nQ_0 + 8n^2S_0 + nyT_1 + 5nQ_1 - 6n^2S_1 - nyT_2 - 2nQ_2 + 4n^2S_2 + nyT_3 - nQ_3 + \\
 & \quad + (y^2 - 2n^2)S_3 + 4nQ_4 + 20S_5 = 0. \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

La forma de estos sistemas permite el cálculo sucesivo de los coeficientes. Sustituyendo ahora los desarrollos [7] y [8] en las expresiones [4], y éstas en las [2], los valores de S_r , $t_{r\theta}$ y t_{rz} son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \frac{E}{R} \left[e^{x \frac{z}{R}} (V_1 + 2 V_2 h + 3 V_3 h^2 + \dots) \cos n \theta + e^{y \frac{z}{R}} (Q_1 + 2 Q_2 h + \right. \\ &\quad \left. + 3 Q_3 h^2 + \dots) \sin n \theta \right] \\ t_{r\theta} &= \frac{E}{R} \left[e^{x \frac{z}{R}} ((W_1 - W_0 - n V_0) + (2 W_2 - W_1 + W_0 - n (V_1 - V_0)) h + \dots) \cos n \theta + \right. \\ &\quad \left. + e^{y \frac{z}{R}} ((S_1 - S_0 - n Q_0) + (2 S_2 - S_1 + S_0 + n (Q_1 - Q_0)) h + \dots) \sin n \theta \right] \\ t_{rz} &= \frac{E}{2R} \left[e^{x \frac{z}{R}} ((x V_0 + U_1) + (x V_1 + 2 U_2) h + \dots) \cos n \theta + e^{y \frac{z}{R}} ((y Q_0 + T_1) + \right. \\ &\quad \left. + (y Q_1 + 2 T_2) h + \dots) \sin n \theta \right] \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

Como para $h=0$ debe verificarse $s_r = t_{r\theta} = t_{rz} = 0$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -x V_0; & T_1 &= -y Q_0; \\ V_1 &= 0; & Q_1 &= 0; \\ W_1 &= n V_0 + W_0; & S_1 &= -n Q_0 + S_0 \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

Sustituyendo los valores [12] en las ecuaciones [9] y [10], de ellas se deducen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} [(n^2 - 2 x^2) U_0 - n x W_0] \\ V_2 &= \frac{1}{2} [V_0 + n W_0] \\ W_2 &= \frac{1}{2} [n x U_0 + 2 n V_0 - (x^2 - 2 n^2) W_0] \\ U_4 &= \frac{1}{6} [(2 x^2 - 3 n^2) U_0 + (2 x^3 - 2 n^2 x - x) V_0] \\ V_3 &= \frac{1}{6} [(x^3 - n^2 x) U_0 - 3 V_0 - (n^3 - n x^2 + 2 n) W_0] \\ W_3 &= \frac{1}{6} [-n x U_0 - (2 n x^2 - 2 n^3 + 3 n) V_0 - (x^2 + n^2) W_0] \\ U_4 &= \frac{1}{24} [(3 x^4 - 4 n^2 x^2 - 6 x^2 + n^4 + 11 n^2) U_0 + \\ &\quad + (-2 x^3 + 6 n^2 x + 3 x) V_0 + \\ &\quad + (2 n x^3 - 2 n^3 x - n x) W_0] \\ V_4 &= \frac{1}{48} [(11 n^2 x - 4 x^3) U_0 - (2 x^4 - 4 n^2 x^2 + 2 n^4 - \\ &\quad - 6 n^2 - 24) V_0 - (7 n x^2 - 14 n^3 - 14 n) W_0] \\ W_4 &= \frac{1}{24} [(2 n^3 x + 2 n x - 2 n x^3) U_0 - (4 n^3 - \\ &\quad - 9 n) V_0 + (x^4 - 4 n^2 x^2 + 3 n^4 - 2 n^2) W_0] \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} [(n^2 - 2 y^2) T_0 + n y S_0] \\ Q_2 &= \frac{1}{2} [Q_0 - n S_0] \\ S_2 &= \frac{1}{2} [-n y T_0 - 2 n Q_0 - (y^2 - 2 n^2) S_0] \\ T_3 &= \frac{1}{6} [(2 y^2 - 3 n^2) T_0 + (2 y^3 - 2 n^2 y - y) Q_0] \\ Q_3 &= \frac{1}{6} [(y^3 - n^2 y) T_0 - 3 Q_0 - (n y^2 - n^3 - \\ &\quad - 2 n) S_0] \\ S_3 &= \frac{1}{6} [n y T_0 + (2 n y^2 - 2 n^3 + 3 n) Q_0 - \\ &\quad - (y^2 + n^2) S_0] \\ T_4 &= \frac{1}{24} [(3 y^4 - 4 n^2 y^2 - 6 y^2 + n^4 + 11 n^2) T_0 - \\ &\quad - (2 y^3 - 6 n^2 y - 3 y) Q_0 - (2 n y^3 - \\ &\quad - 2 n^3 y - n y) S_0] \\ Q_4 &= \frac{1}{48} [(11 n^2 y - 4 y^3) T_0 - (2 y^4 - 4 n^2 y^2 + \\ &\quad + 2 n^4 - 6 n^2 - 24) Q_0 + (7 n y^2 - \\ &\quad - n^2 - 14 n) S_0] \\ S_4 &= \frac{1}{24} [(2 n y^3 - 2 n^3 y - 2 n y) T_0 + (4 n^3 - \\ &\quad - 9 n) Q_0 + (y^4 - 4 n^2 y^2 + 3 n^4 + \\ &\quad + 2 n^2) S_0] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

Sustituyendo los valores [12], [13] y [14] en los desarrollos [7] y [8], y éstos en las expresiones [4] y [2], tendremos el estado general del sólido con cargas nulas en el paramento $h=0$.

Primera fase.— Las expresiones de las tensiones s_r , t_{rz} , $t_{r\theta}$, en el caso que acabamos de estudiar,

con tensiones nulas en el paramento de aguas abajo, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 s_r = & \frac{E}{R} e^{\frac{x}{R}} \cos n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} +V_0 & h + \frac{1}{2}(x^3 - n^2 x) U_0 & h^2 + \dots \\ +nW_0 & -\frac{3}{2}V_0 & \\ -\frac{1}{2}(n^3 - nx^2 + 2n)W_0 & & \end{array} \right] + \\
 & + \frac{E}{R} e^{\frac{y}{R}} \sin n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} +Q_0 & h + \frac{1}{2}(y^3 - n^2 y) T_0 & h^2 + \dots \\ -nS_0 & -\frac{3}{2}Q_0 & \\ -\frac{1}{2}(ny^2 - n^3 - 2n)S_0 & & \end{array} \right] \\
 t_{rz} = & \frac{E}{2R} e^{\frac{x}{R}} \cos n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} (n^2 - 2x^2)U_0 & h + \frac{1}{2}(2x^2 - 3n^2)U_0 & h^2 + \dots \\ -nxW_0 & +\frac{1}{2}(2x^3 - 2n^2x)V_0 & \\ & +\frac{1}{2}nxW_0 & \end{array} \right] + \\
 & + \frac{E}{R} e^{\frac{y}{R}} \sin n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} (n^2 - 2y^2)T_0 & h + \frac{1}{2}(2y^2 - 3n^2)T_0 & h^2 + \dots \\ +nyS_0 & +\frac{1}{2}(2y^3 - 2n^2y)Q_0 & \\ & -\frac{1}{2}nyS_0 & \end{array} \right] \\
 t_{r\theta} = & \frac{E}{2R} e^{\frac{x}{R}} \sin n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} +nxU_0 & h - nxU_0 & h^2 + \dots \\ +2nV_0 & -(nx^2 - n^3 + 3n)V_0 & \\ -(x^2 - 2n^2)W_0 & -2n^2W_0 & \end{array} \right] + \\
 & + \frac{E}{2R} e^{\frac{y}{R}} \cos n\theta \left[\begin{array}{c|c|c} -nyT_0 & h + nyT_0 & h^2 + \dots \\ -2nQ_0 & +(y^2n - n^3 + 3n)Q_0 & \\ -(y^2 - 2n^2)S_0 & -2n^2S_0 & \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{15}$$

Si $h = H$ es la ecuación del paramento de aguas arriba, los valores de s_r , t_{rz} , $t_{r\theta}$, en este paramento, se tendrán substituyendo en las expresiones [15] h por H . Como estas tensiones tienen que ser nulas en este paramento, se tendrán dos sistemas de tres ecuaciones y cuyas incógnitas son U_0 , V_0 , W_0 , T_0 , Q_0 y S_0 .

Estos sistemas son homogéneos, y para que tengan solución distinta de cero, será necesario que los determinantes de los coeficientes en los dos sistemas sean nulos. Estas condiciones de compatibilidad darán lugar al planteamiento de una ecuación en x y otra

en y , cuyos grados son iguales al cuádruplo del exponente de la potencia de h , en la cual hayamos detenido los desarrollos.

No desarrollaremos estas ecuaciones, pues en el estudio general que nos ocupa no es necesario, y que se desarrollarán, posiblemente, más cómodamente en cada caso particular. Tampoco dilucidaremos aquí si sus raíces son imaginarias o reales, pues, como veremos, podemos seguir el desarrollo tanto en un caso como en otro.

Cada una de las raíces de estas ecuaciones da una solución elástica distinta, pues substituyendo su valor

en el sistema deducido de las expresiones [15], tendremos los valores de U_0 , V_0 , etc., en función de dos de ellos (uno de cada grupo), y ya con ellos todos los demás coeficientes, por las expresiones [13] y [14]. La solución elástica general se tendrá sumando los productos de las soluciones particulares por constantes arbitrarias. Si las raíces son reales, no hace falta decir más; si son imaginarias, es de hacer notar que la solución que dé una raíz será imaginaria, conjugada con la que dé la raíz imaginaria conjugada de la considerada, o sea: que la solución elástica general será la suma de las partes reales o imaginarias de cada solución elástica particular, afectada de constantes arbitrarias.

Con la expresión de tensiones y recorridos en esta forma, se termina la primera fase.

Segunda fase. — a) Carga de agua:

Las expresiones de las tensiones t_{xy} , t_{yz} , s_x , tales que sean nulas para $h = 0$, siguen siendo las [15]. Sabemos que la carga de agua se expresa:

$$p_a = -z.$$

Por otra parte, la expresión

$$\frac{\operatorname{sen} K \frac{z}{l}}{K \frac{z}{l}}$$

tiene por límite la unidad cuando $K \frac{z}{l}$ tiende hacia cero.

Por tanto, si l representa la altura de la presa, el máximo valor de $\frac{z}{l}$ es la unidad, o sea que el máximo valor de $K \frac{z}{l}$ es K . Siempre podemos escoger una K tal que haga que el error cometido al sustituir K por $\operatorname{sen} K$ sea menor que una cantidad dada, por pequeña que ésta sea. En estas condiciones, podemos escribir para la carga de agua:

$$p_a = -\frac{l}{K} \operatorname{sen} K \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R}.$$

Por otra parte, se sabe que:

$$1 = \frac{4}{\pi} \cos \theta - \frac{4}{3\pi} \cos 3\theta + \frac{4}{5\pi} \cos 5\theta + \dots$$

o sea, que puede ponerse:

$$p_a = -\sum \frac{4l}{nK\pi} \operatorname{sen} K \cdot \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} \cos n\theta,$$

siendo $n = 1, 3, 5, \dots$

Además, como

$$\operatorname{sen} K \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} = \frac{e^{K \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} i} - e^{-K \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} i}}{2i}.$$

puede sustituirse $x = \pm i K \frac{R}{l}$ en las expresiones [15], así como h por H y restar las dos soluciones.

Entonces, para cada valor de n pueden identificarse las expresiones [15] con las cargas aplicadas y se hallarán así los valores de los coeficientes y, por tanto, los de las tensiones y recorridos.

Es de hacer notar que de esta forma se tendrán dos sistemas: uno, homogéneo, en T_0 , Q_0 y S_0 , y otro, no homogéneo, en U_0 , V_0 y W_0 . Este último dará para los coeficientes valores no nulos en general, pero el primer sistema dará $T_0 = Q_0 = S_0 = 0$, ya que, como es el mismo que el obtenido en la primera fase, si considerásemos otros valores para T_0 , Q_0 y S_0 distintos de cero, ello equivaldría a recaer en las soluciones elásticas de la primera fase, que ya se han tenido en cuenta.

b) Carga de viento:

Como el viento es constante, se tendrá:

$$p_v = C,$$

pudiéndose desarrollar en serie doble de Fourier, es decir:

$$p_v = \sum C \times \frac{l^6}{p n \pi^2} \cos \frac{p \pi z}{2l} \cos n \theta;$$

siendo:

$$\begin{array}{lll} n = 1, & -3, & 5 \dots \\ p = 1, & -3, & 5 \dots \end{array}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos \frac{p \pi}{2} \cdot \frac{z}{l} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{p \pi}{2} \cdot \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} i} + e^{-\frac{p \pi}{2} \cdot \frac{R}{l} \cdot \frac{z}{R} i} \right]$$

puede aplicarse lo dicho al caso de carga de agua.

Tercera fase. — Conocida la temperatura en el sólido mediante una cierta ley, pueden determinarse sin dificultad ninguna los recorridos en cada punto, suponiendo el sólido libre.

Por ejemplo, para temperatura constante:

$$\begin{array}{l} u = \alpha t (l - z); \\ v = \alpha t r; \\ w = 0; \end{array}$$

donde:

$$\begin{array}{l} \alpha = \text{coeficiente de dilatación;} \\ t = \text{aumento de temperatura, en grados;} \end{array}$$

o sea que en cada punto los recorridos son perfectamente conocidos.

Cuarta fase. — En esta fase se resuelve el problema de determinación de constantes arbitrarias, para el caso de cargas de agua o viento, como ya se ha dicho. Como ya se ha indicado anteriormente el modo de operar, sólo haremos aquí unas observaciones sobre la elección de los puntos que deban considerarse fijos y la manera de imponer las condiciones de borde.

En primer lugar, vamos a definir los esfuerzos que consideramos en cada punto:

Esfuerzo normal dirigido según z :

$$N_z = R \int_0^H s_z (1 + h) dh.$$

Esfuerzo normal dirigido según θ :

$$N = R \int_0^H s_\theta dh.$$

Esfuerzo tangencial paralelo a la generatriz:

$$N_{z\theta} = R \int_0^H t_{z\theta} dh.$$

Esfuerzo tangencial paralelo a la tangente;

$$N_{z\theta} = R \int_0^H t_{z\theta} (1 + h) dh.$$

Esfuerzo cortante según la generatriz:

$$L_z = R \int_0^H t_{zr} (1 + h) dh.$$

Esfuerzo cortante según la directriz:

$$L_\theta = R \int_0^H t_{r\theta} dh.$$

Momento flector según la generatriz:

$$M_z = R^2 \int_0^H s_z (1 + h) \left[\frac{H}{2} - h \right] dh.$$

Momento flector según la directriz:

$$M_\theta = R^2 \int_0^H s_\theta \left(\frac{H}{2} - h \right) dh.$$

Momento torsor alrededor de la generatriz:

$$M_{z\theta} = R^2 \int_0^H t_{r\theta} (1 + h) \left[\frac{H}{2} - h \right] dh.$$

Momento torsor alrededor de la tangente:

$$M_{\theta z} = R^2 \int_0^H t_{zr} \left(\frac{H}{2} - h \right) dh.$$

Referidos todos ellos a la unidad de longitud,

medida según la generatriz o según las directrices del paramento aguas abajo.

Si queremos que las condiciones de borde en coronación se cumplan, debe tenerse para $z = 0$:

$$N_z = N_{\theta z} = L_z = M_z = M_{z\theta} = 0;$$

y como la expresión de estas magnitudes es, en general,

$$A \cos n\theta + B \sin n\theta,$$

para que se cumpla para todo valor de θ , debe tenerse para cada valor de n :

$$A = 0;$$

$$B = 0;$$

o sea que el cumplimiento de las condiciones del borde superior nos lleva al establecimiento de diez ecuaciones.

Claro es que en muchas ocasiones no interesará el hacer que estas condiciones se cumplan con tanta exactitud, si gracias a este sacrificio podemos disponer de más incógnitas a determinar en los otros bordes, que definan con más aproximación la solución de tensiones y recorridos.

Por otra parte, en los casos más corrientes, el máximo valor de h será pequeño, por lo que los desarrollos [7] y [8] serán rápidamente convergentes. Ello quiere decir que los recorridos y los giros variarán poco con h , por lo que podemos tomar únicamente como puntos fijos los que están situados, por ejemplo, en la superficie media, y, en todo caso, podemos comprobar después si esto se cumple.

Si la presa descansa sobre un plano en la sección inferior, los recorridos vienen expresados bajo la fórmula general:

$$A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

$$\text{para } h = \left(\frac{H}{2} \right).$$

Para que sean nulos en la sección inferior, debe tenerse para $z = l$:

$$A = 0;$$

$$B = 0;$$

o sea, que como hay tres recorridos y tres giros, esto equivale al establecimiento de doce ecuaciones. Igualmente a lo que decíamos para la sección superior, puede prescindirse de alguno de los recorridos.

El establecimiento de la condición de inmovilidad de cada punto más que estudiemos, entraña el planteamiento de seis ecuaciones más.

Como orientación, daremos una idea de lo que juzgamos la mínima aproximación. Las condiciones que imponemos son las siguientes:

1.^a Para $z = 0$:

$$N_z = L_z = M_z = 0, 6 \text{ ecuaciones.}$$

2.^a Para $z = l$:

$$\left(r = R + R \frac{H}{2} \right), 8 \text{ ecuaciones;}$$

$$u = v = w = g_{zr} = 0$$

(siendo g_{zr} el giro alrededor de la tangente).

3.^a Para los dos puntos de contacto de la sección superior con el terreno:

$$u = v = w = g_{zr} = g_{r\theta} = 0, 10 \text{ ecuaciones.}$$

TOTAL, 24 ecuaciones.

Lo que nos dice que en los desarrollos tenemos que detenernos en los términos de tercer grado en h .

Si con ello no tenemos la aproximación deseada, hay que detenerse en potencias más elevadas de h .

Quinta fase. — Es idéntica a la anterior, por lo que no daremos más detalles.

Sexta fase. — Conocidas ya las leyes de esfuerzos normales y tangenciales y cortantes, así como las de momentos flectores y de torsión para la carga de agua, viento y temperatura, se hallan las solicitaciones más desfavorables en cada punto y se comprueba la estructura.

* * *

Como se observa, el método de cálculo que proponemos no es en ninguna manera sencillo, pero su complejidad es algébrica solamente, ya que el problema diferencial aparece resuelto sin dificultad alguna. Con él se pueden aproximar los resultados hasta donde se quiera, si bien a mayor aproximación corresponde una mayor complejidad.

Es evidente que cuanto menores sean los espesores con relación al radio, más convergentes serán los desarrollos [7] y [8], y menos discrepancia habrá entre las soluciones que se obtengan, deteniéndose en los términos de grado p y en los de $p + 1$. Si se trata de presas de acero (en este caso hay que hacer $h = -h$), los espesores serán pequeñísimos y, por tanto, pequeñísimas serán también estas diferencias (si bien en este caso no conviene suponer $v = 0$).

El método es también aplicable en aquellos casos de sección trapezoidal, en los que el paramento de aguas abajo tenga un talud muy reducido y que pueda sustituirse dentro de los límites de error que se admiten por un paramento vertical, pasando por el punto medio del paramento real.

Es de hacer notar que el método de cálculo expuesto resuelve también el problema de una cubierta cilíndrica, empotrada según una directriz, libre en la otra y empotrada lateralmente en dos líneas de su superficie (que bien pueden ser dos generatrices), con cargas que pueden ser del tipo hidrostático (igual que la carga de agua), constante (como el empuje del viento), o bien constante a lo largo de la generatriz y proporcionales al seno o coseno del ángulo en el centro.

Bibliografía.

- A. Peña: *Mecánica Elástica*. 2.^a edición. Madrid, 1930.
— *Elección del tipo de presa*. Madrid, 1935.
E. Torroja: *Comprobación y comportamiento de una estructura laminar*. (Memorias de la R. A. de Ciencias.) Madrid, 1942.
— *Elasticidad*. Madrid, 1945.
R. Vidal: *Nota sobre las láminas cilindrocirculares*. REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS. Madrid, 1950.
E. Torroja: y J. Batanero: *Cubiertas laminares. Cilindros*. (Publicaciones del Instituto Técnico de la Construcción.) Madrid, 1950