

APLICACIONES ESPACIALES DEL METODO DE LAS TRANSFORMACIONES

Por FEDERICO GODED ECHEVERRIA,
Ingeniero de Caminos.

En esta tercera parte del importante trabajo del autor, sobre el método de las transformaciones, hace aplicación del mismo a un problema no resuelto aún

III

Como es natural, la función de tensión que acabamos de obtener permite resolver, además de los problemas clásicos, numerosos problemas nuevos de interés práctico. De éstos destacan algunos de membrana de forma cónica, cuya solución se logra con una aproximación suficiente, y otros en la esfera y en el macizo indefinido.

Como no podemos exponer estas soluciones por su extensión, daremos como ejemplo de aplicación de la función de tensión [82] la solución del siguiente problema, en nuestro conocimiento aún no resuelto, cuya sencillez e interés le hacen especialmente apto para este resumen.

Esfera hueca sometida a la acción de dos fuerzas concentradas iguales y diametralmente opuestas.

El problema que vamos a resolver es, pues, el indicado en la figura 3.^a

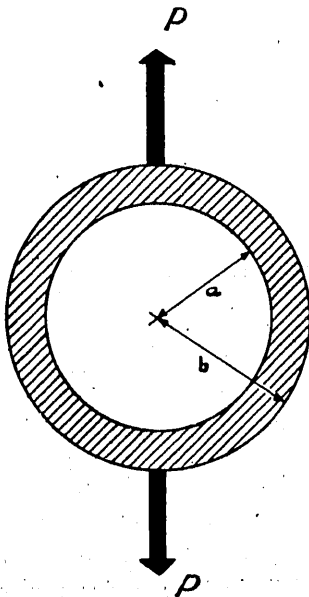


Figura 3.^a

Tomemos el cuarto término del segundo factor de [82], es decir, la función de tensión:

$$\varphi = A R^2 \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = A (r^2 + z^2) \log \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}}, \quad [83]$$

la cual, como es fácil comprobar (*) puede desdoblarse en las dos siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A \left[z^2 \log \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} + z \sqrt{r^2 + z^2} \right]; \\ \varphi_2 &= A \left[r^2 \log \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} - z \sqrt{r^2 + z^2} \right]. \end{aligned} \quad [84]$$

Sabemos (**) que los elementos del tensor elástico en estos problemas de simetría con respecto a un eje, vienen dados por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu S \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu S \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) S \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) S \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \right\} [85]$$

Así, pues, los estados de tensiones derivados de las funciones φ_1 y φ_2 serán:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1r} &= A \left[-\frac{1 + 2\nu}{R} + \frac{1 + \cos^2 \psi}{R \operatorname{sen}^2 \psi} + \frac{\cos^2 \psi}{R} \right], \\ \sigma_{1\theta} &= A \left[-\frac{2\nu}{R} - \frac{1 + \cos^2 \psi}{R \operatorname{sen}^2 \psi} \right], \\ \sigma_{1z} &= A \left[-\frac{1 - 2\nu}{R} - \frac{\cos^2 \psi}{R} \right], \\ \tau_{1rz} &= A \left[-\frac{2\nu \cos \psi}{R \operatorname{sen} \psi} - \frac{\operatorname{sen} \psi \cos \psi}{R} \right], \end{aligned} \right\} [86]$$

(*) Las dos funciones φ_1 y φ_2 son tales que

$$\begin{aligned} S^2 \varphi_1 &= 0 & S^2 \varphi_2 &= 0 \\ S \varphi_1 &\neq 0 & S \varphi_2 &\neq 0. \end{aligned}$$

(**) Ver *Theorie de l'elasticité* de S. Timochenko, página 334.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{2r} &= A \left[-\frac{4\nu}{R} + \frac{2\cos^2\psi}{R} \right], \\ \sigma_{2\theta} &= A \left[\frac{2-4\nu}{R} \right], \\ \sigma_{2z} &= A \left[\frac{4\nu-6}{R} - \frac{2\cos^2\psi}{R} \right], \\ \tau_{2rz} &= A \left[\frac{4(1-\nu)\cos\psi}{R\sin\psi} - \frac{2\sin\psi\cos\psi}{R} \right], \end{aligned} \right\} [87]$$

designando con los subíndices 1 y 2 a los correspondientes a las funciones φ_1 y φ_2 , respectivamente.

Consideremos ahora las tensiones ejercidas sobre un elemento como el indicado en la figura 4.^a.

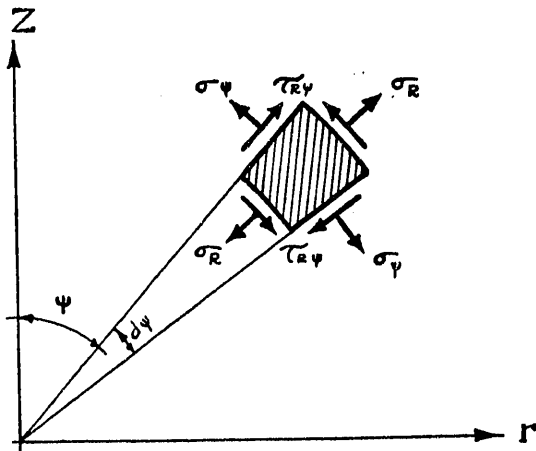


Figura 4.^a

Los nuevos elementos del tensor se deducirán de los anteriores, mediante las conocidas fórmulas de paso:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_r \sin^2\psi + \sigma_z \cos^2\psi + 2\tau_{rz} \sin\psi \cos\psi, \\ \sigma_\psi &= \sigma_r \cos^2\psi + \sigma_z \sin^2\psi - 2\tau_{rz} \sin\psi \cos\psi, \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin\psi \cos\psi + \tau_{rz} (\cos^2\psi - \sin^2\psi). \end{aligned} \right\} [88]$$

Y reemplazando aquí [86] y [87] y simplificando deducimos los estados de tensiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1R} &= A \left[-\frac{2\nu}{R} \right]; \\ \sigma_{1\psi} &= A \left[\frac{2\nu-2}{R} + \frac{1+\cos^2\psi}{R\sin^2\psi} \right], \\ \sigma_{1\theta} &= A \left[-\frac{2\nu}{R} - \frac{1+\cos^2\psi}{R\sin^2\psi} \right], \\ \tau_{1R\psi} &= A \left[\frac{2(1-\nu)\operatorname{ctg}\psi}{R} \right], \end{aligned} \right\} [89]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{2R} &= A \left[-\frac{4\nu}{R} \right], \\ \sigma_{2\psi} &= A \left[\frac{4\nu-6}{R} \right], \\ \sigma_{2\theta} &= A \left[\frac{2-4\nu}{R} \right], \\ \tau_{2R\psi} &= A \left[\frac{4(1-\nu)\operatorname{ctg}\psi}{R} \right]. \end{aligned} \right\} [90]$$

Se observan inmediatamente las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{2R} &= 2\sigma_{1R}, \\ \tau_{2R\psi} &= 2\tau_{1R\psi}. \end{aligned} \right\} [91]$$

Se podrá, pues, liberar de fuerzas la esfera, de radio R , tomando la función de tensión siguiente:

$$\varphi_3 = 2\varphi_1 - \varphi_2 = A \left[(2z^2 - r^2) \log \frac{r}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} + 3z\sqrt{r^2 + z^2} \right], [92]$$

la cual dará origen, por consiguiente, al estado de tensiones:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{3R} &= 2\sigma_{1R} - \sigma_{2R} = 0, \\ \sigma_{3\psi} &= 2\sigma_{1\psi} - \sigma_{2\psi} = \frac{4A}{R\sin^2\psi}, \\ \sigma_{3\theta} &= 2\sigma_{1\theta} - \sigma_{2\theta} = -\frac{4A}{R\sin^2\psi}, \\ \tau_{3R\psi} &= 2\tau_{1R\psi} - \tau_{2R\psi} = 0, \end{aligned} \right\} [93]$$

que a continuación vamos a analizar.

Condiciones de equilibrio, determinación de la constante.

Consideramos (fig. 5.^a) una esfera de radios a y b . El estado de tensión anterior [93] dejará libres de fuerzas la superficie interior ($DC - D'C'$), y la superficie exterior ($AB - A'B'$) del anillo, rayado en la figura 5.^a, ya que deja libres de fuerzas las dos esferas de radios a y b . El anillo, teniendo en cuenta que las fuerzas de masa son nulas, se mantendrá en equilibrio por la acción de las fuerzas P_1 y P_2 , que son las resultantes de las componentes σ_3 sobre los elementos del área de la corona circular $BC - B'C'$ delimitados por dos radios que formen el ángulo $d\psi$ y sobre los elementos de la superficie

del cono AOA' análogamente delimitados comprendida entre los planos $z = a \cos \psi_1$ y $z = b \cos \psi_1$.

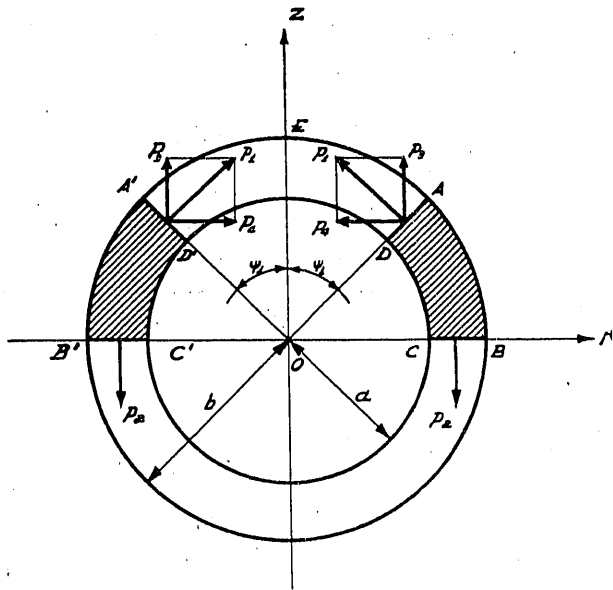


Figura 5.ª

Las fuerzas P_2 tendrán una resultante que valdrá:

$$R_2 = \int_{r=a}^{r=b} 2\pi r (\sigma_\psi)_{\psi=\pi/2} r dr = 2\pi A \int_{r=a}^{r=b} 4 dr = 8\pi A (b-a). \quad [94]$$

Las fuerzas P_4 se anularán por simetría, y las P_3 tendrán una resultante:

$$R_3 = \int_{R=a}^{R=b} 2\pi r (\sigma_\psi)_{\psi=\psi_1} \sin \psi_1 dR = \int_{R=a}^{R=b} 2\pi R \sin \psi_1 \cdot \frac{4A}{R \sin^2 \psi_1} \times \sin \psi_1 dR = 8A\pi (b-a), \quad [95]$$

como debía ser. Cuando ψ tiende a cero, las tensiones $\sigma_{3\psi}$ se hacen infinitas, pero la resultante R_3 sigue siendo constante y de valor $8A\pi (b-a)$. Esto quiere decir que para el equilibrio de la semiesfera, obtenida al hacer $\psi_1 = 0$, es preciso considerar la existencia en E de una fuerza concentrada P , de valor:

$$P = 8A\pi (b-a), \quad [96]$$

deduciéndose de esta ecuación el valor de la constante A , que será:

$$A = \frac{P}{8\pi (b-a)}. \quad [97]$$

Así, pues, si el estado de tensiones [93] no corresponde a un problema de tensiones iniciales, como vamos inmediatamente a demostrar, entonces en vir-

tud del principio de Saint-Venant, podremos admitir la equivalencia en la zona de E entre la fuerza concentrada y las tensiones que hemos visto la equilibran, y el estado de tensiones [93] cuando A tiene el valor [97], será, por consiguiente, la solución del problema indicado en el epígrafe.

Estudio de los recorridos.

Se sabe que en los problemas que no son de tensiones iniciales, los recorridos vienen expresados por funciones de determinación única, sucediendo lo contrario en dichos problemas, en los cuales, por consiguiente, en cada punto tendremos varios recorridos distintos.

Ambos géneros de problemas se diferencian, pues, en el tipo de las funciones que expresan los recorridos.

Estudiemos, pues, los recorridos en nuestro caso.

Estos se deducen, como sabemos, del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -1) \quad \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ -2) \quad \epsilon_\theta &= \frac{u}{r}, \\ 3) \quad \epsilon_z &= \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ 4) \quad \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r}. \end{aligned} \right\} [98]$$

Para determinar los dos componentes, u y ω , de los recorridos nos es, pues, preciso antes conocer las deformaciones ϵ_z , ϵ_θ y γ_{rz} . Conocidas las tensiones; éstas se escriben directamente:

$$\left. \begin{aligned} -1) \quad \epsilon_{3\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{3\theta} - \nu (\sigma_{3r} + \sigma_{3z})] = -\frac{4A(1+\nu)}{ER \sin^2 \psi}, \\ -2) \quad \epsilon_{3z} &= \frac{1}{E} [\sigma_{3z} - \nu (\sigma_{3r} + \sigma_{3\theta})] = \frac{4A(1+\nu)}{ER}, \\ -3) \quad \gamma_{3rz} &= \frac{2(1+\nu)\tau_{3rz}}{E}, \end{aligned} \right\} [99]$$

teniendo en cuenta que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{3r} &= 2\sigma_{1r} - \sigma_{2r} = A \left[-\frac{2}{R} + \frac{2(1+\cos^2 \psi)}{R \sin^2 \psi} \right], \\ \sigma_{3\theta} &= 2\sigma_{1\theta} - \sigma_{2\theta} = A \left[-\frac{4}{R \sin^2 \psi} \right], \\ \sigma_{3z} &= 2\sigma_{1z} - \sigma_{2z} = A \left[\frac{4}{R} \right], \\ \tau_{3rz} &= 2\tau_{1rz} - \tau_{2rz} = A \left[-\frac{4 \operatorname{ctg} \psi}{R} \right]. \end{aligned} \right\} [100]$$

de [98-2] se deduce:

$$u = -\frac{4A(1+\nu)}{Er} \sqrt{r^2+z^2}. \quad [101]$$

Y de [98-4] y [99-3] deducimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{2(1+\nu)\tau_2 r z}{E} + \frac{4z(1+\nu)A}{Er\sqrt{r^2+z^2}} = \\ &= -\frac{4(1+\nu)z}{Er\sqrt{r^2+z^2}} A. \end{aligned} \quad [102]$$

Igualmente de [68-3] y [99-2] se obtiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{4(1+\nu)A}{E\sqrt{r^2+z^2}}. \quad [103]$$

Podremos, pues, escribir finalmente:

$$\begin{aligned} \omega &= \int \frac{\partial \omega}{\partial z} dz + \int \frac{\partial \omega}{\partial r} dr = -\frac{4A(1+\nu)}{E} \log \frac{r}{z+\sqrt{r^2+z^2}} - \\ &= -4A \frac{(1+\nu)}{E} \log \frac{r}{z+\sqrt{r^2+z^2}} = \\ &= -\frac{8A(1+\nu)}{E} \log \frac{r}{z+\sqrt{r^2+z^2}}. \end{aligned} \quad [104]$$

Se comprueba que las funciones u y ω son de determinación única. No se trata, pues, de un problema de tensiones iniciales. Comprobaremos además que la

deformación es simétrica con respecto al plano $z=0$. En efecto, se verifican las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} (u)_{\psi=\psi_1} &= (u)_{\psi=\pi-\psi_1}, \\ (\omega)_{\psi=\psi_1} &= -(\omega)_{\psi=\pi-\psi_1}. \end{aligned} \right\} \quad [105]$$

Y por lo tanto (fig. 6.^a), los recorridos totales $\vec{(u+\omega)}_{\psi=\psi_1}$ y $\vec{(u+\omega)}_{\psi=\pi-\psi_1}$ son simétricos con respecto al mencionado plano. Podemos, pues, concluir que el estado de tensiones hallado [93] es la solución del problema de la esfera hueca bajo la acción de las fuerzas P .

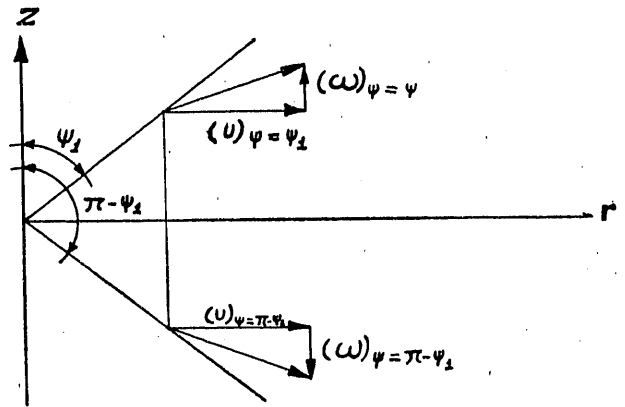


Figura 6.^a

Sin exponer más aplicaciones de la función de tensión [82], pasamos, pues, a la generalización de la función de tensión de los cilindros.

(Continuará.)