METODO DE LAS REACCIONES MUTUAS PARA EL CALCULO DE REDES ELECTRICAS

Por ANTONIO ANGULO ALVAREZ,
Ingeniero de Caminos.

Se describe un sistema original para el cálculo de redes eléctricas, que tiene por característica su sencillez. Es especialmente adecuado para circuitos concatenados. Se hace una interesante aplicación al caso de electrificación de ferrocarriles, que demuestra las posibilidades del método.

Para el cálculo de redes eléctricas lo fundamental es el conocimiento de la distribución de intensidades en los diversos conductores, pues las caídas de tensión, que son el resultado del cálculo, se obtienen mediante la simple aplicación de la ley de Ohm.

Nos referiremos a redes de corriente continua, por su mayor facilidad de cálculo, aun cuando lo mismo podría aplicarse a las redes de alterna, sustituyendo las resistencias por las impedancias, y los cálculos con cantidades reales, por los de complejas.

En el método que se expone se comienza por fijar una distribución de intensidades, arbitraria y lo más sencilla posible, con la única condición de que se cumpla en cada nudo la primera ley de Kirchhoff (suma de intensidades igual a cero).

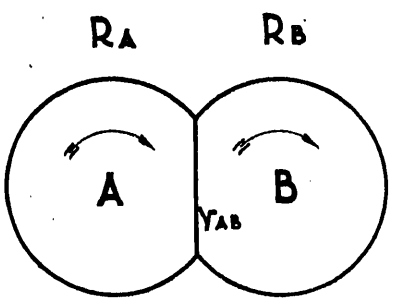


Figura 1.ª

Haciendo referencia a la figura 1.ª, que representa el caso sencillo de una red con dos circuitos enlazados, tendremos que distribuir las intensidades que entren o salgan en cada circuito, cumpliendo la primera ley de Kirchhoff, como se ha indicado anteriormente.

La malla indicada en dicha figura se compone de dos circuitos, que hemos designado por A y B, con sus resistencias *totales*, que designamos R_A y R_B. Llamamos r_{AB} a la resistencia del conductor común a ambos circuitos.

Con la distribución de intensidades establecida, y tomando en el circuito A un sentido arbitrario de circulación de la corriente (como es el indicado de las agujas del reloj), calculamos la suma algébrica de las fuerzas electromotrices y caídas de tensión en todos los conductores que lo forman. Si el circuito estuviese equilibrado, esta suma debería ser nula, cumpliendo la segunda ley de Kirchhoff; pero lo probable es que no sea así, dando lugar a una suma:

$$\overset{A}{\Sigma}(E + R.\,I.) \neq 0,$$

Con objeto de simplificar, designamos esta suma por $\overset{A}{\Sigma} R.\,I.$, no citando así explícitamente más que las caídas de tensión.

Para equilibrar este circuito puede establecerse una intensidad adicional, que llamaremos I_A, que recorra todos los conductores del circuito A (cuya resistencia ya hemos indicado que es R_A), lo que dará lugar a la condición:

$$\overset{A}{\Sigma} R.\,I + R_A.\,I_A = 0,$$

de la que se deduce que:

$$I_A = -\frac{\overset{A}{\Sigma} R.\,I}{R_A},$$

cuya expresión sería correcta si no existiese el circuito B, concatenado con el A.

Veamos ahora lo que ocurre con este circuito. Su situación (equilibrado o desequilibrado) se encuentra perturbada por la existencia de la intensidad I_A, puesto que, circulando a través del conductor común, introduce en el circuito B un nuevo desequilibrio, que tiene por expresión (utilizando la notación indicada):

$$-r_{AB}\cdot I_A.$$

Procediendo análogamente, eliminamos del circuito B el desequilibrio así creado, mediante otra intensidad, que ha de circular por el circuito B, y cuya expresión es:

$$I_{BA} = -\frac{\overset{B}{\Sigma} R\,I}{R_B} = -\frac{-r_{AB}\cdot I_A}{R_B} = \frac{r_{AB}\cdot I_A}{R_B}.$$

Pero esta intensidad I_{BA} (que existe en el circuito B a consecuencia del desequilibrio del circuito A) desequilibra a su vez el circuito A, puesto que circula por el conductor común. De aquí el por qué se designa al presente método como de "reacciones mutuas". El valor de este desequilibrio es:

$$- r_{AB} \cdot I_{BA} = - \frac{r^2_{AB} \cdot I_A}{R_B}.$$

Es decir, que el hecho de introducir la corriente I_A en el circuito A origina en él un desequilibrio que tiene por expresión:

$$R_A\, I_A - \frac{r^2_{AB} \cdot I_A}{R_B} = R_A \cdot I_A \left(1 - \frac{r^2_{AB}}{R_A \cdot R_B}\right),$$

sin que perturbe la situación del circuito B.

Utilizando el valor auxiliar:

$$\alpha_{AB} = \frac{r^2_{AB}}{R_A \cdot R_B},$$

puede expresarse que para no perturbar la situación del circuito B el desequilibrio creado por la corriente I_A en su propio circuito vale:

$$R_A \cdot I_A \cdot (1 - \alpha_{AB}).$$

Si pretendemos que esta intensidad equilibre el circuito A, habida cuenta del desequilibrio debido a las intensidades supuestas, llegamos a la condición:

$$\sum^{A} R\,I + R_A\, I_A \cdot (1 - \alpha_{AB}) = 0;$$

de la que se deduce:

$$\boxed{I_A = - \frac{\sum^{A} R \,.\, I}{R_A\,(1 - \alpha_{AB})}}$$

Mediante la circulación de esta intensidad el circuito A habrá quedado equilibrado y el B en idénticas condiciones en que estaba, pero circulará por él, además de las corrientes primitivas, otra intensidad I_{BA} (por el circuito B, a causa del equilibrado del circuito A), que tiene por expresión:

$$I_{BA} = I_A \cdot \frac{r_{AB}}{R_B}.$$

Para solucionar totalmente el problema será preciso repetir el razonamiento en el circuito B sin perturbar el circuito A (que ya está equilibrado), quedando ambos equilibrados. La intensidad I_B a tener en cuenta será, análogamente:

$$I_B = - \frac{\sum^{B} R \,.\, I}{R_B\,(1 - \alpha_{BA})},$$

y para la reacción sobre el circuito A, debido al equilibrado del circuito B, será:

$$I_{AB} = I_B \cdot \frac{r_{BA}}{R_A}.$$

Ejemplo.

Para mayor facilidad de comprensión, hagamos un ejemplo: Sea una línea de tranvías, $B\ C\ D$ (figura 2.ª) alimentada desde la subestación A mediante las tres líneas $A\ B$, $A\ C$ y $A\ D$. Se indican las resistencias de cada trozo, así como las intensidades derivadas por los tractores.

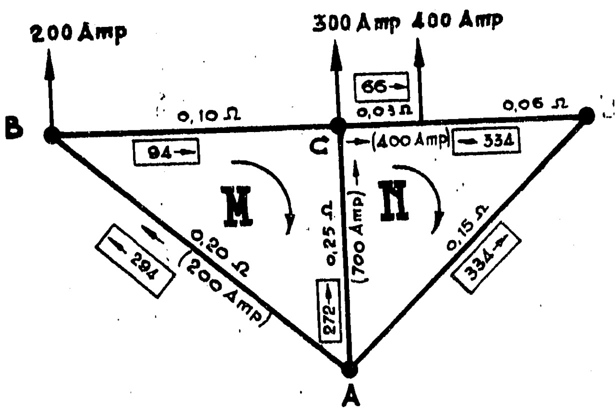


Figura 2.ª

Establecemos una distribución arbitraria (y lo más sencilla posible) de intensidades; estas intensidades las indicamos entre paréntesis, cuidando de cumplir la primera ley de Kirchhoff o condición de continuidad. Así, los 200 amperios que se consumen en B suponemos circulan por la línea $A\ B$. Por la $B\ C$ no irá corriente alguna. La línea $A\ C$ conduce 700 amperios para las dos cargas próximas a C, quedando sin carga el conductor $A\ D$ y la parte derecha de la línea $C\ D$.

Los desequilibrios en los circuitos M y N serán los siguientes, considerando el sentido de rotación indicado.

En el circuito M:

$$\sum^{M} R\,I = +\,200\,.\,0{,}20 - 700\,.\,0{,}25 = -\,135 \text{ voltios}.$$

En el circuito N:

$$\sum^{N} R\,.\,I = +\,700\,.\,0{,}25 + 400\,.\,0{,}03 = +\,187 \text{ voltios}.$$

Los valores auxiliares son los siguientes:

$$R_M = 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}25 = 0{,}55\ \Omega.$$

$$R_N = 0{,}25 + 0{,}03 + 0{,}06 + 0{,}15 = 0{,}49\ \Omega.$$

$$r_{MN} = 0{,}25\ \Omega.$$

$$\alpha_{MN} = \alpha_{NM} = \frac{0{,}25^2}{0{,}55\,.\,0{,}49} = 0{,}232.$$

Las intensidades que equilibran los circuitos son:

$$I_M = -\frac{\overset{M}{\Sigma} R\, I}{R_M\,(1-\alpha_{MN})} = -\frac{-125}{0{,}55\,(1-0{,}232)} =$$

$$= +320 \text{ amperios}.$$

$$I_{NM} = I_M \cdot \frac{r_{MN}}{R_N} = 320 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}49} = +163 \text{ amperios}.$$

$$I_N = -\frac{\overset{N}{\Sigma} R\,.\,I}{R_N\,(1-\alpha_{NM})} = -\frac{187}{0{,}49\,(1-0{,}232)} =$$

$$= -497 \text{ amperios}.$$

$$I_{MN} = I_N \cdot \frac{r_{NM}}{R_M} = -497 \cdot \frac{0{,}25}{0{,}55} = -226 \text{ amperios}.$$

Por lo tanto, la intensidad a introducir en el circuito M es:

$$I\,(M) = I_M + I_{MN} = 320 - 226 = 94 \text{ amperios},$$

y en el circuito N:

$$I\,(N) = I_N + I_{NM} = -497 + 163 = -334 \text{ amperios}.$$

Sumando algebraicamente estas intensidades con las establecidas al principio tenemos la solución del problema. En la figura 2.ª se han indicado las intensidades resultantes con su sentido, dentro de unos rectángulos, inmediatos a cada conductor.

Como puede apreciarse, el procedimiento es de muy fácil aplicación.

Extensión del método.

Con el mismo fundamento, puede aplicarse al estudio de más de dos circuitos entrelazados. Para todos los casos hay que deducir las fórmulas correspondientes suponiendo una intensidad en el circuito que se pretenda equilibrar, que crea un desequilibrio en su propio circuito, modificado por las reacciones de los demás, como consecuencia de la existencia de la referida corriente cumpliendo la condición de no alterar la situación de los demás circuitos.

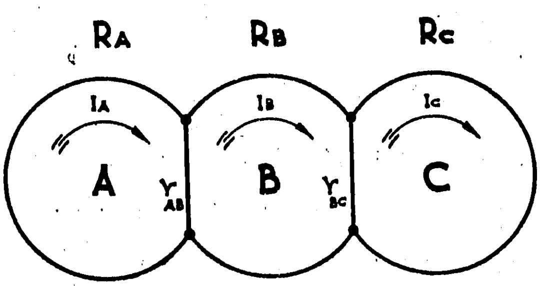


Figura 3.ª

Sea, por ejemplo, el conjunto de tres circuitos indicados en la figura 3.ª. Deduciremos primero las fórmulas para equilibrar el circuito A.

La corriente I_A crea en el circuito B un desequilibrio que vale

$$-I_A \cdot r_{AB}.$$

Para equilibrarle, teniendo en cuenta la existencia del circuito C hemos de recurrir a las fórmulas de dos circuitos enlazados utilizadas en el ejemplo anterior, y resulta:

$$I_{BA} = I_A \frac{r_{AB}}{R_B\,(1-\alpha_{BC})}.$$

Cuya intensidad repercute en el circuito A creando un nuevo desequilibrio cuyo valor es:

$$-I_{BA} \cdot r_{AB} = -\frac{I_A \cdot r_{AB}^2}{R_B\,(1-\alpha_{BC})}.$$

De forma que el equilibrio total en el circuito A, motivado por la corriente I_A, tiene por expresión:

$$R_A \cdot I_A - I_A \cdot \frac{r_{AS}^2}{R_B\,(1-\alpha_{BC})} =$$

$$= R_A \,.\, I_A \left[1 - \frac{r_{AB}^2}{R_A \,.\, R_B \,.\, (1-\alpha_{BC})}\right] = R_A \,.\, I_A \left(1 - \frac{\alpha_{AB}}{1-\alpha_{BC}}\right).$$

Es decir, que si existe inicialmente un desequilibrio $\overset{A}{\Sigma} R\,.\,I$, se precisa disponer para equilibrarlo una intensidad cuyo valor es:

$$\boxed{I_A = -\frac{\overset{A}{\Sigma} R\,.\,I}{R_A\left(1-\dfrac{\alpha_{AB}}{1-\alpha_{BC}}\right)}}$$

Las intensidades que han de establecerse en los circuitos B y C a consecuencia de la I_A tienen por expresión:

$$\boxed{I_{BA} = I_A \frac{r_{AB}}{R_B\,(1-\alpha_{BC})}}$$

$$\boxed{I_{CA} = I_{BA} \cdot \frac{r_{BC}}{R_c} = I_A \cdot \frac{r_{AB} \cdot r_{BC}}{R_B \,.\, R_c\,(1-\alpha_{BC})}}$$

Establezcamos ahora las condiciones de equilibrio del circuito B.

La existencia de una corriente I_B en este circuito ocasiona un desequilibrio:

$$+R_B \,.\, I_B,$$

y al propio tiempo, en los circuitos A y C origina desequilibrios que tienen por expresión:

En el circuito A . . . . . $-I_B \cdot r_{AB}$.

En el circuito C . . . . . $-I_B \cdot r_{CB}$.

Estos circuitos se equilibran fácilmente con la existencia de las corrientes:

$$I_{AB} = I_B \cdot \frac{r_{AB}}{R_A},$$

$$I_{CB} = I_B \cdot \frac{r_{BC}}{R_C},$$

que a su vez repercuten sobre el circuito B creando los siguientes desequilibrios:

$$-r_{AB} \cdot I_{AB} = -I_B \cdot \frac{r^2_{AB}}{R_A} = -I_B \cdot R_B \cdot \frac{r^2_{AB}}{R_A \cdot R_B} =$$
$$= -I_B \cdot R_B \cdot \alpha_{AB},$$

$$-r_{CB} \cdot I_{CB} = -I_B \cdot \frac{r^2_{CB}}{R_C} = -I_B \cdot R_B \cdot \frac{r^2_{BC}}{R_C \cdot R_B} =$$
$$= -I_B \cdot R_B \cdot \alpha_{BC}.$$

El desequilibrio total es, por lo tanto:

$$R_B \cdot I_B (1 - \alpha_{AB} - \alpha_{BC}),$$

o sea que la intensidad de corrección, en el caso del circuito B, vale:

$$\boxed{I_B = \frac{\sum^{B} R \cdot I}{R_B (1 - \alpha_{AB} - \alpha_{BC})}}$$

y las debidas a tal corriente, en los otros circuitos, tienen por expresión:

$$\boxed{I_{AB} = I_B \cdot \frac{r_{AB}}{R_A}}$$

$$\boxed{I_{CB} = I_B \cdot \frac{r_{CB}}{R_C}}$$

No es precisa aclaración alguna respecto al equilibrio del circuito C, puesto que se trata de un caso análogo al del A.

Fórmulas para diversos tipos de redes.

Procediendo como se ha indicado, se han calculado las fórmulas que se indican en el cuadro, para todas las cuales se ha partido de equilibrar el circuito A.

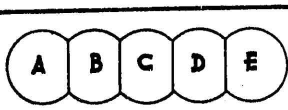
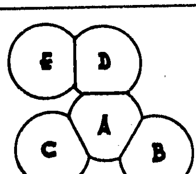
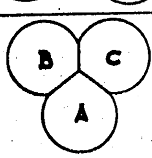
Utilizando tales fórmulas pueden resolverse diversos casos de redes formadas por varios circuitos, pero de todos modos pueden establecerse las fórmulas correspondientes a cualquier otro tipo de red procediendo de la forma indicada anteriormente.

Se ha prescindido de insertar las fórmulas correspondientes a redes con circuitos muy enlazados, pues resultan complicadas, y no es útil aplicar el método descrito, ya que su objeto es simplificar los cálculos.

Síntesis del método.

Esencialmente consiste en establecer una distribución arbitraria de intensidades, observando la primera ley de Kirchhoff.

Luego se equilibra cada circuito de tal modo que

ESQUEMA DE LA RED	EXPRESION DE LA INTENSIDAD I_A	EXPREXION DE LA INTENSIDAD I_{BA}	EXPRESION DE LA INTENSIDAD I_{CA}	EXPRESION DE LA INTENSIDAD I_{DA}	EXPRESION DE LA INTENSIDAD I_{EA}
	$-\dfrac{\sum^{A} R.I}{R_A\left(1-\dfrac{\alpha_{AB}}{1-\dfrac{\alpha_{BC}}{1-\dfrac{\alpha_{CD}}{1-\alpha_{DE}}}}\right)}$	$I_A \cdot \dfrac{r_{AB}}{R_B\left(1-\dfrac{\alpha_{BC}}{1-\dfrac{\alpha_{CD}}{1-\alpha_{DE}}}\right)}$	$I_{BA} \cdot \dfrac{r_{BC}}{R_C\left(1-\dfrac{\alpha_{CD}}{1-\alpha_{DE}}\right)}$	$I_{CA} \cdot \dfrac{r_{CD}}{R_D(1-\alpha_{DE})}$	$I_{DA} \cdot \dfrac{r_{DE}}{R_E}$
	$-\dfrac{\sum^{A} R.I}{R_A\left(1-\alpha_{AB}-\alpha_{AC}-\dfrac{\alpha_{AD}}{1-\alpha_{DE}}\right)}$	$I_A \cdot \dfrac{r_{AB}}{R_B}$	$I_A \cdot \dfrac{r_{AC}}{R_C}$	$I_A \cdot \dfrac{r_{AD}}{R_D(1-\alpha_{DE})}$	$I_{DA} \cdot \dfrac{r_{DE}}{R_E}$
	$-\dfrac{\sum^{A} R.I}{R_A\left(1-\dfrac{\alpha_{AB}+\alpha_{AC}+2\sqrt{\alpha_{AB}\cdot\alpha_{BC}\cdot\alpha_{AC}}}{1-\alpha_{BC}}\right)}$	$I_A \dfrac{r_{AB}+\dfrac{r_{AC}.r_{BC}}{R_C}}{R_B(1-\alpha_{BC})}$	$I_A \cdot \dfrac{r_{AC}+\dfrac{r_{AB}.r_{BC}}{R_B}}{R_C(1-\alpha_{BC})}$		

no se perturben las circunstancias de los circuitos restantes. Para ello, y en cada uno de los circuitos, deben calcularse los desequilibrios producidos en los demás, y a su vez equilibrarlos.

Si, por ejemplo, están enlazados los circuitos *A*, *B*, *C* y *D*, después de suponer una distribución de intensidades, que cumpla la primera ley de Kirchhoff, resultan todos desequilibrados. Procede equilibrar el circuito *A*, lo que origina las siguientes intensidades:

En el circuito *A*	I_A ,
En el circuito *B*	I_{BA},
En el circuito *C*	I_{CA},
En el circuito *D*	I_{DA}.

Luego se equilibra el circuito B, mediante las siguientes intensidades:

En el circuito *A*	I_{AB},
En el circuito *B*	I_B ,
En el circuito *C*	I_{CB},
En el circuito *D*	I_{DB},

y de modo análogo en los circuitos *C* y *D*.

Las intensidades de corrección que solucionan el problema serán, por lo tanto:

En el circuito *A*: $I(A) = I_A + I_{AB} + I_{AC} + I_{AD}$,
En el circuito *B*: $I(B) = I_{BA} + I_B + I_{BC} + I_{BD}$,
En el circuito *C*: $I(C) = I_{CA} + I_{CB} + I_C + I_{CD}$,
En el circuito *D*: $I(D) = I_{DA} + I_{DB} + I_{DC} + I_D$.

También debemos repetir que, al establecer los desequilibrios en cada circuito con arreglo a la segunda ley de Kirchhoff, debe tenerse en cuenta la suma algébrica de las fuerzas electromotrices y de las caídas de tensión.

Tratándose de circuitos, no es frecuente la existencia de fuerzas electromotrices, por lo que, como queda dicho, hemos designado de un modo simplificado el desequilibrio del circuito *A* por la expresión:

$$\hat{\Sigma} R \, . \, I,$$

aun cuando ya se mencionó que su expresión correcta es:

$$\hat{\Sigma} (E + R \, . \, I).$$

Aplicaciones interesantes.

El método de las reacciones mutuas hace accesible en algunos casos el cálculo eléctrico de circuitos concatenados que, de otro modo, presentan notable complicación.

Entre estos casos se cuenta el de la "jaula de ardilla" o rotor en cortocircuito de los motores de inducción. En motores grandes, con un elevado número de barras en el rotor, puede aplicarse sin gran error el cálculo infinitesimal, pero en motores pequeños, con escaso número de barras en el rotor, son pocos los circuitos, y por ello resultan inadmisibles las hipótesis de continuidad. Para estos circuitos, se resuelve fácilmente la distribución de corrientes mediante el procedimiento de las reacciones mutuas.

Por encontrarlo de interés para los lectores de la Revista, se detalla a continuación un caso de aplicación que se ha empleado repetidamente en la Oficina de los Servicios Eléctricos del Ministerio de Obras Públicas, la cual ha realizado estudios sobre electrificación de ferrocarriles, de indudable trascendencia.

Cada dos subestaciones están unidas por dos líneas de contacto, a razón de una por vía, las cuales, a su vez, se unen entre sí en diversos puntos intermedios, pues así se logra una cooperación entre ambas, con la correspondiente reducción de la resistencia del conjunto, y, por lo tanto, de las caídas de tensión.

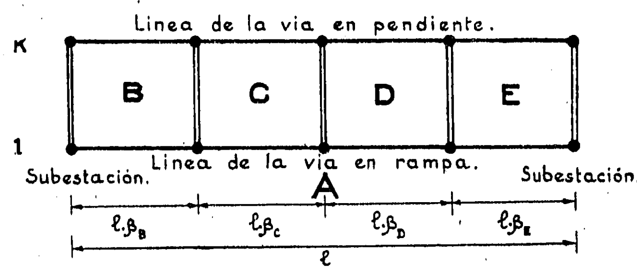


Figura 4.ª

Haciendo referencia a la figura 4.ª, tenemos dos subestaciones, figuradas a los extremos, y las dos líneas, que se enlazan en tres puntos intermedios. Normalmente, estos puntos intermedios son las estaciones y se supone que estos enlaces carecen de resistencia. Se conoce la resistencia unitaria de cada línea de contacto, que con frecuencia no son iguales, ya que por una circulan trenes que suben una rampa, consumiendo mucha energía, mientras que por la otra los trenes descienden por una pendiente, consumiendo poca energía, o incluso produciéndola, cuando las locomotoras están convenientemente equipadas.

Así, pues, si comparamos la resistencia de la línea de contacto de la vía en rampa, con la de la vía en pendiente, encontraremos que lo normal es que ésta sea mayor, designando para nuestros cálculos por *K* la resistencia, por unidad de longitud, de la línea en pendiente, respecto a la propia de la vía en rampa.

Este coeficiente *K* ha de ser, por lo tanto, igual o mayor que la unidad.

Dividimos el conjunto en los circuitos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. De ellos el circuito *A* equivale a la condición de que ambas subestaciones estén al mismo potencial (o bien que entre ellas existe una diferencia de potencial conocida). Los circuitos *B*, *C*, *D* y *E* son circuitos cerrados, sin fuerzas electromotrices, cuya condición de equilibrio es la nulidad de las caídas de tensión a lo largo de cada uno de ellos.

Las distancias entre los distintos puntos de puesta en paralelo, se determinan multiplicando la distancia, l, entre subestaciones por los diversos coeficientes β, con el subíndice correspondiente, por supuesto que:

$$\beta_B + \beta_C + \beta_D + \beta_E = 1.$$

Como en casos anteriores, comenzamos por suponer una distribución arbitraria de intensidades, manteniendo la condición de continuidad, o sea cumpliéndose la primera ley de Kirchhoff. Como es lógico no resultará equilibrado el circuito A, y para lograrlo hemos de introducir una intensidad:

$$I_A = -\frac{\hat{\Sigma} R \cdot I}{R_A (1 - \alpha_{AB} - \alpha_{AC} - \alpha_{AD} - \cdot \cdot)} .$$

Ahora bien, con arreglo a la notación indicada:

$$\alpha_{AB} = \frac{r^2_{AB}}{R_A \cdot R_B} = \frac{(R_A \cdot \beta_B)^2}{R_A \cdot [R_A \cdot \beta_B (1+K)]} = \frac{\beta_B}{1+K} .$$

Repitiendo los cálculos para los circuitos C, D y E y sustituyendo, tenemos que el valor de I_A es el siguiente:

$$\boxed{I_A = -\frac{\hat{\Sigma} R \cdot I}{R_A \left(1 - \frac{1}{1+K}\right)} = -\frac{\hat{\Sigma} R \cdot I}{R_A} \cdot \frac{1+K}{K}}$$

La intensidad I_{BA} resulta ser:

$$I_{BA} = I_A \frac{r_{AB}}{R_B} = I_A \cdot \frac{R_A \cdot \beta_B}{R_A \cdot \beta_B (1+K)} = -\frac{\hat{\Sigma} R I}{R_A} \cdot \frac{1}{K} .$$

De modo análogo se deducen las fórmulas de los otros circuitos, llegándose a la conclusión de que:

$$\boxed{I_{BA} = I_{CA} = I_{DA} = I_{EA} = -\frac{\hat{\Sigma} R \cdot I}{R_A} \cdot \frac{1}{K}}$$

Con lo anterior tenemos suficiente, pues recurrimos a otro artificio que simplifica los cálculos. Consiste en equilibrar primero los circuitos B, C, D y E, considerándolos independientes, o sea prescindiendo para ello de su concatenación con el circuito A.

Después se calcula el desequilibrio total resultante en el circuito A, con arreglo al cual se equilibra este circuito, respetando, por supuesto, el equilibrio del resto de los circuitos. Esta operación repercute con la misma intensidad en los circuitos B, C, D y E como se deduce de las fórmulas anteriores. Hay que hacer, por lo tanto, una sola compensación.

Con objeto de apreciar la sencillez del método, en este caso, lo aplicaremos al ejemplo detallado en la figura 5.ª.

En ella, la línea inferior corresponde a la vía en rampa, con cargas fuertes. La línea superior representa la catenaria de la vía en pendiente con cargas menores, e incluso un tren recuperando.

La distancia entre las dos subestaciones es de 40 kilómetros, cifra normal en electrificaciones en co-

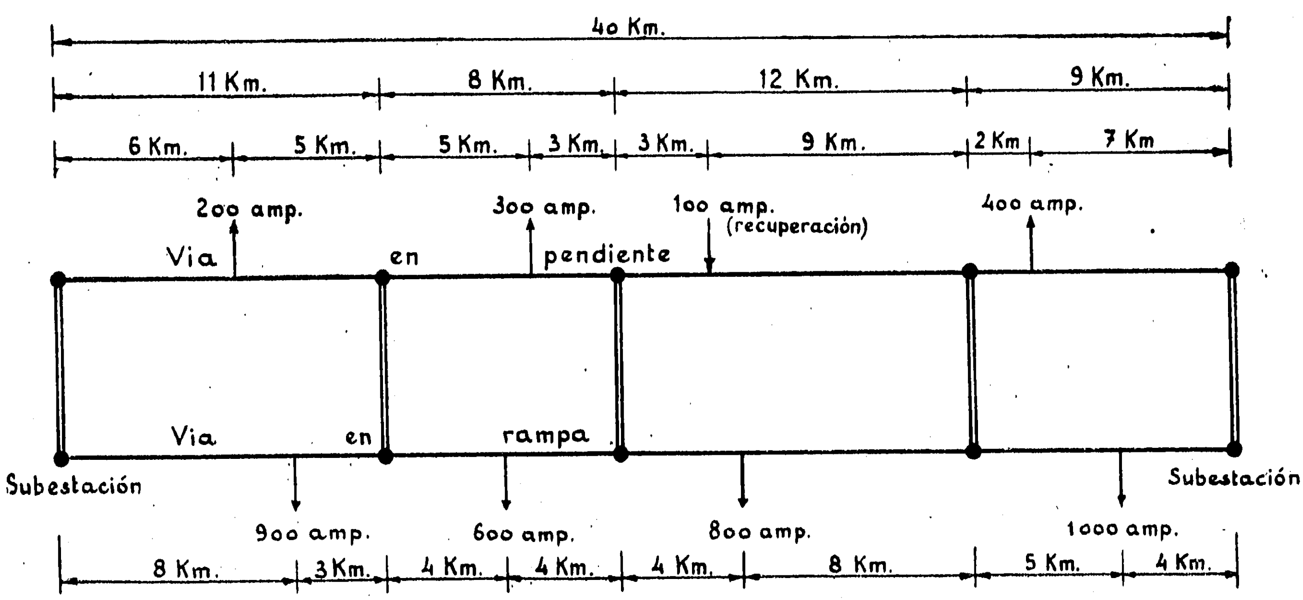


Figura 5.ª

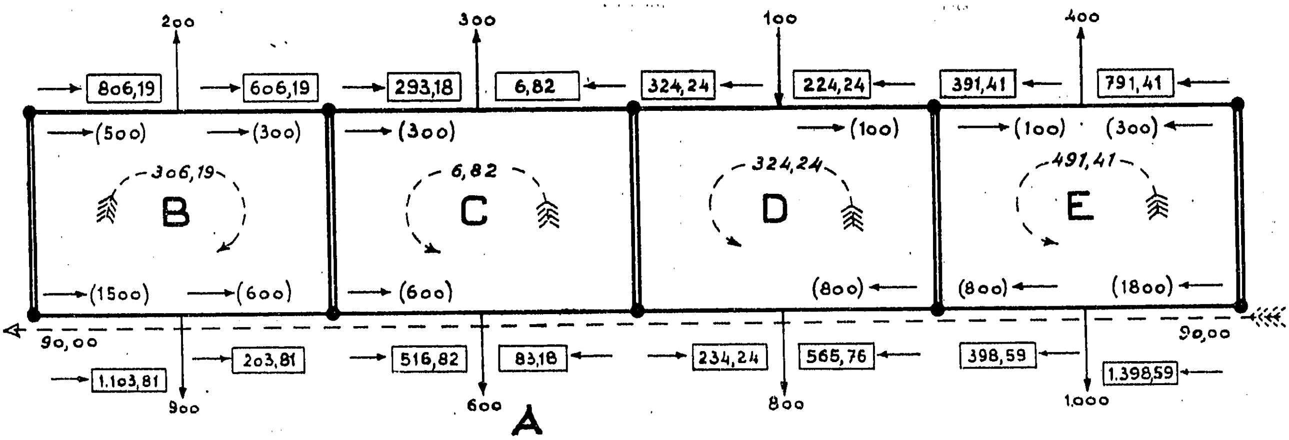


Figura 6.ª

rriente continua a 3 000 voltios. Entre ambas subestaciones se han previsto tres puestas en paralelo correspondiente a otras tantas estaciones, desigualmente distanciadas a lo largo de la vía.

También se ha supuesto que la resistencia de la vía en pendiente sea de 1,2 veces la propia de la vía en rampa.

Partimos de una distribución arbitraria de intensidades, lo más sencilla posible, cumpliendo la ley de la continuidad. Esta distribución la marcamos con flechas que indican el sentido y cifras correspondientes a las intensidades en la figura 6.ª.

Para distinguir estas intensidades, las colocamos entre paréntesis.

Considerándolos aislados, equilibramos los circuitos *B, C, D* y *E,* para lo que son precisos los cálculos siguientes, destacando que para mayor facilidad de cálculo se han tomado productos de "kilómetros por amperios" en lugar de "Resistencias por amperios", ya que ambos son proporcionales en la vía en rampa, y se ha tenido en cuenta el factor $K = 1{,}2$ para la vía en pendiente.

Circuito B:

$$\text{Desequilibrio } \overset{B}{\Sigma} R\,I = (500 \,.\, 6 + 300 \,.\, 5) \,.\, 1{,}2 - (600 \,.\, 3 + 1\,500 \,.\, 8) = -8\,400; \quad I_B = -\frac{\overset{B}{\Sigma} R\,I}{R_B} = \frac{8\,400}{11 \times 2{,}2} = 347{,}10 \text{ amp.}$$

Circuito C:

$$\text{Desequilibrio } \overset{C}{\Sigma} R\,I = 300 \,.\, 5 \,.\, 1{,}2 - 600 \,.\, 4 = -600;$$

$$I_C = -\frac{\overset{C}{\Sigma} R\,I}{R_C} = \frac{600}{8 \,.\, 2{,}2} = 34{,}09 \text{ amp.}$$

Circuito D:

$$\text{Desequilibrio } \overset{D}{\Sigma} R\,I = 100 \,.\, 9 \,.\, 1{,}2 + 800 \,.\, 8 = 7\,480;$$

$$I_D = -\frac{\overset{D}{\Sigma} R\,I}{R_D} = -\frac{7\,480}{12 \,.\, 2{,}2} = -283{,}33 \text{ amp.}$$

Circuito E:

$$\text{Desequilibrio } \overset{E}{\Sigma} R\,I = (100 \,.\, 2 - 300 \,.\, 7)\, 1{,}2 + (1\,800 \,.\, 4 + 800 \,.\, 5) = 8\,920; \quad I_E = -\frac{\overset{E}{\Sigma} R\,I}{R_E} = -\frac{8\,920}{9 \,.\, 2{,}2} = -450{,}50 \text{ amp.}$$

El desequilibrio que después de las operaciones anteriores tiene el circuito *A* (equivalente a diferencia de tensiones en las dos subestaciones, por la línea de la vía en rampa) es el siguiente:

$$\overset{A}{\Sigma} R\,I = (1\,500 \,.\, 8 + 600 \,.\, 7 - 800 \,.\, 13 - 1\,800 \,.\, 4) - 347{,}10 \,.\, 11 - 34{,}09 \,.\, 8 + 283{,}33 \,.\, 12 + 450{,}50 \,.\, 9 = +1\,963{,}64.$$

La intensidad que equilibra el circuito *A,* es:

$$I_A = -\frac{\overset{A}{\Sigma} R \,.\, I}{R_A} \,.\, \frac{1 + K}{K} = -\frac{1\,936{,}64}{40} \,.\, \frac{2{,}2}{1{,}2} = -90{,}00 \text{ amp.,}$$

que repercute sobre los demás circuitos con:

$$I_{BA} = I_{CA} = I_{DA} = I_{EA} = -\frac{\overset{A}{\Sigma} R \,.\, I}{R_A} \,.\, \frac{1}{K} = -\frac{1\,936{,}64}{40} \,.\, \frac{1}{1{,}2} = -40{,}91 \text{ amp.}$$

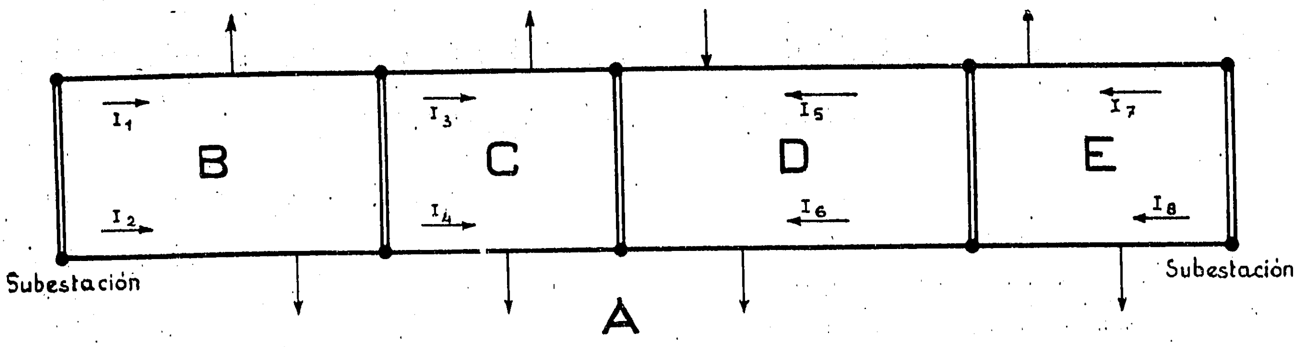


Figura 7.ª

Las intensidades totales de compensación son, pues, las siguientes:

En el circuito A: $I_A = -90{,}00$ amp.

En el circuito B: $I_B + I_{BA} = +347{,}10 - 40{,}91 = + 306{,}19$ amp.

En el circuito C: $I_C + I_{CA} = +34{,}09 - 40{,}91 = - 6{,}82$ amp.

En el circuito D: $I_D + I_{DA} = -283{,}33 - 40{,}91 = - 324{,}24$ amp.

En el circuito E: $I_E + I_{EA} = +450{,}50 - 40{,}91 = - 491{,}41$ amp.

Estas intensidades de compensación las indicamos en la figura 6.ª sin ninguna indicación especial y con la flecha de trazos según el sentido. En todos estos circuitos se ha tomado como positivo el del giro de las agujas del reloj.

La superposición en cada trozo de la intensidad prevista, con la de compensación, habida cuenta de los signos, constituye la solución. En la misma figura 6.ª se han destacado estas intensidades mediante un marco rectangular.

Para resolver el mismo problema, haciendo uso de las ecuaciones de Kirchhoff directamente encontramos ocho incógnitas, I_1 a I_8, indicadas en la figura 7.ª, para las que contamos con las siguientes ecuaciones de condición:

$I_1 + I_2 + I_7 + I_8 =$ suma de las cargas.

$I_1 + I_2 =$ cargas del circuito $B + I_3 + I_4$.

$I_7 + I_8 =$ cargas del circuito $E + I_5 + I_6$.

Equilibrio del circuito A.

Equilibrio del circuito B.

Equilibrio del circuito C.

Equilibrio del circuito D.

Equilibrio del circuito E.

Se comprende la gran dificultad material que presenta tal sistema de ecuaciones, haciéndose ostensible, por el contrario, la facilidad con que se ha resuelto utilizando el método descrito.