

APLICACIONES ESPACIALES DEL METODO DE LAS TRANSFORMACIONES

Por FEDERICO GODED ECHEVERRIA,
Ingeniero de Caminos.

Continúa el autor explicando este método, que definió en otro artículo del mismo título en nuestro número anterior, y anuncia al final la continuación en el próximo.

II

Características de la inversión.

En la inversión de J. H. Michell, que acabamos de mencionar, los tensores de los puntos homólogos son tales que un contorno libre de fuerzas se transforma en un contorno sometido a una tracción normal uniforme, y a una presión normal uniforme corresponde frecuentemente en el contorno inverso una distribución de fuerzas análogas.

No sucede lo mismo en esta nueva inversión, ya que, siendo más complejas que en plana las relaciones entre los elementos del tensor elástico y la función de tensión, la transformación hallada para esta última función supone una vinculación menos sencilla que allí entre los tensores correspondientes a dos puntos homólogos. Aquí, por lo tanto, los sistemas de fuerzas que actúan sobre las superficies inversas no están ligados por leyes tan simples como las antes mencionadas, siendo también, debido a ello, más complicada la utilización de esta transformación.

Para llegar a distribuciones de fuerzas que se presenten con frecuencia en la práctica, conviene emplear, además, otras propiedades de la ecuación $L\varphi = 0$, las cuales estudiaremos a continuación.

Otras propiedades de la ecuación $L\varphi = 0$.

Del examen de las ecuaciones [18] y [21] se deduce que es posible establecer otra identidad del mismo tipo de la ya encontrada.

Esta nueva identidad tendrá la forma siguiente:

$$R^x L\varphi \equiv N(\varphi T). \quad [32]$$

Efectivamente, para:

$$\left. \begin{aligned} n &= -1, \\ q &= m+1, \end{aligned} \right\} \quad [33]$$

se observa que los coeficientes de las ecuaciones [18] y [21] que ocupan los lugares del mismo orden tal como están escritas, son iguales en ambas, y que los

exponentes de R difieren en cinco unidades. Podremos, pues, escribir:

$$R^5 L(f R^m)^{-1} \equiv N(f \cdot R^m), \quad [34]$$

y haciendo aquí $m = 1$, tendremos finalmente:

$$R^5 L\varphi \equiv N(\varphi R). \quad [35]$$

Así, pues, si:

$$L\varphi = 0, \quad [36]$$

será:

$$N(\varphi R) = 0. \quad [37]$$

Y haciendo en esta ecuación $R = R_1$ y $\psi = \psi_1$, se comprueba que $R_1\varphi(R_1, \psi_1)$ verifica la ecuación [11].

Es, pues, una nueva función de tensión, escrita en el sistema R_1, ψ_1 . Efectuando en ella la sustitución [10] con $n = -1$, tendremos esta nueva función de tensión en el sistema original. Podremos, pues, escribir finalmente:

$$L[R^{-1}\varphi(R^{-1}, \psi)] = 0. \quad [38]$$

Así, cuando φ es solución de la ecuación $L\varphi = 0$, la identidad [35] nos permite encontrar otra nueva solución de la misma ecuación.

En cambio, cuando φ es solución de $L^2\varphi = 0$, la identidad [28] permite encontrar, según vimos, la nueva función de tensión [30], pudiéndose en este caso escribir:

$$L^2[R\varphi(R^{-1}, \psi)] = 0. \quad [39]$$

Además, la ecuación $L\varphi = 0$ tiene otras útiles propiedades. En efecto, esta ecuación, mediante el cambio de variables:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + z^2}, \\ \psi &= \arctg \frac{r}{z}, \end{aligned} \right\} \quad [40]$$

se transforma en la siguiente ecuación de tipo elíptico:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad [41]$$

siendo inmediato comprobar que:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} S \varphi = S \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}, \quad [42]$$

llamando S al operador primer miembro de [41].

Luego si $S \varphi = 0$ es $S \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n} = 0$. Así, conocida una función de tensión, pueden obtenerse otras nuevas funciones por simple derivación.

También es fácil comprobar el desarrollo siguiente:

$$S(\varphi z) = z S \varphi + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad [43]$$

y aplicando de nuevo a los dos miembros el operador S , tendremos:

$$S^2(\varphi z) = S(z S \varphi) + 2 S \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad [44]$$

Por lo tanto, si $S \varphi = 0$, como en virtud de la propiedad anterior es $S \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, resultará que φz es también una función de tensión.

Utilizando conjuntamente las cuatro propiedades expuestas, se puede, partiendo de las soluciones generales conocidas de las ecuaciones $L^2 \varphi = 0$ y $S^2 \varphi = 0$, obtener otras nuevas funciones de tensión, pudiéndose así abordar la resolución de nuevos problemas elásticos. Veamos primeramente la forma de obtener estas nuevas funciones de tensión.

Obtención de la solución general del tipo $P = F(R) \times f(\psi)$.

Para llegar a ella conviene seguir el mismo método empleado para la solución del problema de Dirichlet en la esfera, cuando existe simetría cilíndrica (*). Busquemos, pues, las soluciones de la forma indicada de la ecuación $L \varphi = 0$.

Tendremos:

$$L(F, f) = f \left[F'' + \frac{2}{R} F' \right] + \frac{F}{R^2} [f'' + \text{ctg } \psi f']. \quad [45]$$

Separando las variables, escribiremos:

$$\frac{R^2 F''}{F} + 2 R \frac{F'}{F} = - \frac{f'' + \text{ctg } \psi f'}{f}, \quad [46]$$

y esta ecuación solamente puede verificarse si son simultáneamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R^2 F''}{F} + 2 R \frac{F'}{F} &= \omega^2; \\ \frac{f'' + \text{ctg } \psi f'}{f} &= -\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (\omega = \text{constante}). \quad [47]$$

(*) Ver *Ecuaciones diferenciales*, del Prof. Puig Adam, pág. 315 y siguientes.

Reduciéndose así el problema a la integración de las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden anteriores.

La primera se puede escribir así:

$$R^2 F'' + 2 R F' - \omega^2 F = 0, \quad [48]$$

observándose que es una ecuación lineal de tipo Euler, cuya solución se sabe se obtiene inmediatamente transformándola en otra de coeficientes constantes.

Así se obtiene:

$$F = A R^n + B R^{-n-1}, \quad [49]$$

siendo:

$$\omega^2 = n(n+1). \quad [50]$$

La segunda ecuación de [47], reemplazando previamente en ella el valor de ω^2 anterior, se escribe así:

$$f'' + \text{ctg } \psi f' + n(n+1)f = 0. \quad [51]$$

Efectuando aquí el cambio de variable $x = \cos \psi$, ésta se transforma en la siguiente:

$$(1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} + n(n+1)f = 0, \quad [52]$$

que es la ecuación de Legendre, cuya integral general es la siguiente:

$$f = a_0 P_n(x) + a_1 Q_n(x), \quad [53]$$

siempre que $2n$ no sea un impar positivo o negativo $\sigma - 1$, siendo $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ las funciones de Legendre de primera y segunda especie:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \times 4(2n-1)(2n-3)} \dots \right]; \\ Q_n(x) &= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \times 4(2n+3)(2n+5)} \dots \right], \end{aligned} \quad [54]$$

las cuales, para valores de n no enteros, son series que convergen para $|x| > 1$. Para valores de n enteros, positivos, la de primera especie, y para valores de n enteros, negativos, la de segunda especie, se convierten en los polinomios de Legendre llamados funciones esféricas, que son los que normalmente se utilizan en elasticidad.

Así, pues, para valores de n enteros, positivos, y dado que $\cos \psi < 1$, se hace en [53] $a_1 = 0$, y para valores de n , enteros, negativos, se hace $a_0 = 0$.

Las integrales generales correspondientes a los tres casos anteriormente mencionados, en que la solución [53] cae en defecto (*), así como la solución obtenida por el método de Frobenius (**), válida en el intervalo $[-1, +1]$, entrarán dentro de la denominación genérica $f(\psi)$, no teniendo objeto para el presente trabajo escribirlas explícitamente.

Podremos, pues, escribir finalmente:

$$\varphi = [A R^n + B R^{-n-1}] \times f(\psi). \quad [55]$$

Si aplicamos a esta ecuación la transformación indicada en [38], obtenemos:

$$R^{-1} \varphi(R^{-1}, \psi) = [A R^{-n-1} + B R^n] f(\psi); \quad [56]$$

es decir, la misma ecuación anterior, en la cual han variado únicamente las constantes. Este resultado era de esperar, ya que la solución [55] obtenida es la más general de la forma indicada de $L = 0$.

Por el contrario, si aplicamos la transformación [39], obtenemos:

$$R \varphi(R^{-1}, \psi) = [A R^{1-n} + B R^{n+2}] \times f(\psi) = F_1(R) f(\psi). \quad [57]$$

Comprobemos que esta función es solución de $L^2 = 0$.

El resultado de aplicar aquí el operador L , se obtendrá reemplazando en [45] F por F_1 , llegándose así a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} L(F_1 \cdot f) &= [A(n^2 - 3n + 2)R^{-n-1} + B(n^2 + 5n + 6)R^n] \times f + f[A R^{-1-n} + B R^n] \frac{f'' + \operatorname{ctg} \psi f'}{f} = \\ &= f[A(n^2 - 3n + 2)R^{-n-1} + B(n^2 + 5n + 6)R^n] f - \\ &\quad - n(n+1)f[A R^{-n-1} + B R^n] = \\ &= [(2 - 4n)A R^{-n-1} + B(4n + 6)R^n] \times f, \quad [58] \end{aligned}$$

que es una ecuación del mismo tipo de la [53].

Por consiguiente, $L^2 F_1 f = 0$. Una solución de la forma general buscada será, pues:

$$\varphi = [A R^n + B R^{-n-1} + C R^{1-n} + D R^{n+2}] f(\psi), \quad [59]$$

comprobándose que se obtiene la misma función si volvemos a aplicar la transformación [39].

(*) Estas tres pueden verse, por ejemplo, en *Differential Equation*, de A. R. Forsyth, séxth edit., 1933, London, págs. 165-169.

(**) Ver el libro ya mencionado del Prof. Puig Adam, págs. 143-145, o el de *Ecuaciones diferenciales* del Prof. Marín Toyos, págs. 252-258.

Para obtener la solución general de la forma $\varphi = F(R)$, basta hacer $n = 0$, en cuyo caso, y teniendo en cuenta que $P_0(\cos \psi) = 1$, resulta (*):

$$\varphi = A + B R^{-1} + C R + D R^2; \quad [60]$$

solución a la que también puede llegarse partiendo de la ecuación lineal de cuarto orden:

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d \varphi}{dR} \right) = 0, \quad [61]$$

puesto que esta ecuación se deduce de $L^2 \varphi = 0$, cuando $\varphi'_{\psi} = 0$.

Conviene señalar, haciendo un paréntesis en la exposición, que la función de tensión que resuelve el problema de Lord Kelvin se obtiene de esta última ecuación para $A = B = D = 0$, y que las que resuelven el problema de Lamé en la esfera, y el problema de Boussinesq-Cerruti, se obtienen también partiendo de esta ecuación con $A = C = D = 0$, e integrando una o dos veces con respecto a z , respectivamente, y combinándolas después con las elementales $\log r$, para el primer problema, y $z \log r$ y la de Lord Kelvin, para el segundo problema.

En cambio la solución general de la forma $\varphi = f(\psi)$ no se puede obtener de [59], dando a n los valores que anulan los distintos exponentes de R . En efecto, para estos valores de n se tiene:

$$\left. \begin{aligned} P_0(\cos \psi) &= Q_{-1}(\cos \psi) = 1, \\ P_1(\cos \psi) &= Q_{-2}(\cos \psi) = \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad [62]$$

obteniéndose únicamente la solución:

$$\rho = A + B \cos \psi. \quad [63]$$

Sin embargo, esta solución nos va a permitir hallar la general por medio de sencillas cuadraturas únicamente. En efecto, esta última será la integral general de la ecuación lineal de cuarto orden siguiente:

$$\begin{aligned} &2 \left[\frac{d^2 \varphi}{d\psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \frac{d \varphi}{d\psi} \right] + \\ &+ \left[\frac{d^2}{d\psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \frac{d}{d\psi} \right] \left[\frac{d^2 \varphi}{d\psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \frac{d \varphi}{d\psi} \right] = 0, \quad [64] \end{aligned}$$

que se deduce de $L^2 \varphi = 0$ cuando $\frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0$.

(*) Tomamos desde ahora y en lo sucesivo:

$$a_0 \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = 1; \quad a_1 \cdot \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = 1.$$

Las soluciones de:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\psi^2} + \operatorname{ctg} \psi \frac{d\varphi}{d\psi} = 0, \quad [65]$$

son también soluciones de la anterior, y esta última se integra mediante dos cuadraturas, obteniéndose:

$$\varphi = C \log \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} + A. \quad [66]$$

Se conocen, pues, tres soluciones particulares de la ecuación [64] y podrá, por lo tanto, reducirse a una de primer orden.

Así, efectuando la sustitución $z = \frac{d\varphi}{d\psi}$ y desarrollando [64], se llega a la ecuación de tercer orden:

$$z''' + 2z'' \operatorname{ctg} \psi - z' \operatorname{ctg}^2 \psi + z \operatorname{ctg} \psi \frac{3 - 2 \cos^2 \psi}{\operatorname{sen}^2 \psi} = 0, \quad [67]$$

la cual debe tener las soluciones particulares:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{d}{d\psi} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right] = \frac{1}{\operatorname{sen} \psi}; \\ z_2 &= \frac{d}{d\psi} [-\cos \psi] = \operatorname{sen} \psi. \end{aligned} \right\} \quad [68]$$

Para rebajar una unidad el orden de esta ecuación, efectuamos la sustitución:

$$z = u \operatorname{sen} \psi, \quad [69]$$

la cual la transforma en la:

$$u''' \operatorname{sen} \psi + 5u'' \cos \psi + u' \frac{3 \cos 2\psi}{\operatorname{sen} \psi} = 0; \quad [70]$$

y haciendo aquí:

$$v = \frac{dv}{d\psi}, \quad [71]$$

tenemos ya una de segundo orden, de la cual conocemos la solución particular:

$$v = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \psi} \right) = -\frac{2 \cos \psi}{\operatorname{sen}^3 \psi}. \quad [72]$$

Para rebajar otra unidad el orden de la ecuación en v obtenida, efectuamos la sustitución:

$$v = -\frac{2 \cos \psi}{\operatorname{sen}^3 \psi} \omega; \quad [73]$$

llegándose así, finalmente, a la ecuación:

$$\operatorname{sen} \psi \cos \psi \omega'' = (1 + \operatorname{sen}^2 \psi) \omega'; \quad [74]$$

o bien:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \psi}{\operatorname{sen} \psi \cos \psi} = \operatorname{tg} \psi + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \psi}; \quad [75]$$

siendo:

$$y = \frac{d\omega}{d\psi}. \quad [76]$$

Integrando en [75] se tiene:

$$\log y = -\log \cos \psi + \log \operatorname{tg} \psi, \quad [77]$$

o bien:

$$y = \frac{\operatorname{sen} \psi}{\cos^2 \psi}; \quad [78]$$

y de aquí, y por sucesivas cuadraturas que no presentan dificultad alguna, se deducen sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{\cos \psi}; \\ v &= \frac{2}{\operatorname{sen}^3 \psi}; \\ u &= \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} - \frac{\cos \psi}{\operatorname{sen}^2 \psi}; \\ \varphi &= \cos \psi \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad [79]$$

La integral general buscada es, pues, la siguiente:

$$\varphi = A + B \cos \psi + C \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + D \cos \psi \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \quad [80]$$

Su importancia en la resolución de problemas prácticos se pone de relieve observando que el segundo término de la misma nos da la función que resuelve uno de los problemas de Lamé en el macizo indefinido (el del estado de tensiones originado por la actuación de dos fuerzas iguales y de sentido contrario en el origen), y que el tercer término da de nuevo la solución del centro de presión en el origen (problema de Lamé) al combinarlo con la función elemental $\log r$.

El estudio de este cuarto término se ha revelado asimismo fecundo (*).

Con las soluciones halladas puede ya obtenerse sin dificultad la forma general buscada. Para ello nos bastará aplicar primero la transformación [38] a la función [66] (solución de $L\varphi = 0$), y después, la

(*) El análisis completo de los tensores derivados de las funciones de tensión aquí obtenidas será objeto en breve de una publicación aparte, en la que se incluirán, asimismo, nuevas aplicaciones planas del método de las transformaciones.

transformación [39] a la función así obtenida y a la [80], obteniéndose así la nueva función:

$$\varphi = (A B^{-1} + B R + C R^2) \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + D \cos \psi \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad [81]$$

no comprendida en las anteriormente reseñadas, y las funciones R^{-1} y $R \cos \psi$ comprendidas en la [59].

La función de tensión de la forma general indicada será, pues, la siguiente (*):

$$\begin{aligned} \varphi = & [A R^n + B R^{-n-1} + C R^{1-n} + D R^{n+2}] f(\psi) + \\ & + [A_1 + B_1 R^{-1} + C_1 R + D_1 R^2] \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \\ & + [A_2 + B_2 R] \cos \psi \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad [82] \end{aligned}$$

(*) $f(\psi)$ será aquí la integral general de la ecuación [52], anulándose los coeficientes a_0 ó a_1 en los casos mencionados.

pudiéndose decir que, prácticamente, todos los problemas clásicos de este tipo, en que existe simetría con respecto a un eje, exceptuando los de cilindros y algunos de placas circulares, se resuelven utilizando distintos términos de la función de tensión anterior. Pero conviene indicar que la función de tensión normalmente utilizada en estos casos, que es la denominada función de tensión de los cilindros, es también, como veremos a continuación, y por la aplicación conjunta de las cuatro propiedades indicadas anteriormente, susceptible de una generalización sumamente útil.

(Continuará.)