

LAS MATEMATICAS EN LAS NUEVAS MECANICAS

Por ANTONIO LOPEZ FRANCO,

Ingeniero de Caminos.

Se trata de una Memoria del autor, en colaboración con su hijo Carlos, Doctor en Ciencias Químicas, presentada al XXI Congreso de la Sociedad Hispano-Portuguesa para el Progreso de las Ciencias, y resulta un trabajo muy a propósito para que nuestros lectores se formen una idea acertada de la aplicación de las Matemáticas a las nuevas teorías de la Física.

Las primeras noticias que me llegaron de la celebración, en la ciudad de Málaga, del XXI Congreso de la Sociedad Hispano-Portuguesa para el Progreso de las Ciencias, coincidieron con la preparación de unos trabajos sobre Física matemática, que actualmente estoy realizando, en colaboración con mi hijo el Doctor en Ciencias Químicas Carlos López Pustos, muy aficionado a este género de estudios, y acto continuo me surgió la idea de aprovechar parte de la labor, para la presentación de una Memoria sobre el mismo tema, en el referido Congreso, con lo que consigo a la vez dar satisfacción a mis anhelos de no dejar de trabajar dentro de la Sociedad Hispano-Portuguesa, a la cual pertenezco desde los primeros años de su fundación, que coincidieron con los también primeros de mis actividades profesionales.

No obstante ser un tema aparentemente más propio para la Sección de Matemáticas o de Ciencias Físicas, lo presento y someto a la consideración de la Sección de Ciencias de Aplicación, por la razón de que los trabajos que comprende los vengo realizando no como especialista en la materia, pues carezco de títulos para ello, sino sencillamente como Ingeniero, siempre aficionado a este género de disciplinas, sobre las que tuve que profundizar algo, en los años en que fui profesor de Química en la Escuela Especial del Cuerpo a que pertenezco y en los que tuve necesidad de dar a conocer a los alumnos conceptos y teorías que entonces se conceptuaban como novedades y que hoy se las considera, si no como antiguallas, sí como pertenecientes a la *ciencia clásica*.

No expondré aquí la historia de las investigaciones llevadas a cabo, y vicisitudes de las mismas, durante estos treinta años en todos los países, entre otras razones, por ser ya conocidas y estar expuestas en muchos de los tratados recientes. Puede decirse que el punto de partida de los estudios y descubrimientos en las nuevas mecánicas lo constituyó el conocimiento de la estructura interna del átomo, sobre el cual Rutherford ideó el esquema ya tan conocido de un microsistema planetario, formado por un núcleo cargado de electricidad positiva, y un cierto número de electrones, variable de un elemento a otro, que re-

presentan cargas negativas, en número equivalente, girando a su alrededor; aunque la configuración es muy parecida a los sistemas planetarios celestes, su mecánica resultó ser muy distinta; tan distinta, que hubo necesidad de buscar una especial para el caso, pues en los átomos se da la circunstancia inexplicable de que no son realizables todos los movimientos posibles. Los electrones, según Bohr y Sommerfier, han de circular, precisamente, por órbitas determinadas, definidas cada una por una cierta energía que varía de una a otra según números enteros; los electrones pueden saltar entre ellas, pero nunca pueden ocupar puntos intermedios, y cada salto se exterioriza por una absorción o desprendimiento de una energía, valorada ésta mediante un análisis espectral, en la diferencia positiva o negativa, entre ambos niveles energéticos. Ahora bien: la moderna mecánica cuántica admite, por estar plenamente demostrado, la existencia de estos niveles energéticos cuantificados, así como los estados estacionarios del átomo que éstos definen, pero desecha todo lo relativo a las órbitas electrónicas, que, no sólo no han sido experimentalmente comprobadas, sino que se ha visto la imposibilidad de esta comprobación.

No obstante, el esquema planetario atómico se ha extendido tanto su conocimiento, que resulta difícil no referirse a él en los razonamientos y no puede por menos de servir de base al análisis de muchos conceptos de las modernas mecánicas, máxime teniendo en cuenta que sus autores han procurado siempre y conseguido en gran parte la adaptación a las reparaciones que se les iba haciendo, admitiendo rectificaciones y postulados que permanecen como tales, mientras no surían otros hechos que los contradigan.

De aquí que al prohibirse las concepciones imaginativas y no poder contar con la existencia de medios hipotéticos, y por otra parte la inseguridad de los resultados experimentales (Principio de indeterminación) que la mayor parte de las veces no aportan más que datos probabilísticos, hemos de renunciar a la explicación lógica de muchos fenómenos, así como a efectuar razonamientos intuitivos sobre ellos que son, generalmente, de dificultosa expresión, cuando se trata

de exponerlos, o de confusa interpretación al ser leídos, sobre todo si proceden de traducciones, y que además, por otra parte, invaden, sin querer, el terreno de la Filosofía, en el que tan fácil es perderse, sobre todo a los profanos. Por todas estas razones no tenemos más remedio que ampararnos en los recursos matemáticos, donde tienen cabida apropiada las inseguridades e imprecisiones citadas y con las que es fácil desarrollar procesos de cálculo que, si resultan a veces artificiosos y complicados, son siempre expresados en un lenguaje universal, al alcance de todos aquellos que tengan la preparación debida, bastando para ello los conocimientos firmes característicos de la tradicional cultura matemática del Ingeniero, siempre susceptible de ampliación o mejoramiento en el momento necesario; por esta orientación hacia las matemáticas, se vienen ya desde hace tiempo pronunciando los físicos y químicos, principalmente los primeros, pero que recientemente ha tomado gran incremento, precisamente por las razones antes expuestas, a partir de los trabajos de De Broglie, con su *teoría ondulatoria* de la materia; ésta consiste sencillamente en hacer extensiva a la misma el dualismo existente en las radiaciones, que, comenzando por el caso concreto de la luz, abarca hoy a todo género de ellas, habiendo vuelto a tomar actualidad la antigua teoría de Newton sobre la emisión: en el momento presente, así como se considera en toda radiación a la vez el corpúsculo y la onda, explicándose los fenómenos, ateniéndose, según los casos, a uno o a otro concepto, De Broglie considera en los movimientos de partículas materiales la existencia de una onda asociada a los mismos.

Con esto inició De Broglie el desarrollo de una teoría, físicomatemática, especial, a la que después Schrodinger la dió alcances insospechados, que hoy día constituyen un aparato matemático de grandes vuelos (la mecánica ondulatoria), no todavía concluido, pero con el cual se viene consiguiendo, no sólo dar explicación satisfactoria a muchas cosas que, no obstante los esfuerzos de sus autores, quedaban sin solucionar, en las llamadas hace treinta años teorías modernas, sino que es a la vez capaz de prever hechos nuevos. Casi simultáneamente, Heisenberg, inspirado en el principio de correspondencia de Bohr y siguiendo caminos completamente distintos, en colaboración con Born y Jordan, creó su *mecánica cuántica*, consiguiendo resultados idénticos a los de Schrodinger, y más recientemente Dirac aquilató y perfeccionó notablemente estos trabajos.

Los fundamentos de los procesos seguidos fueron tomados, como no podía por menos de ser, de estudios anteriores efectuados dentro de las matemáticas puras, con carácter abstracto, pero que lograron orientarlos hacia los objetivos físicos que perseguían; te-

niendo en cuenta las características, de fenómenos periódicos, en relación con magnitudes discretas y números enteros, que presentan los problemas a resolver en el campo de la Física, procuraron dentro del campo matemático relacionarlos con las funciones periódicas y problemas de soluciones cuantificadas; el éxito hasta ahora, si no completo, viene siendo plenamente satisfactorio.

Sobre estas cuestiones existe hoy día una abundante literatura nacional y extranjera, pero generalmente se tratan los temas, unas veces, dentro de la alta especulación científica, sólo propia de un número limitado de especializados, y otras, con pretensiones de vulgarizar los problemas, sustituyendo los procesos matemáticos, por no considerarles al alcance de todos los lectores, con exposiciones y razonamientos intuitivos, de los que ya hemos hablado antes. Por otra parte, el aparato matemático creado, que a simple vista llama la atención por lo artificioso de algunos de sus procedimientos, se caracteriza precisamente porque en su confección se ha mantenido un paralelismo constante con la investigación simultánea sobre Física experimental y la adaptación de ambas disciplinas, la matemática y la física, es la que justifica los artificios de cálculo a que antes nos referíamos; además, por regla general, en las concepciones matemáticas desarrolladas, en busca de la explicación de algún hecho físico, siempre se ha efectuado en un ambiente de altura y generalización dentro del cual la obtención de la fórmula concreta que dé explicación al fenómeno físico, resulta un caso particular, de una teoría general, de amplio carácter abstracto y a la vez han de ser también casos particulares todos aquellos que se realicen con arreglo a las leyes de la Mecánica clásica; por esta razón, no debe chocar el empleo de magnitudes complejas, espacios multidimensionales, ampliación insospechada de los procedimientos vectoriales, etc., etc.

La racionalidad y acierto en el empleo de estas bases queda demostrado por el hecho ya citado de que dos de los principales investigadores, Schrodinger y Heisenberg, desarrollaron con el mismo criterio fundamental, pero con completa independencia y mediante procesos de cálculos, completamente diferentes, dos teorías con las cuales han llegado a las mismas conclusiones; si bien la coincidencia es sólo de carácter matemático, puesto que difieren en las interpretaciones físicas de las mismas.

Schrodinger expone sus teorías mediante el empleo de *operadores*, y Heisenberg, con el de *matrices*; ambos elementos de cálculo, operadores y matrices, son conocidos de antiguo en las matemáticas puras; el primero consiste en representar por símbolos los procesos de cálculos más o menos complicados, susceptibles de adaptación a diferentes casos, que pue-

dan presentarse y tengan lugar con frecuencia, y las matrices no son más que tablas de valores estadísticos, correspondientes a una misma magnitud determinada en circunstancias distintas; ahora bien: la particularidad consiste en la intervención de unos y otros en los procesos de cálculo, como si fueran números, pudiendo por tanto, como tales, ser sometidos a todo género de operaciones aritméticas, pero por algoritmos no siempre coincidentes con los corrientemente empleados para los números propiamente dichos. Dirac hace la distinción, llamando a estos últimos números n , y a los anteriores, números p ; bien entendido que, aunque se rijan cada uno por su algoritmo propio, como quiera que los números p están integrados por números n , los cálculos finales han de ser siempre entre números n .

Otros conceptos matemáticos de los que hay necesidad de echar mano con frecuencia, son los relacionados con la denominación de *valores propios*; en general, se entiende por valor propio de una función a todos aquellos que se pueden atribuir a un parámetro, que figure en la misma, con los que únicamente dicha función tenga razón de ser; un ejemplo sencillo lo tenemos en las ecuaciones del Álgebra elemental, en las que los valores de las incógnitas representan valores propios, puesto que fuera de ellos la igualdad representativa de la ecuación no se cumple; pero cuando más interés despierta este concepto es en la integración de un grupo de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se presenta en la resolución de algunos problemas de la Mecánica ondulatoria en su relación con la Física atómica. El mismo concepto de valores propios se hace también extensivo a la teoría de los operadores para todos los valores que pueden tomar los mismos, capaces de transformarlos en sencillos factores numéricos; es decir, si tenemos la igualdad:

$$Af = \lambda f,$$

cuyo primer miembro representa la aplicación del operador A a la función f , y el segundo, el producto de un número λ por la misma; a este número λ se le denomina valor propio del operador A .

Como quiera que en la mayoría de los casos los valores propios son números cuantificados enteros, se ha perseguido en Física matemática relacionar estas teorías con los fenómenos de carácter cuántico.

Con objeto de que, como ya dijimos antes, han de considerarse siempre las fórmulas de la Mecánica clásica como casos límites o particulares de las obtenidas por los procedimientos nuevos, se sigue la marcha de desarrollar los cálculos partiendo de las fórmulas clásicas, sustituyendo en ellas los números n

por números p convenientemente relacionados con aquéllos.

Para poder exponer de un modo breve algo que dé idea de lo que consiste la base matemática empleada por los investigadores actuales, seguiremos un procedimiento inverso al indicado, o sea que partiremos de algunas cuestiones sencillas, al alcance de todos, cuya generalización, que sólo apuntaremos, nos lleva racionalmente al conocimiento del alcance y características del aparato matemático general y completo, pero del que sólo nos proponemos dar una ligera idea sintética.

* * *

Consideremos dos puntos, P_1 y P_2 , en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, y sean, respectivamente, $x_1 y_1$ y $x_2 y_2$ las coordenadas de cada una de ellos, longitudes que también pueden representar las componentes sobre los mismos ejes de los dos vectores OP_1 y OP_2 , a los que llamaremos r_1 y r_2 , y supongamos que entre los citados pares de coordenadas o componentes existen las relaciones:

$$x_2 = a_{11} x_1 + a_{12} y_1;$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} y_1;$$

siendo las a magnitudes numéricas; esto nos dice que el paso de las coordenadas de P_1 a las de P_2 se hace mediante una serie de operaciones cuyo conjunto constituye lo que antes designábamos con el nombre de un operador, al cual llamaremos A , y que vendría a la vez representado por la matriz:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

y las fórmulas anteriores las podemos expresar, simbolizando, por:

$$P_2 = A P_1.$$

Ahora bien: sabemos por cálculo vectorial que el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos escalares de sus componentes, o sea en este caso:

$$r_1 r_2 \cos \alpha = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

o sea:

$$(r_1 r_2) = (x_1 x_2) + (y_1 y_2) (*);$$

y teniendo en cuenta las primitivas ecuaciones y suponiendo en ellas $a_{12} = a_{21}$, resulta:

$$(r_1 r_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 y_1 + a_{22} y_1^2.$$

(*) En los procedimientos de cálculo vectorial se acostumbra a expresar los productos escalares encerrando los factores en un paréntesis curvo.

Hagamos ahora una transformación de coordenadas, conservando el origen, y haciendo un giro hasta que los nuevos ejes coincidan con los de la cónica que tenga por ecuación:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = 1,$$

el ángulo de este giro, que llamaremos β , se determina fácilmente por los procedimientos corrientes de la Geometría analítica, obteniéndose el valor:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 - 4 a_{12}^2}}{2 a_{12}}.$$

La ecuación de la cónica anterior tendrá entonces la forma:

$$b_{11} x^2 + b_{22} y^2 = 1.$$

La fórmula simbólica de la operación será:

$$P_2 = B P_1;$$

la matriz correspondiente al operador B será, análogamente:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix},$$

y el sistema de ecuaciones que constituyen el operador:

$$x_2 = b_{11} x_1,$$

$$y_2 = b_{22} y_1.$$

La complicada aplicación del operador A se reduce a la sencilla multiplicación por b_{11} y b_{22} , que representan dos valores propios del mismo, bien entendido que el llamado operador B no es más que otra expresión del A ; basta para verlo comprobar que las dos matrices A y B tienen el mismo determinante, que es el verdadero invariante de la transformación.

Para hacer la comprobación no hay que hacer más que echar mano de las fórmulas generales de transformación de coordenadas y combinarlas con la expresión anterior de $\operatorname{tg} \beta$, se llega así a los valores de las b en función de las a , que serán, llamando D al determinante:

$$b_{11} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 D}),$$

$$b_{22} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 D}).$$

El problema tiene además una curiosa interpretación geométrica, que consiste en que, determinando la polar de P_1 con relación a la cónica y a continuación

el polo de aquella con relación a la circunferencia de radio unidad, centrada en el origen, se obtiene el punto P_2 .

La misma cuestión puede plantearse en el espacio, y resolverse del mismo modo, por la transformación de una matriz de tercer grado simétrica con relación a la diagonal en una *matriz diagonal*, o sea que todos sus elementos sean nulos, menos los de la diagonal, los cuales constituyen los valores propios.

También se hará extensiva la interpretación geométrica hallando el plano polar de P_1 con relación a la cuádrica que sustituye a la cónica, y el polo de este plano con relación a la esfera de radio uno.

Todo lo expuesto anteriormente tiene aplicación en el campo de la Física moderna, pero ampliados los conceptos a espacios de n dimensiones, pudiendo este número alcanzar valores enormes y llegar hasta el infinito; no queda más remedio, por tanto, que penetrar en estos espacios, sobre los que existen teorías matemáticas muy interesantes, pero desprovistas en absoluto de interpretaciones de realidades físicas; por lo cual resulta inaplicable a ellos todo aquello que tenga carácter geométrico, y las ampliaciones de los conceptos ya expuestos en los espacios bi y tridimensionales han de tener carácter exclusivamente matemático; por estas razones, hemos de comenzar por definir previamente el concepto de espacio enedimensional.

Para expresar esto con claridad, supongamos previamente un cierto número de vectores en el espacio tridimensional $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, que los proyectamos sobre una línea recta en una dirección cualquiera; la suma de estas proyecciones tendrá por expresión:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_k c_k,$$

siendo $c_1, c_2, \dots, c_k$ los cosenos de los ángulos de sus direcciones con relación a la recta sobre la que se proyecta. Para que el valor de esta suma fuera cero sin que lo sean la totalidad de las c , podemos ir efectuando sumas parciales, que reemplazaremos por las resultantes obtenidas, hasta llegar a un tope, por ejemplo, de tres sumandos, a partir del cual no sea posible anular la suma:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = 0,$$

ésta representa tres vectores de resultante nula, lo cual no puede ocurrir más que en el plano (espacio bidimensional); si en lugar de 3 fuera 2 el tope, la suma anterior sólo podría verificarse estando los dos vectores en línea recta (espacio unidimensional), y si fuera 4, se sacaría la misma consecuencia en el espacio tridimensional.

Al ser el tope mayor que 4, la suma pierde el carácter geométrico que la veníamos dando y queda re-

ducida a lo que en la teoría general se denomina una *multiplicidad lineal*, en la que si n es el número mínimo de sumandos por bajo del cual la suma no puede ser cero, sino siéndolo los sumandos, se dice que la multiplicación lineal pertenece a un espacio de n dimensiones, y los elementos (puntos o vectores) a que se refieren los n sumandos se dice que son *linealmente independientes*.

Hagamos ahora referencia a la figura adjunta, en la que se destacan tres vectores, OA , OB , OC , en el espacio tridimensional, que designaremos, respectivamente, por x_1 , x_2 y x_3 , y que el sistema coordenado de referencia esté constituido; por el eje OY_1 cuya dirección coincide con el vector x_1 , el plano de los ejes OY_1 y OY_2 , que coincide a su vez con el de los vectores x_1 y x_2 , y el tercer eje, OY_3 , perpendicular a este plano; se deduce claramente de la figura:

1.º Que la diferencia entre el vector OB y el OB' , proyección del mismo sobre OA , nos da un tercer vector, OH , perpendicular a OA , o sea:

$$\vec{OH} = \vec{OB} - \vec{OB'}.$$

2.º Que restando del vector OC sus proyecciones sobre OA y OH , resulta un cuarto vector, OK , perpendicular al plano de los dos anteriores; es decir:

$$\vec{OK} = \vec{OC} - \vec{OC'} - \vec{OC''}.$$

Empleando las notaciones clásicas del cálculo vectorial y designando por u_1 , u_2 y u_3 las unidades correspondientes a cada uno de los ejes OY_1 , OY_2 y OY_3 , y por y_1 , y_2 , y_3 , los vectores en la dirección de cada uno de ellos, expresaremos las diferencias anteriores en la forma:

$$y_2 = x_2 - OB' u_1,$$

$$y_3 = x_3 - OC' u_1 - OC'' u_2;$$

y, además, teniendo en cuenta la definición de producto escalar o interno de dos vectores, tendremos:

$$OB' = x_2 \cos \alpha = (x_2 u_1),$$

$$OC' = x_3 \cos \xi = (x_3 u_1),$$

$$OC'' = x_3 \cos \gamma = (x_3 u_2),$$

y, por tanto, podremos expresar:

$$y_1 = x_1,$$

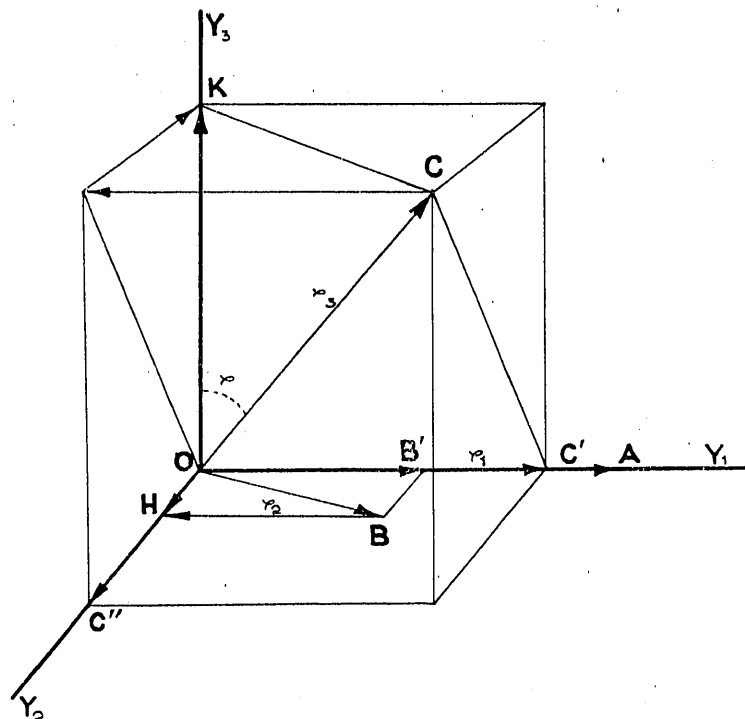
$$y_2 = x_2 - (x_2 u_1) u_1,$$

$$y_3 = x_3 - (x_3 u_1) u_1 - (x_3 u_2) u_2;$$

y penetrando en el espacio tetradimensional:

$$y_4 = x_4 - (x_4 u_1) u_1 - (x_4 u_2) u_2 - (x_4 u_3) u_3,$$

y así sucesivamente. Esto nos dice que, en general,



partiendo de un conjunto de vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$, linealmente independientes, podremos realizar otro conjunto análogo, $y_1, y_2, \dots, y_n$, en el que cada uno de ellos sea normal a los $n - 1$ restantes, lo que constituye un sistema ortogonal de referencia, que viene a ser el equivalente al sistema de ejes coordenados en los espacios geométricos. Las magnitudes $y_1, y_2, \dots, y_n$ representan los componentes de un vector y o las coordenadas de un elemento semejante al punto P_1 .

Para demostrar la perpendicular de todos los pares de elementos que constituyen el sistema de referencia, basta comprobar que sus productos internos $(y_i y_k)$ son iguales a cero; partiendo de los principios fundamentales del cálculo vectorial:

$$(u_i u_k) = 0; \quad (u_i u_i) = 1; \quad (u_k u_k) = 1.$$

Si tenemos otro elemento, P_2 , del mismo espacio, cuyas coordenadas referidas al sistema de referencia anterior sean $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$, sus relaciones con P_1 pueden expresarse por las ecuaciones:

$$y'_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n,$$

$$y'_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y'_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n,$$

que pueden reducirse a la expresión:

$$y' = A y,$$

siendo la matriz correspondiente al operador A :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

El producto interno de los dos vectores será:
 $(y, y') = (y A y) = y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + \dots + y_n y'_n = \sum y_i y'_i.$

Siendo la matriz A hermítica, e igualando a uno la suma anterior, después de haber sustituido los valores de la y' por sus correspondientes $A y$, nos resultaría una ecuación de la forma:

$$\sum a_{ii} y_i^2 + 2 \sum a_{ik} y_i y_k = 1,$$

que corresponde a una forma cuadrática equivalente a las cuádricas y cónicas en los espacios geométricos, y que también ahora, como entonces, mediante un cambio de sistema de referencia, puede reducirse su ecuación a:

$$\sum b_{ii} y_i^2 = 1.$$

Los cálculos a efectuar para esta transformación son bastante laboriosos; con ellos se obtiene la serie de elementos $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots, b_{nn}$, que representa los valores propios del operador.

Por otro lado, la ecuación que obtuvo Schrodinger es una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A y = 0,$$

cuya integral general es de la forma:

$$y = C_1 e^{x\sqrt{-a}} + C_2 e^{-x\sqrt{-a}},$$

de la cual se deriva una integral particular:

$$y = f(x),$$

con las condiciones iniciales:

$$y_0 = f(0) = 0, \quad y_\pi = f(\pi) = 0;$$

de las que se deduce:

$$y_0 = C_1 + C_2, \quad C_1 = -C_2;$$

y por tanto:

$$y = C_1 [e^{x\sqrt{-a}} - e^{-x\sqrt{-a}}].$$

Haciendo uso de la segunda condición, resulta:

$$x = \pi; \quad y_\pi = f(\pi) = C_1 [e^{\pi\sqrt{-a}} - e^{-\pi\sqrt{-a}}] = 0;$$

de donde:

$$e^{\pi\sqrt{-a}} - e^{-\pi\sqrt{-a}} = 0,$$

o sea:

$$e^{\pi\sqrt{-a}} = \frac{1}{e^{\pi\sqrt{-a}}},$$

de donde:

$$e^{2\pi\sqrt{-a}} = 1,$$

y por tanto:

$$2\pi\sqrt{-a} = 2\pi i \sqrt{a} = 0.$$

La anterior ecuación la podemos poner bajo la forma trigonométrica:

$$e^{2\pi i \sqrt{a}} = \cos 2\pi\sqrt{a} + i \sin 2\pi\sqrt{a} = \cos a + i \sin a = 1$$

de la cual se deduce la siguiente tabla de valores:

$a = 0$	$\dots$	$a = 0$
$a = \pi$	$\dots \sqrt{a} = \frac{1}{2} \dots$	$a = \frac{1}{4}$
$a = 2\pi$	$\dots \sqrt{a} = 1 \dots$	$a = 1$
$a = 3\pi$	$\dots \sqrt{a} = \frac{3}{2} \dots$	$a = \frac{9}{4}$
$a = 4\pi$	$\dots \sqrt{a} = 2 \dots$	$a = 4$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a = n\pi$	$\dots \sqrt{a} = \frac{n}{2} \dots$	$a = \frac{n^2}{4}$

De aquí resulta que partiendo de n , número entero:

$$n = 2\sqrt{a}, \quad \sqrt{-a} = \frac{n}{2} i,$$

y sustituyendo, se obtiene:

$$y = C_1 (e^{\frac{n}{2} ix} - e^{-\frac{n}{2} ix}),$$

y teniendo en cuenta que:

$$e^{\frac{n}{2} ix} = \cos \frac{n}{2} x + i \sin \frac{n}{2} x,$$

$$e^{-\frac{n}{2} ix} = \cos \frac{n}{2} x - i \sin \frac{n}{2} x,$$

el valor de y será:

$$y = 2 C_1 i \sin \frac{n}{2} x,$$

y designando C el valor constante $2 C_1 i$:

$$y = C \sin \frac{n}{2} x.$$

Para la obtención de una serie de números enteros como coeficientes de x , haremos $\frac{n}{2} = m$, lo que trae consigo el que los valores de n han de ser números pares; resulta en definitiva que siendo C , después de todo, una constante arbitraria, existen infinidad de soluciones de $y = f(x)$; pero añadiendo la condición de:

$$\int_0^\pi f^2 dx = 1,$$

deducimos:

$$\int_0^\pi C^2 \sin^2 mx dx = 1;$$

o sea:

$$\int_0^\pi \sin^2 mx = \frac{1}{C^2},$$

y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 mx dx &= \frac{1}{m} \int \sin^2 mx dm x = \\ &= \frac{1}{2m} (-\sin mx \cos mx + mx); \end{aligned}$$

resulta que para que esta expresión entre los límites 0 y π tenga el valor $\frac{1}{C^2}$, necesita que el valor de C sea precisamente $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, con lo que la solución definitiva será:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx,$$

sustituyendo m por los números enteros que constituyen los valores propios, obtendremos las funciones propias correspondientes.

Salta a la vista lo artificioso de estos últimos cálculos precisamente para obtener un resultado preconcebido; pero hay que tener en cuenta, como ya hemos dicho, que esta artificiosidad constituye una de las características del procedimiento, y que además en nuestra exposición parece aún más exagerada, porque, con objeto de no alargar esta memoria, no hemos hecho mención de otros espacios métricos, como el llamado *espacio de Hilbert*, también enedimensional, cuyos elementos son las funciones de una o más variables, y a los cuales se aplica la teoría y procedimientos vectoriales que hemos bosquejado, y cuyo conocimiento previo hubiera aclarado la parte final de nuestros cálculos.

Estos conceptos sobre valores propios que desempeñan papel primordial en las aplicaciones físicas, surgen en número infinito en la integración de la ecuación de Schrodinger, y que se los hace coincidir con los elementos de una matriz diagonal de orden infinito, y sus valores son precisamente las energías cuantificadas en los diversos estados estacionarios del átomo.