

APLICACIONES ESPACIALES DEL METODO DE LAS TRANSFORMACIONES

Por FEDERICO GODED ECHEVERRIA,
Ingeniero de Caminos.

El método de las transformaciones, cuyos fundamentos expuso el autor en el último número de "Revista de Ciencia Aplicada", lo aplica en el presente artículo a problemas elásticos en que exista simetría en torno de un eje, haciendo previamente un resumen de dichos fundamentos.

I

Recientemente hemos dado a conocer (1) los fundamentos teóricos de este nuevo método, así como algunas utilidades de interés práctico del mismo, a problemas bidimensionales. Este método, de absoluta generalidad, puede también utilizarse con ventaja para resolver problemas tridimensionales, siendo quizás aquí más fecundas o importantes sus aplicaciones, bajo el punto de vista del interés práctico. Señalaremos además que el método, con ligeras variantes, creemos puede extenderse a otras técnicas.

En este trabajo, vamos a exponer la aplicación teórica del método a la solución de los problemas elásticos en que exista simetría en torno de un eje. Resumiremos antes con brevedad los fundamentos de este método.

Fundamentos del método.

El método sólo es aplicable a aquellos problemas cuya solución puede expresarse por medio de una función de tensión, tales como algunos problemas espa-

ciales, y todos los bidimensionales de deformación o tensión plana.

Supongamos conocida en un sistema de coordenadas cualquiera, $\alpha \beta \gamma$, la función de tensión $\varphi(\alpha \beta \gamma)$ de la que se derivan las tensiones correspondientes a la actuación de un sistema dado de fuerzas (fig. 1.^a) sobre la superficie límite del cuerpo, de ecuación $g(\alpha \beta \gamma) = 0$.

Las ecuaciones de compatibilidad, en estos casos en que existe una función de tensión, se cumplen siempre que esta función verifique una determinada ecuación en derivadas parciales distinta para cada clase de problemas.

Designemos por el operador D esta ecuación en derivadas parciales, que es frecuente llamar ecuación de compatibilidad, y a la cual designaremos así en lo sucesivo. Entonces nuestra función φ verificará por hipótesis:

$$D\varphi = 0. \quad [1]$$

Si elegimos ahora un nuevo sistema de coordenadas ξ, η, λ y expresamos en este nuevo sistema la ecuación de compatibilidad, ésta adoptará ahora una forma diferente. Si designamos al nuevo operador que la representa por M y por φ_1 a la función φ es-

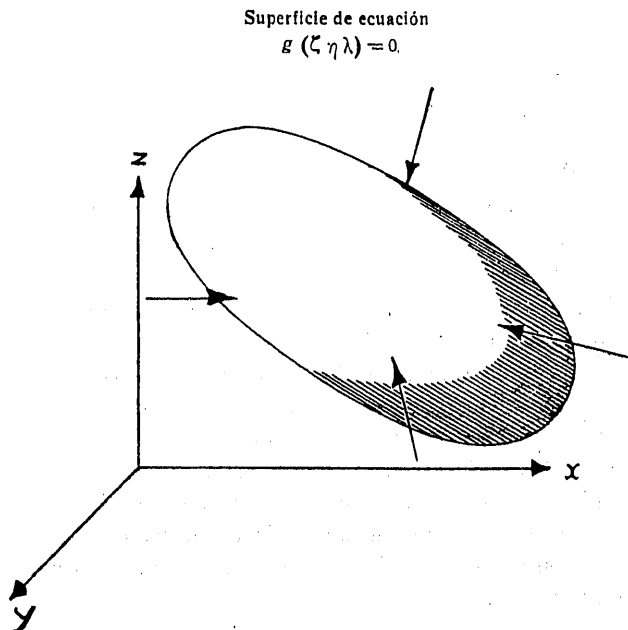
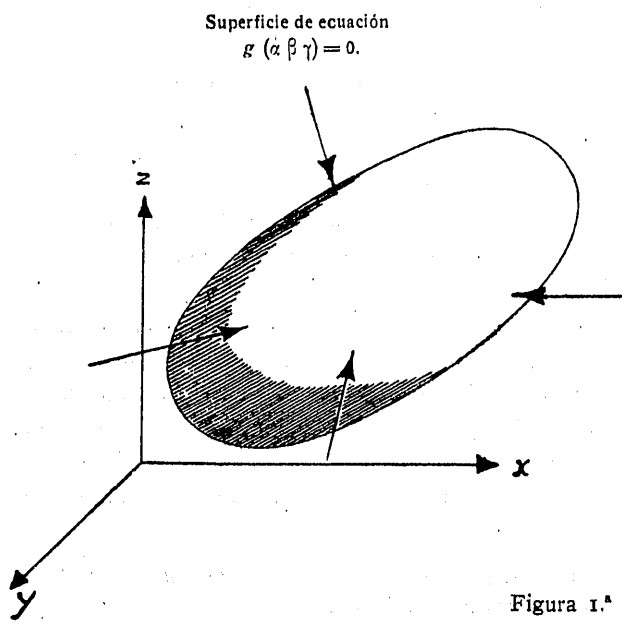


Figura 1.^a

(1) *Revista de Ciencia Aplicada*, número de marzo-abril de 1952.

crita en este nuevo sistema, esta función φ_1 verificará igualmente por hipótesis:

$$M \varphi_1 = 0; \quad [2]$$

sean:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= f_1(\zeta \eta \lambda) \\ \beta &= f_2(\zeta \eta \lambda) \\ \lambda &= f_3(\zeta \eta \lambda) \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

las fórmulas de paso del primer sistema de coordenadas al segundo.

Admitamos ahora que sea posible encontrar unas funciones, S y T , que verifiquen la identidad siguiente:

$$S D \varphi \equiv M(\varphi T), \quad [4]$$

en la cual ambos operadores se refieren al mismo sistema de coordenadas inicial.

Aplicando al primero y segundo miembro de la identidad supuesta el cambio de variables [3] y el

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \zeta \\ \beta &= \eta \\ \gamma &= \lambda \end{aligned} \right\}, \quad [5]$$

respectivamente, así como a la función de tensión, y a la ecuación de la superficie límite del cuerpo, obtendremos los resultados indicados en el esquema siguiente:

Ecuación de la superficie: $g'(\alpha \beta \gamma) = 0$	Función de tensión: $\varphi(\alpha \beta \gamma)$	$S D \varphi(\alpha \beta \gamma) \equiv M[\varphi(\alpha \beta \gamma) T(\alpha \beta \gamma)]$	Ecuación de la superficie: $g(\alpha \beta \gamma) = 0$	Función de tensión: $\varphi(\alpha \beta \gamma)$
Cambio de variables: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = f_1(\zeta \eta \lambda) \\ \beta = f_2(\zeta \eta \lambda) \\ \gamma = f_3(\zeta \eta \lambda) \end{array} \right.$			Cambio de variables: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \zeta \\ \beta = \eta \\ \gamma = \lambda \end{array} \right.$	
Ecuación de la superficie: $g_1(\zeta \eta \lambda) = g(f_1 f_2 f_3) = 0$	Función de tensión: $\varphi_1(\zeta \eta \lambda) = \varphi(f_1 f_2 f_3)$	Ecuación de compatibilidad: $S_1 M \varphi_1 = 0$	Ecuación de compatibilidad: $M(\varphi T) = 0$	Ecuación de la superficie: $g(\zeta \eta \lambda) = 0$
				Función de tensión: $\psi_1 = \varphi(\zeta \eta \lambda) T(\zeta \eta \lambda)$

observándose que de esta forma hemos obtenido la nueva función de tensión $\psi(\zeta \eta \lambda) = \varphi \cdot T$ y la nueva superficie límite $g(\zeta \eta \lambda) = 0$. Así, pues, la existencia de la identidad [4] presupondrá una correspondencia biunívoca entre dos espacios, y otra correspondencia entre los sistemas de fuerzas actuantes en cada uno de ellos.

Por lo tanto, para aplicar este método será preciso encontrar una identidad como la supuesta. Una vez encontrada esta identidad, podremos, como acabamos de ver, partiendo de una solución conocida, hallar la solución de un nuevo problema.

La dificultad se centra, pues, en la obtención de una identidad entre las ecuaciones de compatibilidad en dos sistemas de coordenadas. Esta identidad es posible encontrarla en algunos casos, como vamos a ver a continuación.

Obtención de la identidad.

Se sabe que cuando la superficie límite del cuerpo y el sistema de fuerzas actuante sobre la misma presenta simetría en torno de un eje, las tensiones se distribuyen asimismo simétricamente con respecto a dicho eje.

En este caso, A. E. H. Love (1) demostró que el problema podía ser resuelto mediante la introducción de una función de tensión, encontrando además las expresiones de las tensiones en función de la misma, y la forma de la ecuación de compatibilidad. Eligiendo el sistema de coordenadas $R \psi$ indicado en la figu-

(1) Ver, por ejemplo, *Theory of Elasticity*, de A. E. H. Love, 4.^a ed., pág. 274, 1927.

ra 2.^a, la ecuación de compatibilidad adopta la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cotg \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cotg \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} [7]$$

Si designamos por L al operador:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \cotg \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, [8]$$

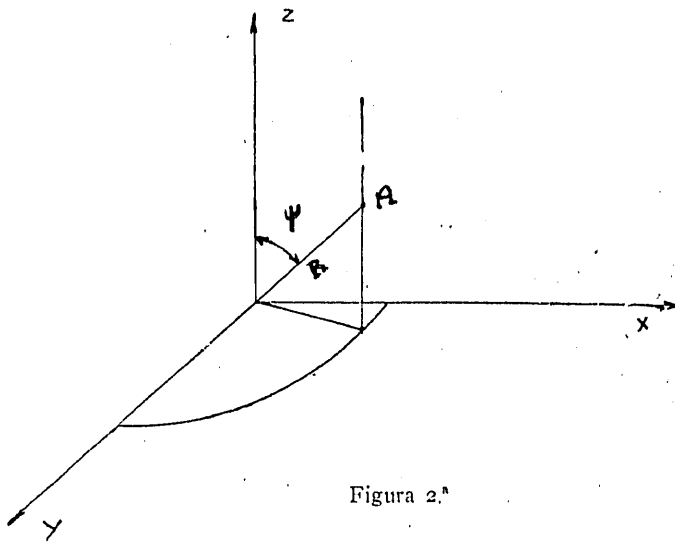


Figura 2.^a

esta ecuación será, pues:

$$L^2 \varphi = 0. [9]$$

Dada la estructura de esta ecuación de compatibilidad, parece lo más oportuno ensayar un cambio de variables del tipo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R^n \\ \psi_1 &= \psi. \end{aligned} \right\} [10]$$

El operador L , mediante este cambio de variables, se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} & n^2 R_1^{2-2/n} \frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + n(n+1) R_1^{1-2/n} \frac{\partial}{\partial R_1} + \\ & + R_1^{-2/n} \left(\cotg \psi_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2} \right). \end{aligned} [11]$$

Llamando N al operador:

$$\begin{aligned} & n^2 R^{2-2/n} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + n(n+1) R^{1-2/n} \frac{\partial}{\partial R} + \\ & + R^{-2/n} \left(\cotg \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right), \end{aligned} [12]$$

la identidad [4] adoptará en este caso la forma siguiente:

$$S L^2 \varphi \equiv N^2 (\varphi T). [13]$$

Dada la forma de esta identidad, parece lógico suponer que, de ser posible su existencia, S será una función del tipo siguiente:

$$S = R^t. [14]$$

Expresaremos, pues, la función de tensión de la forma siguiente:

$$\varphi = f \cdot R^q, [15]$$

siendo f aquí función de ψ y R , con lo cual no se resta generalidad alguna a la función φ .

Reemplazando este valor en [8] y desarrollando, se obtiene:

$$\begin{aligned} L(f R^q) &= q(q+1) R^{q-2} f + 2(q+1) R^{q-1} \frac{\partial f}{\partial R} + \\ &+ R^q \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + R^{q-2} \left(\cotg \psi \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \right). \end{aligned} [16]$$

o bien llamando B al operador:

$$\cotg \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, [17]$$

tendremos:

$$\begin{aligned} L(f R^q) &= q(q+1) R^{q-2} f + 2(q+1) R^{q-1} \frac{\partial f}{\partial R} + \\ &+ R^q \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + R^{q-2} B f. \end{aligned} [18]$$

Volviendo a aplicar el mismo operador a los dos miembros de la ecuación anterior, se obtiene después de simplificar:

$$\begin{aligned} L^2(f R^q) &= q(q+1)(q-2)(q-1) R^{q-4} f + \\ &+ 4q(q^2-1) R^{q-3} \frac{\partial f}{\partial R} + 6q(q+1) R^{q-2} \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \\ &+ 4(q+1) R^{q-1} \frac{\partial^3 f}{\partial R^3} + R^q \frac{\partial^4 f}{\partial R^4} + \\ &+ 2(q^2-q+1) R^{q-4} B f + 4q R^{q-3} B \frac{\partial f}{\partial R} + \\ &+ 2 R^{q-2} B \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + R^{q-4} B^2 f. \end{aligned} [19]$$

Procederemos de una forma análoga con respecto al operador N . Adoptaremos por tanto para φT la forma:

$$T \varphi = f \cdot R^m, [20]$$

y reemplazando este valor en [12] y simplificando, se obtiene:

$$N(f R^m) = n m (n m + 1) R^{m-2/n} \cdot f + n (2 m n + n + 1) R^{m+1-2/n} \cdot \frac{\partial f}{\partial R} + \\ + n^2 R^{m+2-2/n} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + R^{m-2/n} B \cdot f. \quad [21]$$

Aplicando el mismo operador a los dos miembros, obtenemos, después de simplificar:

$$N^2(f R^m) = R^{m-4/n} \cdot f \cdot \left[n^3 m (n m + 1) \left(m - \frac{2}{n} \right) \left(m - \frac{2}{n} - 1 \right) + n^2 (n + 1) (n m + 1) m \left(m - \frac{2}{n} \right) \right] + \\ + R^{m-4/n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial R} \left[2 n^3 m (n m + 1) \left(m - \frac{2}{n} \right) + n^3 (2 n m + n + 1) \left(m - \frac{2}{n} + 1 \right) \left(m - \frac{2}{n} \right) + \right. \\ \left. + n^2 m (n + 1) (n m + 1) + n^2 \left(m - \frac{2}{n} + 1 \right) (n + 1) (2 m n + n + 1) \right] + R^{m-4/n+2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \left[n^3 m (n m + 1) + \right. \\ \left. + 2 n^3 (2 n m + n + 1) \left(m - \frac{2}{n} + 1 \right) + n^4 \left(m - \frac{2}{n} + 2 \right) \left(m - \frac{2}{n} + 1 \right) + n^2 (n + 1) (2 m n + n + 1) + \right. \\ \left. + n^3 (n + 1) \left(m - \frac{2}{n} + 2 \right) \right] + R^{m-4/n+3} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial R^3} \left[n^3 (2 m n + n + 1) + 2 n^4 \left(m - \frac{2}{n} + 2 \right) + n^3 (n + 1) \right] + \\ + R^{m-4/n+4} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial R^4} + R^{m-4/n} \left[n^2 \left(m - \frac{2}{n} \right) \left(m - \frac{2}{n} - 1 \right) + n (n + 1) \left(m - \frac{2}{n} \right) + n m (n m + 1) \right] B f + \\ + R^{m-4/n+1} \left[2 n^2 \left(m - \frac{2}{n} \right) + n (n + 1) + n (2 m n + n + 1) \right] B \frac{\partial f}{\partial R} + R^{m-4/n+2} \cdot 2 n^2 \cdot B \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + R^{m-4/n} B^2 f. \quad [22]$$

Si la identidad es posible, los valores de los coeficientes adoptados se obtendrán reemplazando en la identidad supuesta [13] las expresiones de $N^2(f R^m)$ y $L^2(f \cdot R^q)$ obtenidas, y el valor de S [14].

Los exponentes de todas las potencias de R coinciden siempre que se cumpla:

$$t = m - \frac{4}{n} - q + 4. \quad [23]$$

Igualando los coeficientes de $B \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}$, se tiene:

$$n^2 = 1. \quad [24]$$

De aquí se deduce la solución banal $n = 1$, $m = q$, $t = 0$ prevista. Veamos la segunda solución, $n = -1$. Dando a n este valor en [22] e igualando los coeficientes de las respectivas potencias de R , y los coeficientes correspondientes de:

$$B f, \quad B \frac{\partial f}{\partial R}, \quad B \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \quad \text{y} \quad B^2 f,$$

se obtiene el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} q(q+1)(q-2)(q-1) &= m(m+1)(m+2)(m-1) \\ q(q+1)(q-1) &= m(m+1)(m+2) \\ q(q+1) &= (m+1)(m+2) \\ q+1 &= m+2 \\ q^2 - q + 1 &= m^2 + m + 1 \\ q &= m+1, \end{aligned} \right\} \quad [25]$$

comprobándose que cuando q y m verifican la última ecuación del sistema, las cinco primeras se verifican también. Por lo tanto, la identidad [13] es posible también para:

$$\left. \begin{aligned} n &= -1, \\ q &= m+1, \\ t &= 7. \end{aligned} \right\} \quad [26]$$

Podremos, pues, escribir:

$$R^7 L^2(f R^{m+1}) \equiv N^2(f \cdot R^m). \quad [27]$$

Haciendo en [15] $q = 0$, las dos funciones f y φ coinciden. Para volver a la función φ , nos bastará, pues, aquí hacer $m = -1$. Tendremos así, finalmente, la identidad buscada:

$$R^7 L^2 \varphi \equiv N^2(\varphi R^{-1}), \quad [28]$$

siendo así en este caso:

$$\left. \begin{aligned} S &= R^7, \\ T &= R^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad [29]$$

Utilización de la identidad.

En este caso el esquema [6] será el siguiente:

Ecuación de la superficie:	Función de tensión:	Ecuación de compatibilidad:	Ecuación de la superficie:	Función de tensión:	
$g(R\psi) = 0$	$\varphi(R\psi)$	$R^2 D\varphi \equiv M(\varphi R^{-1})$	$g(R\psi) = 0$	$\varphi(R\psi)$	
$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{R_1} \\ \psi = \psi_1 \end{array} \right.$			$\left\{ \begin{array}{l} R = R_1 \\ \psi = \psi_1 \end{array} \right.$		
↓			↓		
Ecuación de la superficie:	Función de tensión:	Ecuación de compatibilidad:	Ecuación de compatibilidad:	Ecuación de la superficie:	Función de tensión:
$g_1(R_1\psi_1) = g\left(\frac{1}{R_1}, \psi_1\right) = 0$	$\varphi_1(R_1\psi_1) = \varphi\left(\frac{1}{R_1}, \psi_1\right)$	$M(\varphi_1) = 0$	$M(\varphi R^{-1}) = 0$	$g(R_1\psi_1) = 0$	$\psi_1 = \varphi(R_1\psi_1) R_1^{-1}$

Así, pues, la nueva función de tensión ψ_1 será, escrita en el sistema inicial:

$$\psi_1(R\psi) = R\varphi \cdot (R^{-1} \cdot \psi). \quad [30]$$

Análogamente la ecuación de la nueva superficie límite será escrita en el primer sistema:

$$g(R^{-1} \cdot \psi) = 0. \quad [31]$$

La correspondencia biunívoca entre los dos espa-

cios será en este caso una inversión con polo en el origen. El método nos proporciona, pues, en esta aplicación, la generalización al espacio del conocido teorema de J. H. Michell (1), que relaciona tensiones de figuras planas inversas.

(Continuará.)

(1) Ver J. H. Michell: *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, página 134, 1901.

— *Théorie de l'Elasticité*, de S. Timoshenko, págs. 189-193.