

MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION CIRCULAR HUECA PARA EL MATERIAL HORMIGON ARMADO

Por JUAN J. GOMEZ-CORDOBES HERNANDEZ,

Ingeniero de Caminos.

Al principio y final de este artículo se hace referencia a otros publicados anteriormente en nuestra REVISTA, que con el presente completan el trabajo que sobre este tema ha realizado el autor.

En los números 2.705 y 2.707 de esta Revista, correspondientes a los meses de septiembre y noviembre del año 1940, encontrará el lector dos artículos referentes al momento de inercia de la sección circular maciza de hormigón armado, en los que por cuatro procedimientos se obtiene la misma expresión, que es el punto de partida del presente artículo. En ambos se designó por R el radio de la circunferencia, perímetro de la sección, y es fácil deducir que la armadura metálica que se consideró está integrada (figura 1.^a), como en la sección rectangular, por una sección α cm.² en la zona de tracción y otra sección α' cm.² en la de compresión, estando ambas secciones metálicas a la misma distancia del centro, en los extremos del mismo diámetro correspondiente al plano diametral que contiene la resultante de las fuerzas solicitantes. Dicha distancia, en los citados artículos del año 1940, estaba dada por la expresión $R - t$, y en los diez años transcurridos hemos visto la conveniencia de modificar ligeramente las notaciones, representándola en lo sucesivo por R . El recubrimiento t , pequeño con relación a R y además expuesto, en la mayoría de los casos, a erosiones por varias contingencias, se desprecia, desapareciendo definitivamente en los laboriosos desarrollos exigidos por la sección cir-

cular, lo que justifica la ventajosa modificación hecha: un recubrimiento de 3 cm. aumenta el canto útil en 3 cm., y la profundidad de la fibra neutra aumenta, para la carga de la armadura $A = 1\ 200$ kilogramos/cm.², en $0,351 \times 3 = 1,0$ cm., que bien podemos despreciar con error favorable a la estabilidad, ante las erosiones a que están expuestas las obras por las explosiones de los artefactos de guerra, por el choque de los acarrees pétreos en cursos de agua torrenciales, por la acción de los hielos invernales, etc., además de la importante ventaja apuntada de simplificar los cálculos.

Seguidamente exponemos para la sección circular hueca el desarrollo del cálculo del momento de inercia con la misma armadura sencilla que se adoptó para la sección maciza. En la figura 2.^a se representa la sección hueca: $R + t$ es el radio exterior, y el radio interior lo designamos por r , estando las dos armaduras α y α' , de tracción y de compresión, respectivamente, situadas en el mismo diámetro y a la misma distancia R del centro. El canto útil de la sección es $c = t + 2R$, y despreciando t por las razones expuestas anteriormente, queda $c = 2R$. Al despreciar t , resulta para la sección útil de hormigón a considerar en los cálculos de resistencia, la circular limitada por las circunferencias de radios R y r .

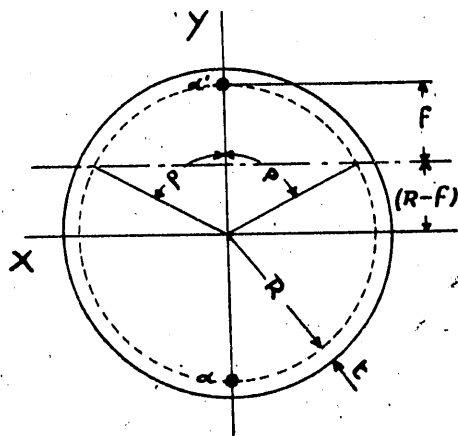


Figura 1.^a

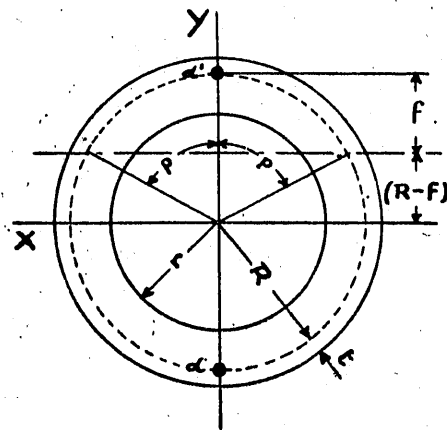


Figura 2.^a

La profundidad unitaria de la fibra neutra $\varphi = \frac{f}{2R} = \frac{648}{648+A}$, en cuya expresión f es la profundidad absoluta y A la carga de trabajo de la armadura, es independiente de la forma de la sección, por lo que se aplica igualmente a las secciones macizas que a las huecas. La profundidad absoluta $f = 2R\varphi = c \cdot \varphi$ es un producto de dos factores, φ y c , que son los mismos para la sección maciza de radio exterior $R+t$ y para la sección hueca correspondiente de radio interior r , supuestas ambas con el mismo tipo de armadura (figs. 1.^a y 2.^a) escogido para simplificar y llegar más fácilmente, siempre comprobando los laboriosos desarrollos, a la consideración de la armadura característica de la sección circular, como se verá más adelante, después de terminar con el tipo sencillo de armadura considerado.

El momento de inercia con relación a la fibra neutra lo designamos con la letra I afectada de subíndices.

En coordenadas cartesianas rectangulares, coincidiendo el origen con el centro de la sección, las circunferencias exterior, despreciando t , y la interior tienen, respectivamente, por ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

El momento de inercia I_m de la sección maciza del hormigón que se obtuvo en los citados números de la REVISTA tiene la expresión siguiente, correspondiente al radio R :

$$I_{mR} = \left[\frac{1}{4} + (1-2\varphi)^2 \operatorname{ang} \cos (1-2\varphi) - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{2} + (1-2\varphi)^3 \right) (1-2\varphi) \sqrt{\varphi(1-\varphi)} \right] \cdot R^4. \quad [1]$$

$$\begin{aligned} I_{mr} &= 2 \left[r^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} - \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} - 2(1-2\varphi)r^2 R \int \frac{y dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + 2(1-2\varphi) R \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + \right. \\ &+ (1-2\varphi)^2 r^2 R^2 \int \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} - (1-2\varphi)^2 R^2 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \Big]_{y_1}^{y_2} = 2 \left[- \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + 2(1-2\varphi) R \int \frac{y^3 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + \right. \\ &+ [r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2] \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{r^2-y^2}} - 2(1-2\varphi)r^2 R \int \frac{y dy}{\sqrt{r^2-y^2}} + (1-2\varphi)^2 r^2 R^2 \int \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \Big]_{y_1}^{y_2} = \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} \left(y^3 \sqrt{r^2-y^2} + \frac{3}{2} r^2 \left(y \sqrt{r^2-y^2} - r^2 \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{y}{r} \right) \right) - \frac{2}{3} (1-2\varphi) R (y^3 + 2r^2) \sqrt{r^2-y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2] \left(y \sqrt{r^2-y^2} - r^2 \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{y}{r} \right) + 2(1-2\varphi)r^2 R \sqrt{r^2-y^2} + \right. \\ &\quad \left. + (1-2\varphi)^2 r^2 R^2 \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{y}{r} \right]_{y_1}^{y_2} = 2 \left[\left(\frac{1}{4} y^3 - \frac{2}{3} (1-2\varphi) R y^2 + \left(\frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{2} [r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2] \right) y - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{4}{3} (1-2\varphi)r^2 R - 2(1-2\varphi)r^2 R \right) \sqrt{r^2-y^2} - \left(\frac{3}{8} r^4 - \frac{1}{2} [r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2] r^2 - (1-2\varphi)^2 r^2 R^2 \right) \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{y}{r} \right]_{y_1}^{y_2} \right. \\ &\quad \left. (1-2\varphi) R \right] \end{aligned}$$

Designando por I_{mr} el momento de inercia de la sección interior de radio r , considerada como maciza, con respecto a la misma fibra neutra de profundidad absoluta $f = 2\varphi R$, el momento de inercia parcial I_h de la sección hueca, por lo que al hormigón se refiere, se obtiene por diferencia de los dos momentos anteriores:

$$I_h = I_{mR} - I_{mr} = F(\varphi, K) R^4, \quad [2]$$

siendo, como se verá más adelante, $K = R/r$.

Como I_{mR} lo tenemos calculado, expresión [1], solamente es preciso calcular I_{mr} partiendo de uno de los cuatro procedimientos que se siguieron para obtener I_{mR} aplicado a la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

Designando por C mayúscula, para diferenciarla del canto c de la sección, la longitud de la cuerda paralela al eje de las abscisas x , el momento elemental respecto a la fibra neutra, paralela al mismo, con ecuación $y = R - f = (1-2\varphi)R$, tiene la expresión, despreciando términos infinitamente pequeños de orden superior (ver pág. 164 del núm. 2705 de la REVISTA, mes de septiembre de 1940):

$$\begin{aligned} I_{mr} &= C \cdot dy [y - (1-2\varphi)R]^2 = 2 \sqrt{r^2-y^2} [y - \\ &- (1-2\varphi)R]^2 \cdot dy = 2 \frac{r^2-y^2}{\sqrt{r^2-y^2}} [y^2 - \\ &- 2(1-2\varphi)Ry + (1-2\varphi)^2 R^2] \cdot dy. \quad [3] \end{aligned}$$

El límite inferior de la integración es $y_1 = (1-2\varphi)R$ y el límite superior es $y_2 = r$:

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\left(\frac{1}{8} r^2 + \frac{1}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \right) r^2 \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4} (1-2\varphi)^3 R^3 - \frac{2}{3} (1-2\varphi)^3 R^3 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \right) (1-2\varphi) R + \frac{2}{3} (1-2\varphi) r^2 R \right) \sqrt{r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{8} r^2 + \frac{1}{2} (1-2\varphi)^2 R^2 \right) r^2 \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{R}{r} (1-2\varphi) \right] = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} r^2 + (1-2\varphi)^2 R^2 \right) r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{R}{r} (1-2\varphi) \right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) (1-2\varphi)^3 R^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8} \right) (1-2\varphi) r^2 R \right) \sqrt{r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2} \right] = \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} r^2 + (1-2\varphi)^2 R^2 \right) r^2 \operatorname{ang} \cos \frac{R}{r} (1-2\varphi) - \left(\frac{1}{12} (1-2\varphi)^3 R^3 + \frac{13}{24} r^2 \right) (1-2\varphi) R \sqrt{r^2 - (1-2\varphi)^2 R^2} \right].
\end{aligned}$$

Poniendo en la expresión anterior $\frac{R}{r} = K$, resulta la siguiente:

$$\begin{aligned}
I_{mr} = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{K^2} + (1-2\varphi)^2 \right) \frac{1}{K^3} \operatorname{ang} \cos K (1-2\varphi) - \frac{1}{12} \left(\frac{13}{2} + \frac{1}{K^2} + \right. \right. \\
\left. \left. + (1-2\varphi)^2 (1-2\varphi) \right) \sqrt{\frac{1}{K^2} - (1-2\varphi)^2} \right] \cdot R^4 = \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{K^2} + (1-2\varphi)^2 \right) \frac{1}{K^2} \operatorname{ang} \cos K (1-2\varphi) - \right. \\
\left. - \frac{1}{6} \left(\frac{13}{2} + \frac{1}{K^2} + (1-2\varphi)^2 \right) (1-2\varphi) \sqrt{\frac{1}{K^2} - (1-2\varphi)^2} \right] \cdot R^4. \quad [4]
\end{aligned}$$

Para $K = \frac{R}{r} = 1$ es fácil comprobar que se verifica $I_{mr} = I_{mR}$, y como I_{mR} lo tenemos bien expresado en la comprobada fórmula [1], es de suponer que la expresión [3] que acabamos de obtener para I_{mr} , por un solo procedimiento, sea de toda confianza.

Si en la sección circular maciza quitamos el núcleo de radio $r = R - f = (1-2\varphi) R$, K toma el valor $1/(1-2\varphi)$. Siempre que sea factible tomar este valor de K , el momento de inercia de la correspondiente sección hueca, dado por la expresión [2], se obtiene lo más sencillamente posible, porque en tal caso $I_{mr} = 0$, y, por lo tanto, $I_h = I_{mR} - 0 = I_{mR} = F(\varphi) R^4$.

Todo lo expuesto se refiere al momento de inercia del hormigón, solamente que es uno de los dos materiales que integran la sección total. Seguidamente exponemos cuanto se refiere al otro material, a la armadura metálica, cuyo momento de inercia se determina como en la sección rectangular, por lo que podríamos prescindir de su determinación, al ser de todos conocido.

El momento de inercia I_w de la armadura total $\omega = \alpha + \alpha'$ con relación a la fibra neutra, ya determinada por la profundidad absoluta $f = 2R\varphi$, es dado por la expresión:

$$I_w = \beta \alpha' f^2 + \beta \alpha (2R - f)^2,$$

en la que β es la relación de los coeficientes de elasticidad.

Designando por k minúscula la relación de la sección de armadura α' en compresión, a la α correspondiente en tracción $k = \frac{\alpha'}{\alpha}$, y por q la cuantía de la armadura de sección α , se tiene sucesivamente para las secciones maciza y hueca:

$$\alpha' = k \alpha = k \pi R^2 q;$$

$$\begin{aligned}
I_{wm} &= \beta k \pi R^2 q \cdot f^2 + \beta \pi R^2 q (2R - f)^2 = \\
&= 4\pi (k \varphi^2 + (1 - \varphi)^2) \beta q \cdot R^4. \quad [5]
\end{aligned}$$

$$\alpha' = k \alpha = k \pi (R^2 - r^2) q = k \pi \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) R^2 q;$$

$$I_{wh} = 4\pi \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) (k \varphi^2 + (1 - \varphi)^2) \beta q \cdot R^4. \quad [6]$$

La expresión del momento total es para la sección maciza:

$$I_M = I_{mR} + I_{wm}. \quad [5']$$

La expresión del momento total para la sección hueca es:

$$I_H = I_{mR} - I_{mr} + I_{wh}. \quad [6']$$

Los valores de I_{mR} , I_{mr} , I_{wm} , I_{wh} son dados, respectivamente, por las expresiones [1], [3], [4], [5].

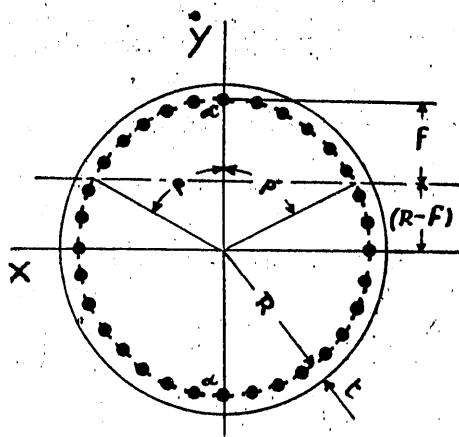


Figura 3.ª

Después de cuanto llevamos expuesto, vamos a considerar la misma sección circular en sus dos variantes maciza y hueca, provista (figs. 3.ª y 4.ª) de una armadura de sección total ω integrada por numerosas barras n de la misma sección ω/n , situadas todas en la circunferencia de radio $R + t - t = R$, a distancias iguales $2\pi R/n$. Las n barras se encuentran en dos regiones o zonas de la sección separadas por la fibra neutra, formando todas las barras situadas en la zona de tracción la armadura α , y todas las que se encuentran en la zona de compresión, la armadura α' . El centro de gravedad de la armadura α de tracción, situado en un punto del diámetro perpendicular a la fibra neutra, nos da por su distancia al extremo del mismo, situado a distinto lado con relación al centro de la sección, el canto útil c , menor que $2R$, y está dado por una expresión que determinamos seguidamente, admitiendo la hipótesis de la distribución uniforme de la sección total $\omega = \alpha + \alpha'$ sobre la circunferencia de radio R .

El centro de gravedad de la sección α integrada por todas las barras que trabajan a tracción, en la hipótesis admitida, es el mismo que el del arco correspondiente en que están situadas, y se determina muy sencillamente por el cálculo infinitesimal; mas como se encuentra en los manuales de Ingeniería la expresión resultante, en honor a la brevedad nos servimos de ella para obtener, como se dice en dichos manuales, la distancia entre el centro de gravedad y el de la circunferencia.

$$\frac{\text{cuerda}}{\text{arco}} \times \text{radio} = \frac{2 \sqrt{R^2 - (R-f)^2}}{2 \left(\frac{\pi}{2} + \text{ang sen } \frac{R-f}{R} \right) R} \times R = \frac{\sqrt{2 R f - f^2}}{\frac{\pi}{2} + \text{ang sen } \frac{R-f}{R}}$$

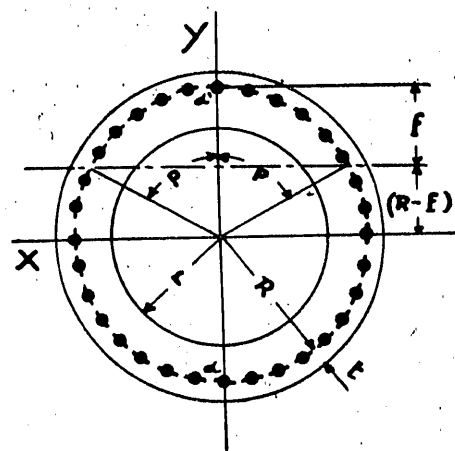


Figura 4.ª

El canto útil es dado por la expresión con tres variables, c , R , f :

$$c = R + \frac{\sqrt{2 R f - f^2}}{\frac{\pi}{2} + \text{ang sen } \frac{R-f}{R}} \quad [7]$$

que, unida a la conocida $f = \varphi c$, nos proporciona un sistema de ecuaciones que permite eliminar una de las variables c ó f :

$$\frac{f}{\varphi} = R + \frac{\sqrt{2 R f - f^2}}{\frac{\pi}{2} + \text{ang sen } \frac{R-f}{R}};$$

$$c = R + \frac{\sqrt{2 R \varphi c - \varphi^2 c^2}}{\frac{\pi}{2} + \text{ang sen } \frac{R-\varphi c}{R}}$$

Conocida la carga de trabajo de la armadura, φ es conocida, y quedan dos variables por determinar, R y f ó R y c , con infinitud de soluciones. Tomando la primera de las dos últimas expresiones y despejando f , se tendrá $f = \lambda(\varphi, R)$.

El momento de inercia elemental del hormigón, con este segundo tipo de armadura, tiene la misma expresión que la obtenida, [3], con el primer tipo de armadura, siendo los límites de integración los siguientes para la sección circular maciza:

$$y_1 = R - f = R - \lambda(\varphi, R) = \left(1 - \frac{\lambda(\varphi, R)}{R} \right) R = (1 - \epsilon) R; \quad [8]$$

$$y_2 = R.$$

Para el primer tipo de armadura considerado vimos, a continuación de la expresión diferencial [3],

que los límites de integración correlativos de los [8] eran:

$$y_1 = R - f = R - 2\varphi R = (1 - 2\varphi) R; \quad [9]$$

$$y_2 = R.$$

Entre los números abstractos ε y 2φ se verifica $\varepsilon < 2\varphi$. En efecto: en la expresión [7] del canto útil c el segundo sumando, que expresa la distancia entre el centro de gravedad de la armadura de tracción y el centro de la sección, es menor que el radio R , por lo que el canto c resulta menor que $2R$; luego la profundidad absoluta de la fibra neutra, en este segundo caso de armadura, es menor que con la primera considerada, y el primer límite obtenido y_1 , dado por la expresión [8], es mayor que el segundo, dado por la [9]; luego $\varepsilon < 2\varphi$.

Para la sección circular hueca (fig. 4.^a) el momento de inercia de la sección de hormigón se obtiene, en este caso de armadura circularmente dispuesta, como en el primer tipo de armadura considerado (figura 2.^a, correlativa de la 4.^a), restando los momentos de inercia de las dos secciones macizas de radios R y r con relación a la fibra neutra de profundidad $f = \lambda(\varphi, R)$, obtenida como acaba de hacerse $I_h = I_{mR} - I_{mr}$, siendo los límites de integración para I_{mR} dados por las expresiones [8], y para I_{mr} el mismo límite inferior [8] y_1 y el superior $y_2 = r$.

El momento de inercia I_ω de la sección metálica $\omega = \alpha + \alpha'$ es, en este segundo tipo de armadura, para la sección maciza:

$$I_{\omega m} = \beta \left(\frac{R^2}{2} + (R - f)^2 \right) \omega = \pi \left(\frac{1}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \beta q \cdot R^4,$$

y para la sección hueca:

$$I_{\omega h} = \beta \left(\frac{R^2}{2} + (R - f)^2 \right) \pi (R^2 - r^2) q =$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) \left(\frac{1}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \beta q \cdot R^4.$$

Repetiendo la integración del momento diferencial [3] con los límites correspondientes, se obtienen, como es fácil comprobar, las expresiones siguientes:

Momento de inercia total para la sección circular maciza de radio R (fig. 3.^a, correlativa de la fig. 1.^a):

$$I_m = I_{mR} + I_{\omega m} = \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \text{ang cos } (1 - \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6} \left(\frac{13}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) (1 - \varepsilon) \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} + \right.$$

$$\left. + \pi \left(\frac{1}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \beta q \right] R^4 = F(\varepsilon, \beta q) \cdot R^4. \quad [10]$$

Momento de inercia total para la sección circular hueca de radios R y r (fig. 4.^a, correlativa de la figura 2.^a):

$$I_h = I_{mR} - I_{mr} + I_{\omega h} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \text{ang cos } (1 - \varepsilon) - \frac{1}{6} \left(\frac{13}{2} + \right. \right.$$

$$\left. + (1 - \varepsilon)^2 \right) (1 - \varepsilon) \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} \right] - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{K^2} + \right. \right.$$

$$\left. + (1 - \varepsilon)^2 \right) \frac{1}{K^2} \text{ang cos } K(1 - \varepsilon) - \frac{1}{6} \left(\frac{13}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{K^2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{1}{K^2} - (1 - \varepsilon)^2} \right] +$$

$$+ \pi \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) \left(\frac{1}{2} + (1 - \varepsilon)^2 \right) \beta q \right] \cdot R^4 =$$

$$= F(\varepsilon, K, \beta q) \cdot R^4. \quad [11]$$

Si en la sección circular maciza (fig. 3.^a) quitamos el núcleo $r = R - f = (1 - \varepsilon) R$, K toma el valor:

$$K - \frac{R}{r} = \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad [12]$$

Siempre que sea factible tomar este valor de K , [12], el momento de inercia de la correspondiente sección hueca se obtiene lo más sencillamente posible analíticamente, porque en tal caso $I_{mr} = 0$, y por lo tanto:

$$I_h = I_{mR} - 0 + I_{\omega h} = I_{mR} + I_{\omega h}.$$

Con lo expuesto da por terminado el autor este trabajo iniciado, por lo que a su publicación se refiere, hace veinte años aproximadamente. En el año 1931 la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS publicó tres artículos en los números correspondientes a 1.º de agosto, página 305; 1.º de septiembre, página 358, y 15 de septiembre, página 383, con motivo de la construcción del puente de Alcaine (Teruel), en el camino vecinal de Josa a Alcaine. Dado el caso posible de que la REVISTA no hubiese publicado dichos artículos, el autor hubiese abandonado su visión de un nuevo procedimiento de construcción que ha de permitir a los pueblos adelantar bastantes años la realización de sus justas aspiraciones. Posteriormente, en la postguerra, como se dice al comienzo del presente, la REVISTA publicó otros dos artículos; en total, seis artículos que llevan todos el mismo título. Muy agradecido queda el autor a la REVISTA y a Dios por haberle permitido llegar al final, después de tantas calamidades sufridas en los veinte años transcurridos.