

ROTURA DE LAS OLAS EN FONDOS INCLINADOS

Por MIGUEL ANGEL HACAR,

Ingeniero de Caminos.

Deduce y estudia el autor una fórmula para determinar el punto en que rompe una ola en un fondo inclinado, y a continuación hace su aplicación a un ejemplo.

1. Consideraciones generales.

Las olas, al entrar en fondos en declive, pueden o romper o reflejarse, o en parte romper y en parte reflejarse. Lo primero ocurre en las playas de *muy poco* declive. Al ir aumentando la pendiente de un fondo horizontal, se comprueba que las olas rompen cada vez más lejos de la orilla, hasta que con cierta pendiente ya no rompen.

También se ve que para una misma pendiente las olas muy encrespadas rompen, y en cambio las de poca altura con respecto a su longitud no rompen, se reflejan. Como casos particulares extremos tenemos que, en general, las olas rompen en las playas, y en cambio las ondas de marea (cuya altura es despreciable con respecto a su enorme longitud) son reflejadas en dichas playas.

Vamos a tratar de definir el instante y posición de rotura de una onda de traslación que pasa de un fondo horizontal de profundidad media, H_0 , a otro con una pendiente, K , con respecto a la horizontal.

2. Hipótesis de cálculo.

Supondremos que la onda antes de entrar en la zona de este fondo en declive es sensiblemente simétrica, es decir, que las crestas no van muy avanzadas, o sea que la parte anterior de la ola es como la posterior.

Llamaremos a la altura total de la ola $2h_0$. Supondremos que es de las llamadas de traslación o de agua poco profunda (en relación a su longitud), ya que para considerarla de oscilación y aplicar la teoría de ola trocoidal de Gersner, etc., debemos estar alejados de la posibilidad de rotura, contrario a nuestra hipótesis, al menos al entrar la ola en el fondo de pendiente K .

Sabemos que la celeridad *media* de las ondas de traslación depende sólo de la profundidad, valiendo:

$$c_m = \sqrt{gH}. \quad [1]$$

3. Celeridad en los distintos puntos de la ola.

Es fácil probar que si la onda no es de muy poca altura las crestas tienen celeridad superior a los senos. En general, las partes por encima del nivel medio tienen celeridad superior a c_m ; las por debajo, inferior. Sólo a dicho nivel medio es la celeridad igual a

$$c_m = \sqrt{gH}.$$

Se calcula con facilidad que la fórmula que da la celeridad C a distintas alturas (positivas o negativas) tiene por expresión:

$$c = c_m + \epsilon = \frac{1 + \frac{h}{H}}{\sqrt{1 + \frac{h}{2H}}} \sqrt{gH}. \quad [2]$$

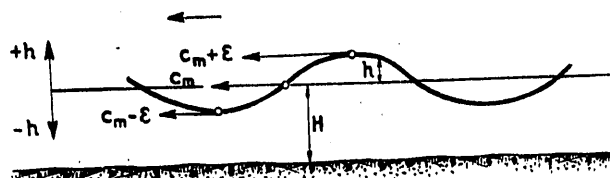


Figura 1.^a

Como se comprueba fácilmente, ya que la continuidad del flujo líquido para cada sección vertical nos da:

$$(H + h)(c_m + \epsilon) = \text{const.} = H \cdot c_m,$$

y la ecuación de Bernoulli para la superficie libre es:

$$\frac{1}{2} (c_m + \epsilon)^2 + gh = \text{const.} = \frac{1}{2} c_m^2.$$

De estas dos ecuaciones sale la [2], como queríamos probar.

Si el denominador lo desarrollamos por la fórmula

la del binomio y tomamos los dos primeros términos, como $h/2H$ es una cantidad pequeña, tendremos:

$$\left(1 + \frac{h}{2H}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{h}{4H}. \quad [3]$$

En lo que sigue supondremos que la altura de la ola, $2h_0$, se conserva hasta romper.

Al propagarse la ola, los puntos A_0, B_0, C_0 (seno, nivel medio, cresta) tienen por correspondientes al entrar la ola en el fondo en declive $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2$, etcétera, sucesivamente. La onda se va deformando, teniendo mayor pendiente en el frente de avance que en su parte posterior.

4. Rotura.

Definiremos la rotura por las posiciones indicadas en la figura por A_r, B_r, C_r , en que una cresta está

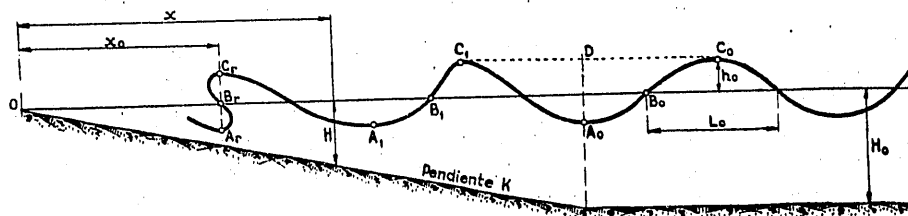


Figura 2.^a

en la misma vertical del seno que le precede; idea ésta intuitiva comprobada por la simple observación.

De [1], [2] y [3] se deduce que:

$$\frac{c}{c_m} = \frac{1 + \frac{h}{H}}{1 + \frac{h}{4H}} \approx 1 - \frac{3}{4} \frac{h}{H}. \quad [4]$$

Para los senos y crestas en nuestro caso, como en ellos $\begin{cases} h = -h_0 \\ h = +h_0 \end{cases}$, respectivamente, y $H = H_0 - kx$, siendo x la distancia, en horizontal, del borde de la rampa al punto considerado, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \text{Senos} \dots c &= \left(1 - \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}\right) \sqrt{g(H_0 - kx)} \\ \text{Crestas} \dots c &= \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}\right) \sqrt{g(H_0 - kx)} \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

5. Cálculo de la abscisa de comienzo de rotura.

En la posición A_r, B_r, C_r de rotura, es evidente, considerando la figura, que:

$$\overline{C_0 C_r} = \overline{C_0 D} + \overline{D C_r} = \overline{C_0 D} + \overline{A_0 A_r}.$$

El intervalo tiempo que la perturbación que afecta a A_0 tarde en afectar a A_r , es el mismo que el que tarda la que afecta a C_0 en afectar a C_r . Las celeridades de las A y de las C están dadas, para la rampa, por las fórmulas [5]. Para todo intervalo $L_0 = \overline{C_0 D}$ exterior a la rampa puede tomarse $\sqrt{g H_0}$, ya que la onda en él no está sensiblemente deformada.

Iguando aquellos intervalos de tiempo:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{g(H_0 - kx)} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}\right)} = \frac{L_0}{\sqrt{g H_0}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{g(H_0 - kx)} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}\right)}.$$

Efectuando transposición de términos:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}} - \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}} \right) \frac{dx}{\sqrt{g(H_0 - kx)}} = \frac{L_0}{\sqrt{g H_0}}. \quad [6]$$

El paréntesis de la cantidad subintegral se puede transformar, siendo:

$$\frac{\frac{3}{2} \frac{h_0}{H_0 - kx}}{1 - \left(\frac{3}{4} \frac{h_0}{H_0 - kx}\right)^2} \approx \frac{3}{2} \frac{h_0}{H_0 - kx}.$$

Y así resulta que la integral vale:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{3}{2} \frac{h_0}{H_0 - kx} \frac{dx}{\sqrt{g(H_0 - kx)}} &= \\ &= \frac{3 h_0}{k \sqrt{g}} \left[(H_0 - kx)^{-\frac{1}{2}} - H_0^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

6. Valores aproximados.

Si sólo tomamos tres términos del desarrollo del binomio, la integral vale:

$$\frac{3h_0}{k\sqrt{gH_0}} \left[\left(1 + \frac{kx}{2H_0} + \frac{3}{8} \frac{k^2 x^2}{H_0^2} + \dots \right) - 1 \right] =$$

$$= \frac{3h_0}{2k\sqrt{g}} \left[\frac{kx}{H_0} + \frac{3}{4} \left(\frac{kx}{H_0} \right)^2 \right] \quad [7]$$

Sustituyendo [7] en [6] y simplificando, queda:

$$9k \left(\frac{h_0}{L_0} \right) \left(\frac{x}{H_0} \right)^2 + 12 \left(\frac{h_0}{L_0} \right) \left(\frac{x}{H_0} \right) - 8 = 0. \quad [8]$$

Que nos permite calcular el punto de rotura, de abscisa x , conociendo la pendiente k del fondo, la relación $\frac{h_0}{L_0}$ y la profundidad H_0 . De [8] se despeja:

$$x = 2H_0 \frac{-1 + \sqrt{1 + 2kL_0/h_0}}{3k} \quad [9]$$

Si en [7] sólo tomamos como valor del desarrollo del binomio sólo dos términos, o sea $1 + \frac{kx}{2H_0}$, obtendremos:

$$x = \frac{2}{3} H_0 \frac{L_0}{h_0} \quad [9']$$

7. Rotura de la orilla.

Para que la rotura sea en la orilla, se verificará que:

$$x = x_0 = \frac{H_0}{k}.$$

Sustituyendo este valor en [8], obtenemos:

$$k_c = \frac{21}{8} \frac{h_0}{L_0} \quad [10]$$

Si en vez de sustituir en [9] sustituimos en [9'], obtenemos:

$$k_{c'} = \frac{3}{2} \frac{h_0}{L_0} \quad [10']$$

resultado menos aproximado.

8. Condiciones generales de rotura.

A la vista de [10], obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } 0 < k < k_c \text{ hay rotura de la ola;} \\ \text{Para } k = k_c \text{ hay rotura en la orilla;} \\ \text{Para } k > k_c \text{ no hay rotura;} \end{array} \right\} \quad [11]$$

$$k_c = \frac{21}{8} \frac{h_0}{L_0}.$$

9. Ejemplo.

Sea una ola de:

$$h_0 = 1 \text{ m.}; \quad L_0 = 30 \text{ m.}, \quad \text{y} \quad H_0 = 10 \text{ m.};$$

$$k = 0,04 = 4 \text{ ‰}; \quad x_0 = \frac{10}{0,04} = 250 \text{ m.}$$

Su rotura tiene lugar, según [9], en el punto de abscisa:

$$x = 2 \times 10 \frac{-1 + \sqrt{1 + 2 \times 0,04 \times 40}}{3 \times 0,04} = 141 \text{ m.},$$

o sea a $250 - 141 = 109 \text{ m.}$ de la orilla.

Si empleamos la fórmula [9'], menos aproximada, obtenemos:

$$x = \frac{2}{3} 10 \frac{30}{1} = 200 \text{ m.},$$

o sea a $250 - 200 = 50 \text{ m.}$ de la orilla.

Para que con esta H_0 una ola de las características de la dada rompa en la orilla, es preciso que la pendiente del fondo sea de acuerdo con [10] ó [10']:

$$k_c = \frac{21}{8} \frac{1}{30} = 8,75 \text{ ‰} \quad \text{o} \quad k_{c'} = \frac{3}{2} \frac{1}{30} = 5 \text{ ‰}.$$

En la rampa dada de $K = 0,04$ romperán las olas tales que (fórmula [11]):

$$\frac{h_0}{L_0} \geq \frac{8 \times 0,04}{21} = 0,01525.$$

Pero las olas de

$$\frac{h_0}{L_0} < 0,01525$$

no romperán.

Por ejemplo, una ola larga de

$$h_0 = 0,40 \text{ m.}, \quad L_0 = 32,00 \text{ m.},$$

no romperá, ya que

$$\frac{0,40}{32} = 0,0125 < 0,01525.$$