

ESTRUCTURAS ESPACIALES

Por MIGUEL GARCIA ORTEGA,
Ingeniero de Caminos.

Se continúa en este artículo el estudio de las estructuras de tres dimensiones, exponiendo ya la resolución de las ecuaciones de equilibrio. Además se desarrolla un ejemplo, con todo detalle, para que se entienda mejor la aplicación del método; pero se comprende que en la práctica no es necesario efectuar todas las operaciones, sino que se calcula más brevemente.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Para facilitar la exposición, teniendo en cuenta que en las fórmulas siguientes intervienen elementos correspondientes a varios nudos y barras, se empleará la siguiente notación, con la que fácilmente se distingue el nudo o barra a que corresponde cada elemento.

Considerando la barra d , comprendida entre los nudos a y b :

El valor V del nudo a se representa por V_a^a .

El valor V del nudo b se representa por V_b^b .

El valor V de la barra d , correspondiente al nudo a , se representa por $V_{ab}^{a/b}$.

El valor V de la barra d , correspondiente al nudo b , se representa por $V_{ba}^{b/a}$.

El valor V de la barra d , independiente de los nudos, o que valga lo mismo, cualquiera que sea el nudo que se considere, se representa por V_d^d , o también por $V_{ab}^{a/b}$ o $V_{ba}^{b/a}$.

Para las fuerzas y momentos:

Por F o M representamos las fuerzas o momentos de empotramiento, respectivamente.

Por F o M representamos las fuerzas o momentos producidos por la deformación, es decir, por los movimientos de los nudos.

Por F o M representamos las fuerzas o momentos totales, resultantes de los de empotramiento y deformación.

Por F o M representamos las fuerzas o momentos reacciones producidos por las sustentaciones.

En el nudo O , unido a los i por las barras j , las reacciones producidas por la deformación son:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} M_{d1} \\ M_{d2} \\ M_{d3} \end{array} \right\} &= T_{\frac{a}{k}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^o \\ 0_2^o \\ 0_3^o \end{array} \right\} + T_{\frac{a}{c}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^i \\ 0_2^i \\ 0_3^i \end{array} \right\} + \bar{P}_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \right\} &= P_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^o \\ 0_2^o \\ 0_3^o \end{array} \right\} + P_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^i \\ 0_2^i \\ 0_3^i \end{array} \right\} + T_{\frac{a}{f}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Por consiguiente, las ecuaciones de equilibrio para los nudos libres y para los sustentados son los siguientes:
Para nudos libres:

$$\left. \begin{aligned} T_{\frac{a}{k}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^o \\ 0_2^o \\ 0_3^o \end{array} \right\} + T_{\frac{a}{c}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^i \\ 0_2^i \\ 0_3^i \end{array} \right\} + \bar{P}_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} M_{d1}^o \\ M_{d2}^o \\ M_{d3}^o \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ P_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^o \\ 0_2^o \\ 0_3^o \end{array} \right\} + P_{\frac{a}{\varphi}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0_1^i \\ 0_2^i \\ 0_3^i \end{array} \right\} + T_{\frac{a}{f}}^{o/i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} F_1^o \\ F_2^o \\ F_3^o \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

Para nudos sustentados:

$$\left. \begin{aligned} T_{\frac{o}{k}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_{\frac{o}{c}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \bar{P}_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}}^o \\ M_{\frac{o}{2}}^o \\ M_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}}^o \\ M_{\frac{o}{2}}^o \\ M_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} \\ P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + T_{\frac{o}{f}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{\frac{o}{1}}^o \\ E_{\frac{o}{2}}^o \\ E_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} F_{\frac{o}{1}}^o \\ F_{\frac{o}{2}}^o \\ F_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} [3]$$

Las correspondientes a nudos sustentados son las ecuaciones generales, que pueden aplicarse a cualquier nudo, aunque sea libre, puesto que si no existe una sustentación elemental la reacción correspondiente M o F_r , es nula.

Cada sustentación elemental produce un movimiento conocido, generalmente nulo, desconociéndose la reacción correspondiente y cuando no hay sustentación, se desconoce el momento, pero se conoce la reacción, que es nula.

En resumen: por cada nudo hay seis ecuaciones y seis incógnitas, tres entre las θ y las M , y tres entre

las x y las F_r , y el sistema resultante se puede resolver por el procedimiento de sustituciones sucesivas que se traduce en los cuadros-fórmulas (*), según se expone en el "Cálculo de estructuras reticulares", del autor de estos artículos, pero conviene transformar previamente este sistema en otro mucho más inmediato al final que proporciona las soluciones, mediante un procedimiento análogo al que en el texto citado se conoce con el nombre de método abreviado, expresando las ecuaciones de equilibrio en la siguiente forma:

Para nudos libres:

$$\left. \begin{aligned} T_{\frac{o}{k}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_{\frac{o}{c}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \bar{P}_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}}^o \\ M_{\frac{o}{2}}^o \\ M_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + Q_{\frac{o}{f}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} f_{\frac{j}{2}}^j [q_{12}^{o/i} (x_1^o - x_1^i) + q_{22}^{o/i} (x_2^o - x_2^i) + q_{32}^{o/i} (x_3^o - x_3^i)] \\ f_{\frac{j}{3}}^j [q_{13}^{o/i} (x_1^o - x_1^i) + q_{23}^{o/i} (x_2^o - x_2^i) + q_{33}^{o/i} (x_3^o - x_3^i)] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{\frac{o}{1}}^o \\ E_{\frac{o}{2}}^o \\ E_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} [4]$$

Para nudos sustentados:

$$\left. \begin{aligned} T_{\frac{o}{k}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_{\frac{o}{c}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \bar{P}_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}}^o \\ M_{\frac{o}{2}}^o \\ M_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}}^o \\ M_{\frac{o}{2}}^o \\ M_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} \\ P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + P_{\frac{o}{\varphi}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + Q_{\frac{o}{f}}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} f_{\frac{j}{2}}^j [q_{12}^{o/i} (x_1^o - x_1^i) + q_{22}^{o/i} (x_2^o - x_2^i) + q_{32}^{o/i} (x_3^o - x_3^i)] \\ f_{\frac{j}{3}}^j [q_{13}^{o/i} (x_1^o - x_1^i) + q_{23}^{o/i} (x_2^o - x_2^i) + q_{33}^{o/i} (x_3^o - x_3^i)] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{\frac{o}{1}}^o \\ E_{\frac{o}{2}}^o \\ E_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} F_{\frac{o}{1}}^o \\ F_{\frac{o}{2}}^o \\ F_{\frac{o}{3}}^o \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} [5]$$

El acortamiento de las barras, que se supone conocido, está expresado por:

$$\Delta l = q_{11}^{o/i} (x_1^o - x_1^i) + q_{21}^{o/i} (x_2^o - x_2^i) + q_{31}^{o/i} (x_3^o - x_3^i) \quad [6]$$

Representando por n el número de nudos; por n_b , el de barras, y por n_0 , n'_0 , n_t y n'_t el de giros, em-

potramientos, traslaciones y apoyos elementales, respectivamente, resulta:

$$n_0 + n'_0 = 3n$$

$$n_t + n'_t = 3n.$$

(*) REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, números de junio y julio de 1949: "Un edificio y un método de cálculo".

Las expresiones [6] proporcionan n_b ecuaciones, una por cada barra, y entre las [4] y las [5] se obtienen $6n$ ecuaciones; por lo tanto, el sistema formado por las expresiones [4], [5] y [6] tienen $6n + n_b$ ecuaciones. Las incógnitas son: los giros, las traslaciones, los momentos y las fuerzas reacciones y las compresiones, cuyo número es:

$$n_\theta + n_t + n'_\theta + n'_t + n_b = 6n + n_b,$$

igual al de ecuaciones.

Aunque este sistema tiene n_b ecuaciones y n_b incógnitas más que el considerado anteriormente, su resolución es mucho más sencilla, efectuando las transformaciones que se exponen a continuación.

Los giros, las traslaciones y las compresiones se determinan por medio de las ecuaciones [4] y [6] y una vez conocidos los valores de los giros y traslaciones, las expresiones [5] nos proporcionarán inmediatamente las reacciones producidas por las sustentaciones.

Ahora bien: como en las ecuaciones [6] no intervienen más incógnitas que las traslaciones, los giros y las compresiones han de determinarse por las ecuaciones [4], que proporcionan además

$$n_x = n_\theta + n_t - (n_\theta + n_b) = n_t - n_b$$

traslaciones. Estas n_x traslaciones se denominan *principales*, y las n_b restantes se determinan por las ecuaciones [6].

Si, mediante las ecuaciones [6], expresamos todas las traslaciones en función de las principales, que designaremos por ρ , el sistema [4] puede transformarse en otro de la forma:

$$\begin{aligned} n_\theta & \text{ ecuaciones de la forma } Q_0(\theta^I, \rho^I) + M_0 = 0 \\ n_t & \text{ " " " " } \psi_0(\theta^I, \rho^I, N^I) + E = 0 \end{aligned}$$

y eliminando las n_b compresiones en $n_t - n_b$ ecuaciones, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\left. \begin{aligned} n_\theta & \text{ ecuaciones de la forma } Q_0(\theta^I, \rho^I) + M_0 = 0 \\ n_t - n_b & \text{ " " " " } Q'(\theta^I, \rho^I, E^I) = 0 \\ n_b & \text{ " " " " } Q''(\theta^I, \rho^I, E^I, N^I) = 0 \end{aligned} \right\} [7]$$

que es el que, en definitiva, resolvemos.

La transformación del sistema [4] en el [7], se verifica mediante dos operaciones fundamentales: la determinación, en función de las principales, de las restantes traslaciones, empleando las expresiones [6], y la eliminación de las compresiones en $n_t - n_b$ ecuaciones, entre las n_t que forman el segundo grupo del sistema [4]. Como se comprobará en el ejemplo que expondremos como final de estos artículos, ambas operaciones son muy sencillas en las estructuras corrientemente empleadas, porque en ellas, eligiendo de ma-

nera conveniente el triedro de referencia, los valores de la totalidad de las q , o por lo menos de la mayor parte, son uno o cero, y además, si se suman las cuartas ecuaciones del sistema [4] correspondientes a los dos extremos de una barra, se elimina la respectiva compresión, puesto que:

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}.$$

El sistema [7] se descompone en dos: el compuesto por

$$n_\theta \text{ ecuaciones de la forma } Q_0(\theta^I, \rho^I) + M_0 = 0$$

$$n_t - n_b \text{ " " " " } Q'(\theta^I, \rho^I, E^I) = 0$$

y el que lo está por

$$n_b \text{ ecuaciones de la forma } Q''(\theta^I, \rho^I, E^I, N^I) = 0.$$

El primer sistema es el que proporciona los movimientos de los nudos y puede resolverse por el procedimiento de sustentaciones sucesivas que conduce a los cuadros-fórmulas, y con el segundo obtenemos fácilmente las compresiones, una vez conocida la deformación.

Las ecuaciones [4] y [5], relacionan elementos geométricos y mecánicos de la estructura, mientras las [6] solamente relacionan elementos geométricos.

Pueden distinguirse tres casos, según que n_b sea igual, menor o mayor que n_t , resultando una discusión análoga a la de estructuras planas (*).

Cuando las traslaciones son nulas o despreciables, las reacciones producidas por la deformación pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} &= T_k \cdot \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{vmatrix} + T'_c \cdot \begin{vmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix} &= P_\varphi \cdot \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{vmatrix} + P'_\varphi \cdot \begin{vmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y las ecuaciones de equilibrio, que proporcionan los giros, son:

$$T_k^{o/I} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_c^{o/I} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^I \\ \theta_2^I \\ \theta_3^I \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

aplicadas a los nudos libres.

Para simplificar, pueden dividirse las reacciones

(*) M. García Ortega: *Cálculo de estructuras reticulares*, página 81.

de empotramiento y las características de las barras por factores comunes, como en las estructuras planas (*).

En una misma estructura, los cuadros-fórmulas correspondientes a varias hipótesis de carga tienen comunes las columnas correspondientes a los movimientos de los nudos, variando solamente la relativa a las reacciones de empotramiento, lo que simplifica extraordinariamente los cálculos, como ocurre en las estructuras planas (**).

Los acortamientos de las barras suelen ser poco importantes en la deformación de la estructura, por lo que se empieza suponiéndolos nulos, y una vez conocidas las compresiones, se pueden calcular los acortamientos correspondientes y, con éstos como base,

efectuar un nuevo cálculo, que resultará más aproximado que el anterior, siendo posible verificar, por este procedimiento, nuevas aproximaciones, cuantas veces sea necesario. En la mayoría de los casos basta con el cálculo primitivo, pero de todas formas, es muy sencillo el cálculo correspondiente a nuevos valores de los acortamientos, porque se puede efectuar como si se tratara de nuevas hipótesis de sobrecarga, es decir, repitiendo solamente el cálculo de la columna relativa a las reacciones de empotramiento, mediante los razonamientos siguientes:

Las traslaciones x , correspondientes a acortamientos nulos, se convierten en $x + \epsilon$ cuando los acortamientos tienen valores determinados, Δ_1 , siendo ϵ conocido, y las expresiones:

$$\bar{P}^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{Bmatrix} \quad Q^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} f_2^j [q_{12}^{oli} (x_1^o - x_1^i) + q_{22}^{oli} (x_2^o - x_2^i) + q_{32}^{oli} (x_3^o - x_3^i)] \\ f_3^j [q_{13}^{oli} (x_1^o - x_1^i) + q_{23}^{oli} (x_2^o - x_2^i) + q_{33}^{oli} (x_3^o - x_3^i)] \end{Bmatrix}$$

se transforman en

$$\bar{P}^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{Bmatrix} + \bar{P}^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1^o - \epsilon_1^i \\ \epsilon_2^o - \epsilon_2^i \\ \epsilon_3^o - \epsilon_3^i \end{Bmatrix}$$

$$Q^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} f_2^j [q_{12}^{oli} (x_1^o - x_1^i) + q_{22}^{oli} (x_2^o - x_2^i) + q_{32}^{oli} (x_3^o - x_3^i)] \\ f_3^j [q_{13}^{oli} (x_1^o - x_1^i) + q_{23}^{oli} (x_2^o - x_2^i) + q_{33}^{oli} (x_3^o - x_3^i)] \end{Bmatrix} + Q^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} f_2^j [q_{12}^{oli} (\epsilon_1^o - \epsilon_1^i) + q_{22}^{oli} (\epsilon_2^o - \epsilon_2^i) + q_{32}^{oli} (\epsilon_3^o - \epsilon_3^i)] \\ f_3^j [q_{13}^{oli} (\epsilon_1^o - \epsilon_1^i) + q_{23}^{oli} (\epsilon_2^o - \epsilon_2^i) + q_{33}^{oli} (\epsilon_3^o - \epsilon_3^i)] \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, puede determinarse la deformación como si se tratara de un caso particular de sobrecarga, sustituyendo:

$$\begin{Bmatrix} M_1^o \\ M_2^o \\ M_3^o \end{Bmatrix} \quad y \quad \begin{Bmatrix} E_1^o \\ E_2^o \\ E_3^o \end{Bmatrix}$$

por

$$\begin{Bmatrix} M_1^o \\ M_2^o \\ M_3^o \end{Bmatrix} + \bar{P}^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1^o - \epsilon_1^i \\ \epsilon_2^o - \epsilon_2^i \\ \epsilon_3^o - \epsilon_3^i \end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix} E_1^o \\ E_2^o \\ E_3^o \end{Bmatrix} + Q^{oli} \cdot \begin{Bmatrix} f_2^j [q_{12}^{oli} (\epsilon_1^o - \epsilon_1^i) + q_{22}^{oli} (\epsilon_2^o - \epsilon_2^i) + q_{32}^{oli} (\epsilon_3^o - \epsilon_3^i)] \\ f_3^j [q_{13}^{oli} (\epsilon_1^o - \epsilon_1^i) + q_{23}^{oli} (\epsilon_2^o - \epsilon_2^i) + q_{33}^{oli} (\epsilon_3^o - \epsilon_3^i)] \end{Bmatrix}$$

respectivamente, según se deduce de las ecuaciones [4] y [5].

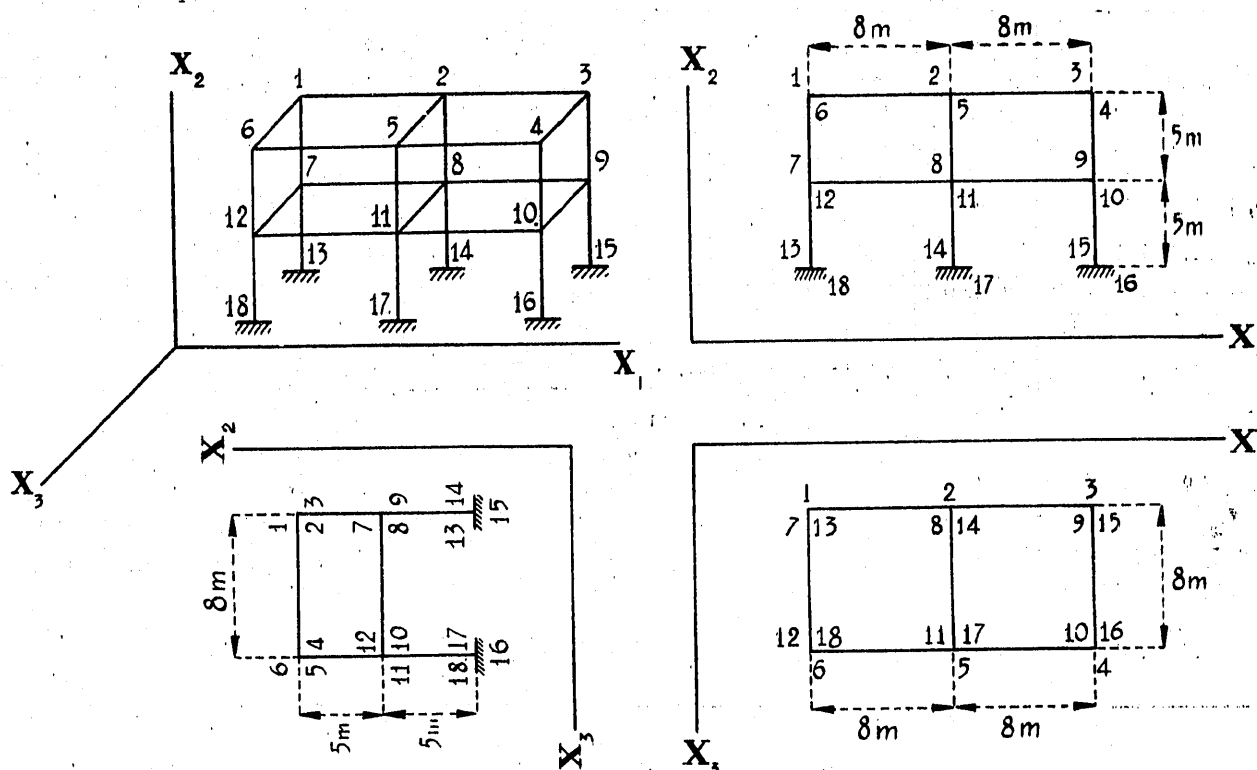
A continuación desarrollamos un ejemplo, que sirve de complemento al método expuesto, y pensamos publicar, más adelante, otros artículos con su aplicación a algunos casos prácticos frecuentes en construcción.

(*) M. García Ortega: *Cálculo de estructuras reticulares*, página 98.

(**) M. García Ortega: *Cálculo de estructuras reticulares*, págs. 76 y 101.

EJEMPLO:

Se hace aplicación del cálculo expuesto a la siguiente estructura (*):



CARACTERÍSTICAS DE LAS BARRAS

BARRAS	Luces — cm.	SECCIONES		$\frac{a}{b}$	k_3 — Kg. x cm.	FACTORES		
		a — cm.	b — cm.			λ'	$\frac{k_1}{k_2}$	$\frac{k_2}{k_3}$
Dinteles:								
1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/1, 7/8, 8/9, 9/10, 10/11, 11/12, 12/7	800	40	70	0,57	$\frac{1}{3} \frac{40 \times 70^3}{800} E$	$\frac{100}{6} \frac{E}{G}$	0,325	0,0905
2/5, 8/11	800	40	90	0,44	$\frac{1}{3} \frac{40 \times 90^3}{800} E$		0,200	0,0615
Pilares:								
1/7, 3/9, 4/10, 6/12	500	40	40	1	$\frac{1}{3} \frac{40^4}{500} E$		1	0,1818
2/8, 5/11, 7/13, 9/15, 10/16, 12/18	500	50	50	1	$\frac{1}{3} \frac{50^4}{500} E$		1	0,1818
8/14, 11/17	500	70	70	1	$\frac{1}{3} \frac{70^4}{500} E$		1	0,1818

(*) En el número de *Ciencia Aplicada*, correspondiente a los meses de mayo y junio del corriente año, se estudia otro tipo de estructura, con barras oblicuas respecto a los planos de referencia. Se determina el cuadro-fórmula en función de las reacciones de empotramiento perfecto.

CARACTERÍSTICAS DE LAS BARRAS

BARRAS	VALORES DE CÁLCULO						$\frac{3}{2L} k_3$	$-\frac{3}{2L} k_2$	λ''	VALORES DE CÁLCULO		$\frac{2}{L} \frac{1}{\lambda''}$	VALORES DE CÁLCULO	
	k_1	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3				φ_2	φ_3		f_2	f_3
Dinteles:														
1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/1, 7/8, 8/9, 9/10, 10/11, 11/12, 12/7	3,10	11,16	34,30	— 3,10	5,58	17,15	$\frac{3 \times 34,3}{2 \times 800}$	$-\frac{3 \times 11,16}{2 \times 800}$	1 200	12,86	— 4,18	0,5	6,43	2,09
2/5, 8/11	4,48	14,58	72,90	— 4,48	7,29	36,45	$\frac{3 \times 72,9}{2 \times 800}$	$-\frac{3 \times 14,58}{2 \times 800}$		27,34	— 5,47	0,5	13,67	2,73
Pilares:														
1/7, 3/9, 4/10, 6/12	1,86	10,24	10,24	— 1,86	5,12	5,12	$\frac{3 \times 10,24}{1000}$	$-\frac{3 \times 10,24}{1000}$		6,14	— 6,14	0,8	4,91	4,91
2/8, 5/11, 7/13, 9/15, 10/16, 12/18	4,54	25,00	25,00	— 4,54	12,50	12,50	$\frac{3 \times 25,00}{1000}$	$-\frac{3 \times 25,00}{1000}$		15,00	— 15,00	0,8	12,00	12,00
8/14, 11/17	17,46	96,04	96,04	— 17,46	48,02	48,02	$\frac{3 \times 96,04}{1000}$	$-\frac{3 \times 96,04}{1000}$		57,62	— 57,62	0,8	46,10	46,10

Se estudiará el efecto de dos sobrecargas aplicadas simultáneamente: una, vertical, uniforme, actuando sobre cada una de las dos plantas, a razón de 300 kilogramos por metro cuadrado, y otra, horizontal, formada por fuerzas aisladas paralelas al eje X_3 y positivas, actuando sobre los nudos 1, 2, 3, 7, 8 y 9.

Descompuestas las superficies de las plantas en zonas triangulares, cada zona produce en el dintel correspondiente un momento de empotramiento cuyo valor absoluto es:

$$M_e = \frac{5}{96} p l^2 = \frac{5}{96} 12 \times 800^2 = 4 \times 10^5 \text{ Kg./cm.}$$

y una fuerza-reacción que vale:

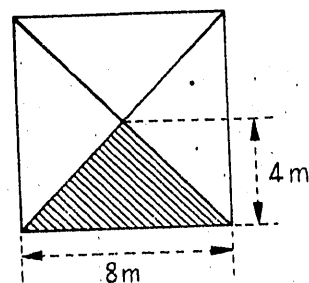
$$R = \frac{1}{2} p \frac{l}{2} = \frac{1}{2} 12 \times 400 = 2400 \text{ Kg.}$$

Las fuerzas aisladas horizontales se suponen:

De 2500 Kg. las que actúan sobre los nudos 1, 3, 7 y 9.

De 5000 Kg. las que actúan sobre los nudos 2 y 8.

La estructura tiene dos planos de simetría, paralelos a $X_1 X_2$ y $X_2 X_3$. Como respecto del segundo las sobrecargas son simétricas, descomponemos la sobrecarga total en dos: una, simétrica, y otra, antisimétrica respecto al plano de simetría paralelo al $X_1 X_2$;



$$h = 0,01 \times 4 \times 300 = 12 \text{ kg/cm}$$

resultando las reacciones de empotramiento perfecto que figuran en los siguientes cuadros:

CARGA TOTAL

NUDOS	VALORES REALES						FACTORES		VALORES DE CÁLCULO					
	Kg./cm.			Kg.			λ	$\lambda\lambda''$	M_{E_1}	M_{E_2}	M_{E_3}	E_1	E_2	E_3
	M_{E_1}	M_{E_2}	M_{E_3}	E_1	E_2	E_3								
1 y 7	-4.10^5	0	4.10^5	0	4800	-2500	8.10^8	4	-50	0	50	0	120	$-62,5$
2 y 8	-8.10^5	0	0	0	9600	-5000			-100	0	0	0	240	-125
3 y 9	-4.10^5	0	-4.10^5	0	4800	-2500			-50	0	-50	0	120	$-62,5$
4 y 10	4.10^5	0	-4.10^5	0	4800	0			50	0	-50	0	120	0
5 y 11	8.10^5	0	0	0	9600	0			100	0	0	0	240	0
6 y 12	4.10^5	0	4.10^5	0	4800	0			50	0	50	0	120	0

NUDOS	CARGA SIMÉTRICA						CARGA ANTIMÉTRICA					
	M_{E_1}	M_{E_2}	M_{E_3}	E_1	E_2	E_3	M_{E_1}	M_{E_2}	M_{E_3}	E_1	E_2	E_3
1 y 7	-50	0	50	0	120	$-31,25$	0	0	0	0	0	$-31,25$
2 y 8	-100	0	0	0	240	$-62,50$	0	0	0	0	0	$-62,50$
3 y 9	-50	0	-50	0	120	$-31,25$	0	0	0	0	0	$-31,25$
4 y 10	50	0	-50	0	120	$31,25$	0	0	0	0	0	$-31,25$
5 y 11	100	0	0	0	240	$62,50$	0	0	0	0	0	$-62,50$
6 y 12	50	0	50	0	120	$31,25$	0	0	0	0	0	$-31,25$

Las matrices de las barras son:

Barras: 1/2, 2/3, 6/5, 5/4, 7/8, 8/9, 12/11, 11/10. (Para los nudos 1, 2, 6, 5, 7, 8, 12 y 11, respectivamente.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 3,10 & 0 & 0 \\ 0 & 11,16 & 0 \\ 0 & 0 & 34,30 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} -3,10 & 0 & 0 \\ 0 & 5,58 & 0 \\ 0 & 0 & 17,15 \end{vmatrix} = T'_c$$

$$P_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,86 \\ 0 & -4,18 & 0 \end{vmatrix} = -P'_\varphi \quad \bar{P}_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,18 \\ 0 & 12,86 & 0 \end{vmatrix} = \bar{P}'_\varphi$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N \\ 6,43 (x_2 - x'_2) \\ 2,09 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barras 1/6, 3/4, 7/12, 9/10. (Para los nudos 1, 3, 7 y 9.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 34,30 & 0 & 0 \\ 0 & 11,16 & 0 \\ 0 & 0 & 3,10 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} 17,15 & 0 & 0 \\ 0 & 5,53 & 0 \\ 0 & 0 & -3,10 \end{vmatrix} = T'_c$$

$$P_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 4,18 & 0 \\ -12,86 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_{\varphi} \quad \bar{P}_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & -12,86 & 0 \\ 4,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_{\varphi}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,09 (x_1 - x'_1) \\ 6,43 (x_2 - x'_2) \\ N \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barras 2/5, 8/11. (Para los nudos 2 y 8.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 72,90 & 0 & 0 \\ 0 & 14,58 & 0 \\ 0 & 0 & 4,48 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} 36,45 & 0 & 0 \\ 0 & 7,29 & 0 \\ 0 & 0 & -4,48 \end{vmatrix} = T'_c$$

$$P_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 5,47 & 0 \\ -27,34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_{\varphi} \quad \bar{P}_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & -27,34 & 0 \\ 5,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_{\varphi}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,73 (x_1 - x'_1) \\ 13,67 (x_2 - x'_2) \\ N \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barras 7/1, 9/3, 10/4, 12/6. (Para los nudos 7, 9, 10 y 12.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 10,24 & 0 & 0 \\ 0 & 1,86 & 0 \\ 0 & 0 & 10,24 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} 5,12 & 0 & 0 \\ 0 & -1,86 & 0 \\ 0 & 0 & 5,12 \end{vmatrix} = -T'_c$$

$$P_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6,14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6,14 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_{\varphi} \quad \bar{P}_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,14 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,14 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_{\varphi}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4,91 (x_1 - x'_1) \\ N \\ 4,91 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barras 8/2, 11/5, 13/7, 15/5, 16/10, 18/12. (Para los nudos 8, 11, 13, 15, 16 y 18.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 25,00 & 0 & 0 \\ 0 & 4,54 & 0 \\ 0 & 0 & 25,00 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} 12,50 & 0 & 0 \\ 0 & -4,54 & 0 \\ 0 & 0 & 12,50 \end{vmatrix} = T'_c$$

$$P_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -15,00 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15,00 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_{\varphi} \quad \bar{P}_{\varphi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 15,00 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15,00 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_{\varphi}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12,00 (x_1 - x'_1) \\ N \\ 12,00 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barras 14/8, 17/11. (Para los nudos 14 y 17.)

$$T_k = \begin{vmatrix} 96,04 & 0 & 0 \\ 0 & 17,46 & 0 \\ 0 & 0 & 96,04 \end{vmatrix} = T'_k \quad T_c = \begin{vmatrix} 48,02 & 0 & 0 \\ 0 & -17,46 & 0 \\ 0 & 0 & 48,02 \end{vmatrix} = T'_c$$

$$P_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -57,62 \\ 0 & 0 & 0 \\ 57,62 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_\varphi \quad \bar{P}_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 57,62 \\ 0 & 0 & 0 \\ -57,62 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_\varphi$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46,10 (x_1 - x'_1) \\ N \\ 46,10 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Por la simetría de la estructura (*) y teniendo en cuenta las cargas que actúan, se verifica:
Para carga simétrica:

$$[I] \left\{ \begin{array}{ll} 0_{\frac{1}{1}} = 0_{\frac{3}{1}} = -0_{\frac{5}{1}} = -0_{\frac{4}{1}} & 0_{\frac{2}{1}} = -0_{\frac{5}{1}} \\ 0_{\frac{7}{1}} = 0_{\frac{9}{1}} = -0_{\frac{12}{1}} = -0_{\frac{10}{1}} & 0_{\frac{8}{1}} = -0_{\frac{11}{1}} \\ 0_{\frac{1}{2}} = 0 & \\ 0_{\frac{1}{3}} = -0_{\frac{3}{3}} = 0_{\frac{5}{3}} = -0_{\frac{4}{3}} & 0_{\frac{2}{3}} = 0_{\frac{5}{3}} = 0 \\ 0_{\frac{7}{3}} = -0_{\frac{9}{3}} = 0_{\frac{12}{3}} = -0_{\frac{10}{3}} & 0_{\frac{8}{3}} = 0_{\frac{11}{3}} = 0 \end{array} \right\} [I'] \quad [I] \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = x_2 = x_3 = 0 & [I'] \\ N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{2}{3}} = N^{\frac{4}{5}} = N^{\frac{5}{6}} & N^{\frac{1}{6}} = N^{\frac{3}{4}} \\ N^{\frac{7}{8}} = N^{\frac{8}{9}} = N^{\frac{10}{11}} = N^{\frac{11}{12}} & N^{\frac{7}{12}} = N^{\frac{9}{10}} \\ N^{\frac{1}{7}} = N^{\frac{3}{9}} = N^{\frac{4}{10}} = N^{\frac{6}{12}} & N^{\frac{2}{8}} = N^{\frac{5}{11}} \\ N^{\frac{7}{13}} = N^{\frac{9}{15}} = N^{\frac{10}{16}} = N^{\frac{12}{18}} & N^{\frac{8}{14}} = N^{\frac{11}{17}} \end{array} \right\} [I'']$$

Para carga antisimétrica:

$$[II] \left\{ \begin{array}{ll} 0_{\frac{1}{1}} = 0_{\frac{3}{1}} = 0_{\frac{5}{1}} = 0_{\frac{4}{1}} & 0_{\frac{2}{1}} = 0_{\frac{5}{1}} \\ 0_{\frac{7}{1}} = 0_{\frac{9}{1}} = 0_{\frac{12}{1}} = 0_{\frac{10}{1}} & 0_{\frac{8}{1}} = 0_{\frac{11}{1}} \\ 0_{\frac{1}{2}} = -0_{\frac{3}{2}} = 0_{\frac{5}{2}} = -0_{\frac{4}{2}} & 0_{\frac{2}{2}} = 0_{\frac{5}{2}} = 0 \\ 0_{\frac{7}{2}} = -0_{\frac{9}{2}} = 0_{\frac{12}{2}} = -0_{\frac{10}{2}} & 0_{\frac{8}{2}} = 0_{\frac{11}{2}} = 0 \\ 0_{\frac{1}{3}} = -0_{\frac{3}{3}} = -0_{\frac{5}{3}} = 0_{\frac{4}{3}} & 0_{\frac{2}{3}} = 0_{\frac{5}{3}} = 0 \\ 0_{\frac{7}{3}} = -0_{\frac{9}{3}} = -0_{\frac{12}{3}} = 0_{\frac{10}{3}} & 0_{\frac{8}{3}} = 0_{\frac{11}{3}} = 0 \end{array} \right\} [II']$$

$$x_1 = x_2 = 0 \quad [II'']$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{2}{3}} = -N^{\frac{4}{5}} = -N^{\frac{5}{6}} & N^{\frac{1}{6}} = N^{\frac{2}{5}} = N^{\frac{3}{4}} = 0 \\ N^{\frac{7}{8}} = N^{\frac{8}{9}} = -N^{\frac{10}{11}} = -N^{\frac{11}{12}} & N^{\frac{7}{12}} = N^{\frac{8}{11}} = N^{\frac{9}{10}} = 0 \\ N^{\frac{1}{7}} = N^{\frac{3}{9}} = -N^{\frac{4}{10}} = -N^{\frac{6}{12}} & N^{\frac{2}{8}} = -N^{\frac{5}{11}} \\ N^{\frac{7}{13}} = N^{\frac{9}{15}} = -N^{\frac{10}{16}} = -N^{\frac{12}{18}} & N^{\frac{8}{14}} = -N^{\frac{11}{17}} \end{array} \right\} [II''']$$

(*) En el número de *Ciencia Aplicada*, correspondiente a los meses de mayo y junio, exponemos un estudio general sobre las propiedades de las estructuras simétricas.

Como

$$n_t = 3n - n'_t = 3(18 - 6) = 36 \quad \text{y} \quad n_b = 26,$$

resulta:

$$n_x = 36 - 26 = 10;$$

luego se trata de una estructura deformable, de décimo orden, y se toman como traslaciones principales:

$$x_1^1, x_1^6, x_1^7, x_1^{12}$$

$$x_{\frac{1}{3}}^1, x_{\frac{1}{3}}^2, x_{\frac{1}{3}}^3, x_{\frac{1}{3}}^7, x_{\frac{1}{3}}^8, x_{\frac{1}{3}}^9$$

pudiendo expresarse todas las traslaciones en función de las principales de la siguiente forma, suponiendo acortamientos nulos:

$$\left. \begin{aligned} x_1^1 &= x_1^2 = x_1^3 & x_1^6 &= x_1^5 = x_1^4 & x_1^7 &= x_1^8 = x_1^9 & x_1^{12} &= x_1^{11} = x_1^{10} \\ x_{\frac{1}{3}}^1 &= x_{\frac{1}{3}}^6 & x_{\frac{1}{3}}^2 &= x_{\frac{1}{3}}^5 & x_{\frac{1}{3}}^3 &= x_{\frac{1}{3}}^4 & x_{\frac{1}{3}}^7 &= x_{\frac{1}{3}}^{12} & x_{\frac{1}{3}}^8 &= x_{\frac{1}{3}}^{11} & x_{\frac{1}{3}}^9 &= x_{\frac{1}{3}}^{10} \\ x_{\frac{1}{2}}^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{[III]}$$

Pero en la carga simétrica todas las traslaciones son nulas, y en la antimétrica se verifica:

$$\left. \begin{aligned} x_1^i &= 0 & x_{\frac{1}{2}}^i &= 0 \\ x_{\frac{1}{3}}^1 &= x_{\frac{1}{3}}^3 & x_{\frac{1}{3}}^7 &= x_{\frac{1}{3}}^9 \end{aligned} \right\} \quad \text{[III']}$$

y se pueden expresar todas las traslaciones en función de las principales:

$$x_{\frac{1}{3}}^1, x_{\frac{1}{3}}^2, x_{\frac{1}{3}}^7 \quad \text{y} \quad x_{\frac{1}{3}}^8.$$

Como las barras son homogéneas y de sección constante, $c = c'$ y $\varphi = \varphi'$, y las ecuaciones de equilibrio en los nudos libres son:

$$T_{\frac{o/l}{k}} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_{\frac{o/l}{c}} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \bar{P}_{\frac{o/l}{\varphi}} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{\frac{o}{1}} \\ M_{\frac{o}{2}} \\ M_{\frac{o}{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P_{\frac{o/l}{\varphi}} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o + \theta_1^i \\ \theta_2^o + \theta_2^i \\ \theta_3^o + \theta_3^i \end{vmatrix} + T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{\frac{o}{1}} \\ E_{\frac{o}{2}} \\ E_{\frac{o}{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Que en nuestro caso, teniendo en cuenta las relaciones [I'], [I''], [II'] y [II''] se convierten en:
Para carga simétrica:

$$T_k^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ 0 \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_c^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ 0 \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M\theta_1^o \\ 0 \\ M\theta_3^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P_{\varphi}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o + \theta_1^i \\ 0 \\ \theta_3^o + \theta_3^i \end{vmatrix} + T_f^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ E\theta_2^o \\ E\theta_3^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Y para carga antimétrica:

$$T_k^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o \\ \theta_2^o \\ \theta_3^o \end{vmatrix} + T_c^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \\ \theta_3^i \end{vmatrix} + \bar{P}_{\varphi}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$P_{\varphi}^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1^o + \theta_1^i \\ \theta_2^o + \theta_2^i \\ \theta_3^o + \theta_3^i \end{vmatrix} + T_f^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_1^i \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E\theta_3^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

En los valores de

$$T_f^{o/i} \cdot \begin{vmatrix} x_1^o - x_2^o \\ x_2^o - x_2^i \\ x_3^o - x_3^i \end{vmatrix}$$

ya determinados para cada barra, se hará $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, para carga simétrica, y $x_1 = x_2 = 0$, para carga antimétrica.

En virtud de las relaciones [I] y [II] se convierten en identidades las segundas ecuaciones de los nudos 1 y 7 para carga simétrica, y las segundas, terceras y cuartas de los nudos 2 y 8 para cargas simétrica y antimétrica. Las restantes, teniendo en cuenta que

$$\theta_3^o = \theta_3^i = \theta_3^s = \theta_3^{11} = 0$$

para carga simétrica y

$$\theta_2^o = \theta_2^i = \theta_2^s = \theta_2^{11} = \theta_3^o = \theta_3^i = \theta_3^s = \theta_3^{11} = 0$$

para carga antimétrica, y que $N^{a/b} = N^{b/a}$, son:

Para carga simétrica:

Nudo 1.

$$(3,10 + 34,30 + 10,24) \theta_1^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_1^{\frac{2}{3}} + 17,15 \theta_1^{\frac{6}{7}} + 5,12 \theta_1^{\frac{7}{8}} - 50,00 = 0$$

$$(34,30 + 3,10 + 10,24) \theta_3^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_3^{\frac{6}{8}} + 5,12 \theta_3^{\frac{7}{8}} + 50,00 = 0$$

$$6,14 \left(\theta_3^{\frac{1}{2}} + \theta_3^{\frac{7}{8}} \right) + N^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$12,86 \theta_3^{\frac{1}{2}} + 12,86 \left(\theta_1^{\frac{1}{2}} + \theta_1^{\frac{6}{7}} \right) - N^{\frac{1}{7}} + 120,00 = 0$$

$$-6,14 \left(\theta_1^{\frac{1}{2}} + \theta_1^{\frac{7}{8}} \right) + N^{\frac{1}{6}} - 31,25 = 0.$$

Nudo 2.

$$(3,10 + 3,10 + 72,90 + 25,00) \theta_1^{\frac{2}{3}} - 3,10 \theta_1^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_1^{\frac{2}{3}} + 36,45 \theta_1^{\frac{5}{8}} + 12,50 \theta_1^{\frac{8}{9}} - 100,00 = 0$$

$$-12,86 \theta_3^{\frac{1}{2}} + 12,86 \theta_3^{\frac{3}{8}} - 27,34 \left(\theta_1^{\frac{2}{3}} + \theta_1^{\frac{5}{8}} \right) - N^{\frac{2}{8}} + 240,00 = 0$$

$$-15,00 \left(\theta_1^{\frac{2}{3}} + \theta_1^{\frac{8}{9}} \right) + N^{\frac{2}{5}} - 62,50 = 0.$$

Nudo 7.

$$(10,24 + 3,10 + 34,30 + 25,00) \theta_1^{\frac{7}{8}} + 5,12 \theta_1^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_1^{\frac{8}{9}} + 17,15 \theta_1^{\frac{12}{13}} - 50,00 = 0$$

$$(10,24 + 34,30 + 3,10 + 25,00) \theta_3^{\frac{7}{8}} + 5,12 \theta_3^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_3^{\frac{12}{13}} + 50,00 = 0$$

$$-6,14 \left(\theta_3^{\frac{7}{8}} + \theta_3^{\frac{1}{2}} \right) + 15,00 \theta_3^{\frac{7}{8}} + N^{\frac{7}{8}} = 0$$

$$12,86 \theta_3^{\frac{7}{8}} - 12,86 \left(\theta_1^{\frac{7}{8}} + \theta_1^{\frac{12}{13}} \right) + N^{\frac{7}{11}} - N^{\frac{7}{13}} + 120,00 = 0$$

$$6,14 \left(\theta_1^{\frac{7}{8}} + \theta_1^{\frac{1}{2}} \right) - 15,00 \theta_1^{\frac{7}{8}} + N^{\frac{7}{12}} - 31,25 = 0.$$

Nudo 8.

$$(25,00 + 3,10 + 3,10 + 72,90 + 96,04) \theta_1^{\frac{8}{9}} + 12,50 \theta_1^{\frac{2}{3}} - 3,10 \theta_1^{\frac{7}{8}} - 3,10 \theta_1^{\frac{8}{9}} + 36,45 \theta_1^{\frac{11}{12}} - 100,00 = 0$$

$$-12,86 \theta_3^{\frac{7}{8}} + 12,86 \theta_3^{\frac{3}{8}} - 27,34 \left(\theta_1^{\frac{8}{9}} + \theta_1^{\frac{11}{12}} \right) + N^{\frac{8}{2}} - N^{\frac{8}{14}} + 240,00 = 0$$

$$15,00 \left(\theta_1^{\frac{8}{9}} + \theta_1^{\frac{2}{3}} \right) - 57,62 \theta_1^{\frac{8}{9}} + N^{\frac{8}{11}} - 62,50 = 0.$$

Para carga antimétrica:

Nudo 1.

$$(3,10 + 34,30 + 10,24) \theta_1^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_1^{\frac{2}{3}} + 17,15 \theta_1^{\frac{6}{7}} + 5,12 \theta_1^{\frac{7}{8}} - 6,14 \left(x_3^{\frac{1}{2}} - x_3^{\frac{7}{8}} \right) = 0$$

$$(11,16 + 11,16 + 1,86) \theta_3^{\frac{1}{2}} + 5,58 \theta_3^{\frac{6}{8}} - 1,86 \theta_3^{\frac{7}{8}} - 4,18 \left(x_3^{\frac{1}{2}} - x_3^{\frac{2}{3}} \right) = 0$$

$$(34,30 + 3,10 + 10,24) \theta_3^{\frac{1}{2}} - 3,10 \theta_3^{\frac{6}{8}} + 5,12 \theta_3^{\frac{7}{8}} = 0$$

$$4,18 \left(\theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \theta_{\frac{2}{2}}^{\frac{6}{2}} \right) + 6,14 \left(\theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} + \theta_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \right) + N^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$12,86 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} - 12,86 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{6}{1}} \right) - N^{\frac{1}{7}} = 0$$

$$- 4,18 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 6,14 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \right) + N^{\frac{1}{6}} + 4,91 \left(x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \right) - 31,25 = 0$$

Nudo 2.

$$(3,10 + 3,10 + 72,90 + 25,00) \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + 36,45 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{5}{1}} + 12,50 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{6}{1}} - 15,00 \theta \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} \right) = 0$$

$$- 12,86 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} + 12,86 \theta_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} - 27,34 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{5}{1}} \right) - N^{\frac{2}{8}} = 0$$

$$4,18 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 4,18 \theta_{\frac{2}{2}}^{\frac{6}{2}} - 15,00 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} - x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \right) + N^{\frac{2}{5}} + 12,00 \left(x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} \right) - 62,50 = 0$$

Nudo 7.

$$(10,24 + 3,10 + 34,30 + 25,00) \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} + 5,12 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + 17,15 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{12}{1}} + 6,14 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} - x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \right) - 15,00 x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} = 0$$

$$1,86 + 11,16 + 11,16 + 4,54 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} - 1,86 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 5,58 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{12}{2}} - 4,18 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} \right) = 0$$

$$(10,24 + 34,30 + 3,10 + 25,00) \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} + 5,12 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{12}{3}} = 0$$

$$- 6,14 \left(\theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} + \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{12}{3}} \right) + 4,18 \left(\theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} + \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{12}{2}} \right) + 15,00 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} + N^{\frac{7}{8}} = 0$$

$$12,86 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} - 12,86 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{12}{1}} \right) + N^{\frac{7}{1}} - N^{\frac{7}{13}} = 0$$

$$6,14 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{12}{1}} \right) - 4,18 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} - 15,00 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} + 4,91 \left(x_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} - x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} + x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} \right) + N^{\frac{7}{12}} + 12,00 x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} - 31,25 = 0$$

Nudo 8.

$$(25,00 + 3,10 + 3,10 + 72,90 + 96,04) \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + 12,50 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}} - 3,10 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{9}{1}} + 36,45 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{11}{1}} + 15 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \right) - 57,62 x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} = 0$$

$$- 12,86 \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} + 12,86 \theta_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} - 27,34 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{11}{1}} \right) + N^{\frac{8}{2}} - N^{\frac{8}{14}} = 0$$

$$15,00 \left(\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}} \right) + 4,18 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} - 4,18 \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} - 57,62 \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}} + 12,00 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \right) + 2,09 \left(x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} - x_{\frac{2}{3}}^{\frac{9}{3}} \right) +$$

$$+ N^{\frac{8}{11}} + 46,10 x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}} - 62,50 = 0$$

Lo mismo para carga simétrica que antimétrica, las ecuaciones anteriores constituyen dos sistemas de ecuaciones que pueden resolverse independientemente; uno, proporciona los movimientos de los nudos, y el otro, las compresiones en función de dichos movimientos. Todas las ecuaciones deben expresarse en función de:

$$\theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}}, \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{2}{1}}, \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{7}{1}}, \theta_{\frac{1}{1}}^{\frac{8}{1}}, \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}, \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}, \theta_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}}, x_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}, x_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}, x_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \text{ y } x_{\frac{2}{3}}^{\frac{8}{3}},$$

mediante las relaciones [I'], [II'] y [III'].

Los sistemas que proporcionan los movimientos de los nudos son:

Para carga simétrica:

$$\begin{aligned}
 M_{e1}^1 + M_{i1}^1 &= 0 \quad \text{o sea} \quad 30,49 \theta_1^1 - 3,10 \theta_1^2 + 5,12 \theta_1^7 - 50,00 = 0 \\
 M_{e1}^2 + M_{i1}^2 &= 0 \quad \text{•} \quad -6,20 \theta_1^1 + 67,65 \theta_1^2 + 12,50 \theta_1^8 - 100,00 = 0 \\
 M_{e1}^7 + M_{i1}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad 5,12 \theta_1^1 + 55,49 \theta_1^2 - 3,10 \theta_1^8 - 50,00 = 0 \\
 M_{e1}^8 + M_{i1}^8 &= 0 \quad \text{•} \quad 12,50 \theta_1^2 - 6,20 \theta_1^7 + 163,69 \theta_1^8 - 100,00 = 0 \\
 M_{e3}^1 + M_{i3}^1 &= 0 \quad \text{•} \quad 44,54 \theta_3^1 + 5,12 \theta_3^7 + 50,00 = 0 \\
 M_{e3}^7 + M_{i3}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad 5,12 \theta_3^1 + 69,54 \theta_3^7 + 50,00 = 0.
 \end{aligned} \quad \text{[IV]}$$

Para carga antimétrica:

$$\begin{aligned}
 M_{e1}^1 + M_{i1}^1 &= 0 \quad \text{o sea} \quad 64,79 \theta_1^1 - 6,14 x_3^1 - 3,10 \theta_1^2 + 5,12 \theta_1^7 + 6,14 x_3^7 = 0 \\
 M_{e2}^1 + M_{i2}^1 &= 0 \quad \text{•} \quad 29,76 \theta_2^1 - 4,18 x_3^1 + 4,18 x_3^2 - 1,86 \theta_2^7 = 0 \\
 E_{13}^1 + E_{13}^1 &= 0 \quad \text{•} \quad -6,14 \theta_1^1 - 4,18 \theta_2^1 + 7,00 x_3^1 - 2,09 x_3^2 - 6,14 \theta_1^7 - 4,91 x_3^7 - 31,25 = 0 \\
 M_{e1}^2 + M_{i1}^2 &= 0 \quad \text{•} \quad -6,20 \theta_1^1 + 140,55 \theta_1^2 - 15,00 x_3^2 + 12,50 \theta_1^8 + 15,00 x_3^8 = 0 \\
 E_{23}^2 + E_{23}^2 &= 0 \quad \text{•} \quad 8,36 \theta_2^1 - 4,18 x_3^1 - 15,00 \theta_1^2 + 16,18 x_3^2 - 15,00 \theta_1^8 - 12,00 x_3^8 - 62,50 = 0 \\
 M_{e1}^7 + M_{i1}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad 5,12 \theta_1^1 - 6,14 x_3^1 + 89,79 \theta_1^7 - 8,86 x_3^7 - 3,10 \theta_1^8 = 0 \\
 M_{e2}^7 + M_{i2}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad -1,86 \theta_2^1 + 34,30 \theta_2^2 - 4,18 x_3^7 + 4,18 x_3^8 = 0 \\
 E_{23}^7 + E_{23}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad 6,14 \theta_1^1 - 4,91 x_3^1 - 8,86 \theta_1^7 - 4,18 \theta_2^7 + 19,00 x_3^7 - 2,09 x_3^8 - 31,25 = 0 \\
 M_{e1}^8 + M_{i1}^8 &= 0 \quad \text{•} \quad 12,50 \theta_1^2 - 15,00 x_3^2 - 6,20 \theta_1^7 + 236,59 \theta_1^8 - 42,62 x_3^8 = 0 \\
 E_{13}^8 + E_{13}^8 &= 0 \quad \text{•} \quad 15,00 \theta_1^2 - 12,00 x_3^2 + 8,36 \theta_2^2 - 4,18 x_3^7 - 42,62 \theta_1^8 + 62,28 x_3^8 - 62,50 = 0 \\
 M_{e3}^1 + M_{i3}^1 &= 0 \quad \text{•} \quad 50,74 \theta_3^1 + 5,12 \theta_3^7 = 0 \\
 M_{e3}^7 + M_{i3}^7 &= 0 \quad \text{•} \quad 5,12 \theta_3^1 + 75,74 \theta_3^7 = 0.
 \end{aligned} \quad \text{[V]}$$

Los sistemas [IV] y [V] se resuelven fácilmente empleando los correspondientes cuadros, prescindiendo en el [V] de las incógnitas θ_3^1 y θ_3^7 y de las ecuaciones:

$$M_{e3}^1 + M_{i3}^1 = 0 \quad \text{y} \quad M_{e3}^7 + M_{i3}^7 = 0,$$

puesto que de ellas se deduce inmediatamente $\theta_3^1 = \theta_3^7 = 0$.

Los cuadros 1.º y 3.º corresponden a carga simétrica, y los 2.º y 4.º a carga antimétrica. Primero, mediante los cuadros 1.º y 2.º se determinan los momentos de los nudos en función de los de orden superior; después, empleando los 3.º y 4.º, se obtienen los valores numéricos, y, por último, los valores definitivos correspondientes a la carga total por medio del cuadro 5.º (*).

(*) Para comprender mejor el desarrollo de los cuadros, pueden verse los ejemplos contenidos en el libro *Cálculo de estructuras reticulares*, de M. García Ortega, y el artículo "Un edificio y un método de cálculo", publicado en los números de junio y julio de 1949 de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

En los cuadros 1.º y 2.º se incluyen sendas columnas para comprobaciones. Para efectuarlas, se escriben en la columna correspondiente a las ecuaciones $M_e + M_i = 0$, ó $E + F = 0$, las sumas de los coeficientes respectivos, y al realizar las sustituciones sucesivas se opera con los términos de esta columna, como si fueran coeficientes de una incógnita; debe verificarse que en las filas que proporcionan los valores de las incógnitas en función de las de orden superior, los términos correspondientes a la columna de comprobaciones aumentados en uno sean iguales a las sumas de los restantes. Así, por ejemplo, en el cálculo de θ_1^1 , para carga simétrica, 7,51 es la suma $-50,00 + 5,12 + 55,49 - 3,10$; 2,939 y 0,231 son los productos $5,12 \cdot 0,574$ y $0,522 \cdot 0,442$, respectivamente, y 10,680 es la suma $7,51 + 2,939 + 0,231$; como comprobación se obtiene $1 - 0,196 \approx 0,746 + 0,059$. Es fácil demostrar la exactitud del procedimiento comprobatorio.

En el cuadro 3.º se indican las operaciones que se efectúan, análogas a las del 4.º, aunque éste se dispone en forma más simplificada.

Conocidos los valores de

$$\theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1, \theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2, \theta_1^7, \theta_2^7, \theta_3^7, \theta_1^8, \theta_2^8, \theta_3^8,$$

para carga simétrica y

$$\theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1, \theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \theta_1^7, \theta_2^7, \theta_3^7, x_1^7, x_2^7, x_3^7,$$

para carga antimétrica, las expresiones [I'], [I''], [II'], [II''], [III] y [III'] proporcionan los valores de los restantes giros y traslaciones. Después, inmediatamente, se determinan las compresiones por medio de las siguientes expresiones:

Para carga simétrica:

$$\left. \begin{array}{ll} E_1^1 + E_1^1 = 0 & \text{o sea } N^{1/2} = -6,14 \left(\theta_3^1 + \theta_3^1 \right) \\ E_2^1 + E_2^1 = 0 & \cdot N^{1/7} = 120,00 + 12,86 \theta_3^1 \\ E_3^1 + E_3^1 = 0 & \cdot N^{1/6} = 31,25 + 6,14 \left(\theta_1^1 + \theta_1^1 \right) \\ E_2^2 + E_2^2 = 0 & \cdot N^{2/8} = 240,00 - 25,72 \theta_3^1 \\ E_3^2 + E_3^2 = 0 & \cdot N^{2/5} = 62,50 + 15,00 \left(\theta_1^2 + \theta_1^2 \right) \\ E_1^7 + E_1^7 = 0 & \cdot N^{7/8} = 6,14 \theta_3^1 - 8,86 \theta_3^7 \\ E_2^7 + E_2^7 = 0 & \cdot N^{7/13} = N^{1/7} + 120,00 + 12,86 \theta_3^7 \\ E_3^7 + E_3^7 = 0 & \cdot N^{7/12} = 31,25 - 6,14 \theta_1^1 + 8,86 \theta_1^7 \\ E_2^8 + E_2^8 = 0 & \cdot N^{8/14} = N^{2/8} + 240,00 - 25,72 \theta_3^7 \\ E_3^8 + E_3^8 = 0 & \cdot N^{8/11} = 62,50 - 15,00 \theta_1^2 + 42,62 \theta_1^8 \end{array} \right\} \text{[IV]}$$

Para carga antimétrica:

$$\left. \begin{array}{ll} E_1^1 + E_1^1 = 0 & \text{o sea } N^{1/2} = -8,36 \theta_3^1 \\ E_2^1 + E_2^1 = 0 & \cdot N^{1/7} = -25,72 \theta_3^1 \\ E_3^2 + E_3^2 = 0 & \cdot N^{2/8} = -54,68 \theta_3^1 \\ E_1^7 + E_1^7 = 0 & \cdot N^{7/8} = -8,36 \theta_3^7 \\ E_2^7 + E_2^7 = 0 & \cdot N^{7/13} = N^{1/7} - 25,72 \theta_3^7 \\ E_3^8 + E_3^8 = 0 & \cdot N^{8/14} = N^{2/8} - 54,68 \theta_3^8 \end{array} \right\} \text{[V]}$$

Las expresiones [I'''] y [II'''] proporcionan las restantes compresiones. Para obtener los valores reales se multiplican los de cálculos obtenidos por $\lambda\lambda' = \frac{4}{3} 10^5 E$, resultando expresados en Kg.

En cada uno de los dos casos de carga considerados, se ha reducido el sistema primitivo a otro de la forma del [7]. En efecto, se verifica:

Para carga simétrica:

Las $n_0 = 36$ ecuaciones de la forma $\Omega_0(\theta^I, \rho^I) + M_{e0} = 0$, son las [IV] y [I'].

Las $n_t - n_b = 10$, , , $\Omega'(\theta^I, \rho^I, \Xi^I) = 0$, son las que expresan que las traslaciones principales son nulas.

Las $n_b = 26$, , , $\Omega''(\theta^I, \rho^I, \Xi^I, N^I) = 0$, son las [I'''] y [IV'].

Para carga antimétrica:

Las $n_0 = 36$ ecuaciones de la forma $\Omega_0(\theta^I, \rho^I) + M_{e0} = 0$ son las [V] de la forma $M_1 + M_2 = 0$ y las [II'].

Las $n_t - n_b = 10$, , , $\Omega'(\theta^I, \rho^I, \Xi^I) = 0$ son las [V] de la forma $\Xi + \Xi = 0$ y las

$$x_1^1 = x_1^0 = x_1^7 = x_1^{13} = 0$$

$$x_3^1 = x_3^3 \text{ y } x_3^7 = x_3^9.$$

Las $n_b = 26$, , , $\Omega''(\theta^I, \rho^I, \Xi^I, N^I) = 0$ son las [II'''] y [V'].

Las tensiones y flexiones de cada barra, a, b , se obtienen determinando los momentos totales en los extremos, debidos a la deformación, por las siguientes fórmulas generales, en las que los momentos, los giros y las traslaciones están referidas a los ejes X' , correspondientes al extremo a :

Torsión. $Mt_1^{a/b} = k_1^{a/b} \theta_1^a + c_1^{b/a} \theta_1^b$

$$Mt_1^{b/a} = k_1^{b/a} \theta_1^b + c_1^{a/b} \theta_1^a$$

Flexiones. $\left\{ \begin{array}{l} Mt_2^{a/b} = k_2^{a/b} \theta_2^a + c_2^{b/a} \theta_2^b + \varphi_3^{a/b} (x_3^a - x_3^b) \\ Mt_3^{a/b} = k_3^{a/b} \theta_3^a + c_3^{b/a} \theta_3^b + \varphi_2^{a/b} (x_2^a - x_2^b) \end{array} \right.$

$$Mt_2^{b/a} = k_2^{b/a} \theta_2^b + c_2^{a/b} \theta_2^a + \varphi_3^{b/a} (x_3^a - x_3^b)$$

$$Mt_3^{b/a} = k_3^{b/a} \theta_3^b + c_3^{a/b} \theta_3^a + \varphi_2^{b/a} (x_2^a - x_2^b)$$

Estas fórmulas se obtienen inmediatamente de las relaciones expuestas al estudiar la barra aislada, que se han resumido en un cuadro, teniendo en cuenta que para referir las fórmulas relativas al extremo b a los ejes correspondientes al a , hay que cambiar de signo a

$$Mt_1, \theta_1, Mt_2, \theta_2 \text{ y } x_2, \quad \text{o} \quad a \quad Mt_1, \theta_1, Mt_3, \theta_3 \text{ y } x_3,$$

lo que hace que cambien también de signo los términos

$$\varphi_3 (x_3^b - x_3^a) \quad \text{y} \quad \varphi_2 (x_2^b - x_2^a).$$

Conocidos los giros y traslaciones, $\vec{\theta}$ y $\vec{x}$, referidos al sistema X , los valores $\vec{\theta}'$ y $\vec{x}'$, referidos al X' se obtienen por la fórmula ya conocida:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{Bmatrix} = \bar{Q} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

En el ejemplo considerado, como se trata de barras homogéneas y de sección constante, los momentos de deformación pueden escribirse así:

$$M_{1\frac{a}{b}} = k_1 (\theta_1^a - \theta_1^b)$$

$$M_{1\frac{b}{a}} = k_1 (\theta_1^b - \theta_1^a)$$

$$M_{2\frac{a}{b}} = k_2 \left(\theta_2^a + \frac{1}{2} \theta_2^b \right) + \varphi_3 (x_3^a - x_3^b)$$

$$M_{2\frac{b}{a}} = k_2 \left(\theta_2^b + \frac{1}{2} \theta_2^a \right) + \varphi_3 (x_3^a - x_3^b)$$

$$M_{3\frac{a}{b}} = k_3 \left(\theta_3^a + \frac{1}{2} \theta_3^b \right) + \varphi_2 (x_2^a - x_2^b)$$

$$M_{3\frac{b}{a}} = k_3 \left(\theta_3^b + \frac{1}{2} \theta_3^a \right) + \varphi_2 (x_2^a - x_2^b)$$

Así, por ejemplo, para las barras concurrentes en el nudo 1, se verifica:

Barra 1/2:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Torsión.} \begin{cases} M_{1\frac{1}{2}} = M_{2\frac{1}{2}} + k_1 (\theta_1^1 - \theta_1^2) = 3,10 (2,402 - 2,367) = 0,1085 \\ M_{1\frac{2}{1}} = M_{2\frac{2}{1}} + k_1 (\theta_1^2 - \theta_1^1) = 3,10 (2,367 - 2,402) = -0,1085 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{2\frac{1}{2}} = M_{3\frac{1}{2}} + k_2 \left(\theta_2^1 + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) + \varphi_3 (x_3^1 - x_3^2) = 11,16 \cdot 0,334 - 4,18 (15,634 - 13,383) = -5,6817 \\ M_{2\frac{2}{1}} = M_{3\frac{2}{1}} + k_2 \left(\theta_2^2 + \frac{1}{2} \theta_2^1 \right) + \varphi_3 (x_3^1 - x_3^2) = 11,16 \cdot 0,167 - 4,18 (15,634 - 13,383) = -7,5455 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{3\frac{1}{2}} = M_{3\frac{1}{2}} + k_3 \left(\theta_3^1 + \frac{1}{2} \theta_3^2 \right) = 50 - 34,40 \cdot 1,049 = 14,0193 \\ M_{3\frac{2}{1}} = M_{3\frac{2}{1}} + k_3 \left(\theta_3^2 + \frac{1}{2} \theta_3^1 \right) = -50 - 34,30 \cdot 0,524 = -67,9732 \end{cases}$$

Barra 1/6:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ -X_2 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Torsión.} \begin{cases} M_{1\frac{1}{6}} = M_{6\frac{1}{6}} + k_1 (\theta_1^1 - \theta_1^6) = 3,10 (-1,049 + 1,049) = 0 \\ M_{1\frac{6}{1}} = M_{6\frac{6}{1}} + k_1 (\theta_1^6 - \theta_1^1) = 3,10 (-1,049 + 1,049) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{2\frac{1}{6}} = M_{3\frac{1}{6}} - k_2 \left(\theta_2^1 + \frac{1}{2} \theta_2^6 \right) = -11,16 (0,334 + 0,167) = -5,5912 \\ M_{2\frac{6}{1}} = M_{3\frac{6}{1}} - k_2 \left(\theta_2^6 + \frac{1}{2} \theta_2^1 \right) = -11,16 (0,334 + 0,167) = -5,5912 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{3\frac{1}{6}} = M_{3\frac{1}{6}} + k_3 \left(\theta_1^1 + \frac{1}{2} \theta_1^6 \right) = -50 + 34,30 (2,402 - 0,464) = 16,4734 \\ M_{3\frac{6}{1}} = M_{3\frac{6}{1}} + k_3 \left(\theta_1^6 + \frac{1}{2} \theta_1^1 \right) = 50 + 34,30 (-0,928 + 1,201) = 59,3639 \end{cases}$$

Barra 7/1:

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ -X_1 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Torsión.} \begin{cases} M_{t1}'^{7/1} = M_{t1}'^{7/1} + k_1 (\theta_2^7 - \theta_2^1) = 1,86 (0,300 - 0,334) = -0,0632 \\ M_{t1}'^{1/7} = M_{t1}'^{1/7} + k_1 (\theta_2^1 - \theta_2^7) = 1,86 (0,334 - 0,300) = 0,0632 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{t2}'^{7/1} = M_{t2}'^{7/1} - k_2 \left(\theta_1^7 + \frac{1}{2} \theta_1^1 \right) + \varphi_3 (x_3^7 - x_3^1) = -10,24 (2,532 + 1,201) - 6,14 (6,827 - 15,634) = 15,8491 \\ M_{t2}'^{1/7} = M_{t2}'^{1/7} - k_2 \left(\theta_1^1 + \frac{1}{2} \theta_1^7 \right) + \varphi_3 (x_3^7 - x_3^1) = -10,24 (2,402 + 1,266) - 6,14 (6,827 - 15,634) = 16,5147 \end{cases}$$

$$\text{Flexión.} \begin{cases} M_{t3}'^{7/1} = M_{t3}'^{7/1} + k_3 \left(\theta_3^7 + \frac{1}{2} \theta_3^1 \right) = 10,24 (-0,642 - 0,524) = -11,9398 \\ M_{t3}'^{1/7} = M_{t3}'^{1/7} + k_3 \left(\theta_3^1 + \frac{1}{2} \theta_3^7 \right) = 10,24 (-1,049 - 0,321) = -14,0288 \end{cases}$$

Recordando que para fijar el triedro X' se ha convenido en adoptar como orientación principal de la barra la del plano vertical que pasa por el eje, resulta que, cuando la barra es vertical, dicha orientación está indeterminada, y es necesario precisar cuáles son los ejes X'_2 y X'_3 . Para la barra 7/1, se hace adoptando como ejes X'_3 y X'_2 los paralelos a X_3 y X_1 , y del mismo sentido y sentido contrario, respectivamente.

Para obtener los momentos reales es preciso multiplicar los de cálculo obtenidos por $\lambda = 8,10^3$, resultando expresados en Kg. $\times$ cm.

	Términos conocidos	θ_1^1	θ_1^2	θ_1^7	θ_1^8	θ_3^1	θ_3^7	Comprobaciones
$M_1^1 + M_1^1 = \left\{ \begin{array}{l} \times \left(-\frac{1}{30,49} \right) \end{array} \right. \rightarrow \theta_1^1 =$	— 50,00	30,49	— 3,10	5,12				— 17,49
$M_1^2 + M_1^2 =$	1,640		0,102	— 0,168				0,574
$Sumas$	— 100,00 — 10,168 — 110,168	— 6,20	$\left. \begin{array}{l} 67,65 \\ - 0,632 \end{array} \right\} 67,018$	1,042	12,50			— 26,05 — 3,559 — 29,609
$M_1^7 + M_1^7 =$	1,644			— 0,016	— 0,187			0,442
$Sumas$	— 50,00 8,397 0,858	5,12	0,522	$\left. \begin{array}{l} 55,49 \\ - 0,860 \\ - 0,008 \end{array} \right\} 54,622$	— 3,10 — 0,098 — 3,198			7,51 2,939 0,231 10,680
$M_1^8 + M_1^8 =$	0,746				0,059			— 0,196
$Sumas$	— 100,00 20,550 — 4,744 — 84,194		12,50	$\left. \begin{array}{l} - 0,620 \\ - 0,200 \end{array} \right\} - 6,400$	$\left. \begin{array}{l} 163,69 \\ - 2,338 \\ - 0,378 \end{array} \right\} 160,974$			69,99 5,525 1,254 76,769
$M_3^1 + M_3^1 = \left\{ \begin{array}{l} \times \left(-\frac{1}{44,64} \right) \end{array} \right. \rightarrow \theta_3^1 =$	0,523							— 0,477
$Sumas$	50,00					44,54	5,12	99,66
$M_3^7 + M_3^7 =$	— 1,123						— 0,115	— 2,237
$Sumas$	50,00 — 5,750 44,250					5,12	$\left. \begin{array}{l} 69,54 \\ - 5,89 \end{array} \right\} 68,951$	124,66 — 11,453 113,207
$M_3^8 + M_3^8 =$	— 0,642							— 1,642

CUADRO NÚM. 2. — *Carga asimétrica: Determinación de los giros y traslaciones en función de los de orden superior.*

Terminos conocidos	θ_1^1	θ_2^1	x_3^1	θ_1^2	x_3^2	θ_1^3	θ_2^3	x_3^3	θ_1^4	θ_2^4	x_3^4	Comprobaciones
$M_1^1 + M_1^1 = \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X(-\frac{1}{64.79}) \\ \rightarrow \theta_1^1 = \end{array} \right.$	64,79											66,810
$M_2^1 + M_2^1 = \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X(-\frac{1}{29.76}) \\ \rightarrow \theta_2^1 = \end{array} \right.$		29,76										-1,031
$E_3^1 + E_3^1 = \left\{ \begin{array}{l} -6,14 \theta_1^1 = \\ -4,18 \theta_2^1 = \\ \text{Sumas} \rightarrow X(-\frac{1}{5.832}) \\ \rightarrow x_3^1 = \end{array} \right.$	-6,14	-4,18	7,00	-0,295	-0,140	-2,09	-0,259	-0,938				-47,71
			-0,583			0,485		6,330				3,921
			-0,585			-5,655		-37,459				6,423
$M_1^2 + M_1^2 = \left\{ \begin{array}{l} -6,20 \theta_1^2 = \\ -0,589 x_3^2 = \\ \text{Sumas} \rightarrow X(-\frac{1}{14.022}) \\ \rightarrow \theta_1^2 = \end{array} \right.$	-6,20		-0,589			0,970		15,00				14,685
						0,490		6,392				-3,783
						-0,571		-0,437				14,9459
$E_3^2 + E_3^2 = \left\{ \begin{array}{l} 8,36 \theta_2^2 = \\ -3,010 x_3^2 = \\ -15,154 \theta_1^2 = \\ \text{Sumas} \rightarrow X(-\frac{1}{12.596}) \\ \rightarrow x_3^2 = \end{array} \right.$		8,36	-4,18	-15,00	16,18	-0,081		15,000				-1,066
			1,170	-0,298	-1,170	0,001		-0,107				-84,140
				-0,030	-0,777	-0,571		12,500				-7,842
					-1,637	-0,015		-0,089				-19,333
						-2,935		1,621				16,154
						0,233		-0,031				7,555
$M_1^3 + M_1^3 = \left\{ \begin{array}{l} 5,12 \theta_1^3 = \\ -5,654 x_3^3 = \\ 0,042 \theta_2^3 = \\ -1,454 x_3^3 = \\ \text{Sumas} \rightarrow X(-\frac{1}{83.563}) \\ \rightarrow \theta_1^3 = \end{array} \right.$	5,12		-6,14	0,246	-1,459	89,79		-3,10				76,81
			0,486	-0,288	0,005	-0,404		-8,86				-5,279
						-5,488		-0,486				-36,316
						-0,339		-4,195				-0,042
								-0,004				-10,985
								-1,576				24,188
								-1,202				-0,289
$M_2^3 + M_2^3 = \left\{ \begin{array}{l} -1,86 \theta_2^3 = \\ -0,260 x_3^3 = \\ \text{Sumas} \rightarrow X(-\frac{1}{34.30}) \\ \rightarrow \theta_2^3 = \end{array} \right.$		-1,86	-0,260	-0,013	0,260	34,30		-4,18				32,44
						-0,252		-0,193				1,745
								-1,670				

[illegible]

$\theta^{\frac{0}{1}}$	$\theta^{\frac{7}{1}}$	$\theta^{\frac{2}{1}}$	$\theta^{\frac{1}{1}}$	$\theta^{\frac{7}{3}}$	$\theta^{\frac{1}{3}}$
0,523	0,746 $0,059 \theta^{\frac{8}{1}} = 0,031$ Suma..... [0,777]	1,644 $-0,187 \theta^{\frac{9}{1}} = -0,098$ $-0,016 \theta^{\frac{7}{1}} = -0,012$ Suma..... [1,534]	1,640 $-0,168 \theta^{\frac{7}{1}} = -0,131$ $0,102 \theta^{\frac{2}{1}} = 0,156$ Suma..... [1,665]	[−0,642]	−1,123 $-0,115 \theta^{\frac{7}{3}} = 0,074$ Suma.... [−1,049]

CUADRO NÚM. 4.—Carga antinámica: Valores numéricos de los giros y traslaciones.

[illegible]

CUADRO NÚM. 5. — *Valores de los giros y traslaciones para la carga total.*

Cargas	$\theta \frac{1}{1}$	$\theta \frac{2}{1}$	$\theta \frac{3}{1}$	$\theta \frac{4}{1}$	$\theta \frac{5}{1}$	$\theta \frac{6}{1}$	$\theta \frac{7}{1}$	$\theta \frac{8}{1}$	$\theta \frac{9}{1}$	$\theta \frac{10}{1}$	$\theta \frac{11}{1}$	$\theta \frac{12}{1}$
Simétrica . . .	1,665	1,534	1,665	-1,665	-1,534	-1,665	0,777	0,523	0,777	-0,777	-0,523	-0,777
Antimétrica . .	0,737	0,833	0,737	0,737	0,833	0,737	1,755	1,661	1,755	1,755	1,661	1,755
TOTAL . . .	2,402	2,367	2,402	-0,928	-0,701	-0,928	2,532	2,184	2,532	0,978	1,138	0,978

Cargas	$\theta \frac{1}{2}$	$\theta \frac{2}{2}$	$\theta \frac{3}{2}$	$\theta \frac{4}{2}$	$\theta \frac{5}{2}$	$\theta \frac{6}{2}$	$\theta \frac{7}{2}$	$\theta \frac{8}{2}$	$\theta \frac{9}{2}$	$\theta \frac{10}{2}$	$\theta \frac{11}{2}$	$\theta \frac{12}{2}$
Simétrica . . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Antimétrica . .	0,334	0	-0,334	-0,334	0	0,334	0,300	0	-0,300	-0,300	0	0,300
TOTAL . . .	0,334	0	-0,334	-0,334	0	0,334	0,300	0	-0,300	-0,300	0	0,300

Cargas	$\theta \frac{1}{3}$	$\theta \frac{2}{3}$	$\theta \frac{3}{3}$	$\theta \frac{4}{3}$	$\theta \frac{5}{3}$	$\theta \frac{6}{3}$	$\theta \frac{7}{3}$	$\theta \frac{8}{3}$	$\theta \frac{9}{3}$	$\theta \frac{10}{3}$	$\theta \frac{11}{3}$	$\theta \frac{12}{3}$
Simétrica . . .	-1,049	0	1,049	1,049	0	-1,049	-0,642	0	0,642	0,642	0	-0,642
Antimétrica . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL . . .	-1,049	0	1,049	1,049	0	-1,049	-0,642	0	0,642	0,642	0	-0,642

Cargas	$x \frac{1}{3}$	$x \frac{2}{3}$	$x \frac{3}{3}$	$x \frac{4}{3}$	$x \frac{5}{3}$	$x \frac{6}{3}$	$x \frac{7}{3}$	$x \frac{8}{3}$	$x \frac{9}{3}$	$x \frac{10}{3}$	$x \frac{11}{3}$	$x \frac{12}{3}$
Simétrica . . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Antimétrica . .	15,634	13,383	15,634	15,634	13,383	15,634	6,827	4,502	6,827	6,827	4,502	6,827
TOTAL . . .	15,634	13,383	15,634	15,634	13,383	15,634	6,827	4,502	6,827	6,827	4,502	6,827