

ESTRUCTURAS ESPACIALES

Por MIGUEL GARCIA ORTEGA,

Ingeniero de Caminos

Continúa el trabajo iniciado en nuestro número anterior bajo este mismo título, que seguirá en otro próximo artículo con lo que reste de la exposición del método y con un ejemplo de aplicación práctica, que el autor se propone presentar a continuación.

El cálculo de las transformaciones es un problema que no presenta dificultad (*) y cuyo resumen se expone a continuación.

Transformación entre triedros de referencia.

Si X_1, X_2, X_3 y X'_1, X'_2, X'_3 son las componentes de un vector referido a los sistemas X y X' , respectivamente, las fórmulas de transferencia del sistema X' al X son:

$$X_1 = q_{11} X'_1 + q_{12} X'_2 + q_{13} X'_3$$

$$X_2 = q_{21} X'_1 + q_{22} X'_2 + q_{23} X'_3$$

$$X_3 = q_{31} X'_1 + q_{32} X'_2 + q_{33} X'_3$$

sistema que tiene como matriz

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

y las del X' al X :

$$\begin{cases} X'_1 = q_{11} X_1 + q_{21} X_2 + q_{31} X_3 \\ X'_2 = q_{12} X_1 + q_{22} X_2 + q_{32} X_3 \\ X'_3 = q_{13} X_1 + q_{23} X_2 + q_{33} X_3 \end{cases}$$

sistema que tiene como matriz la traspuesta de la anterior:

$$\bar{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

$$q_{1i}^2 = 1$$

$$q_{2i}^2 = 1$$

$$q_{3i}^2 = 1$$

$$q_{1i}^2 = 1$$

$$q_{2i}^2 = 1$$

$$q_{3i}^2 = 1$$

$$q_{1i}^2 = 1$$

$$q_{2i}^2 = 1$$

$$q_{3i}^2 = 1$$

$$q_{11} q_{12} = 0$$

$$q_{12} q_{13} = 0$$

$$q_{13} q_{11} = 0$$

$$q_{1i} q_{2i} = 0$$

$$q_{2i} q_{3i} = 0$$

$$q_{3i} q_{1i} = 0$$

$$i = 1, 2, 3.$$

La doble transformación del sistema X al X' y del X' al X tiene como matriz:

$$Q \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix}$$

Cuando el sistema X es trirectangular, como el X' , la transformación es ortogonal; entonces:

$$q_{ij} = \cos (X_i X_j),$$

y el cuadrado de la matriz vale 1. Si además se adopta en el sistema X el triedro a dextrorsum, lo mismo que en el X' , se verifica:

$$Q \cdot \bar{Q} = 1.$$

Con la notación matricial las fórmulas de transformación son:

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}$$

Adoptando la transformación ortogonal, se verifican las relaciones siguientes:

(*) En la revista *Ciencia Aplicada*, correspondiente a los meses de marzo y abril, exponemos el desarrollo completo de los cálculos.

Transformación de los movimientos en reacciones.

La determinación de las reacciones en función de los movimientos de los nudos, referidos ambos al sistema X' , es un problema resuelto anteriormente, y expresando las fórmulas mediante la notación matricial resultan las siguientes transformaciones:

Reacciones en O producidas por los movimientos en dicho extremo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Reacciones en O producidas por los movimientos en O' :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} c'_1 & 0 & 0 \\ 0 & c'_2 & 0 \\ 0 & 0 & c'_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -f_2 & 0 \\ 0 & 0 & -f_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Transformación de un giro en O en un momento en el mismo extremo.

La triple transformación es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = Q_k \cdot \bar{Q} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = Q \cdot \bar{Q}_k \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = T_k \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

representando, en general, por T_n la matriz

$$T_n = \begin{Bmatrix} t_{11}(n) & t_{12}(n) & t_{13}(n) \\ t_{21}(n) & t_{22}(n) & t_{23}(n) \\ t_{31}(n) & t_{32}(n) & t_{33}(n) \end{Bmatrix} = Q \cdot \begin{Bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{Bmatrix} \cdot \bar{Q} = Q_n \cdot \bar{Q} = Q \cdot \bar{Q}_n$$

El momento elemental M_i que corresponde al giro elemental θ_j es:

$$M_i = t_{ij}(k) \cdot \theta_j = q_{ir} q_{jr} k_r \theta_j \quad r = 1, 2, 3,$$

o sea:

$$M_i = (q_{i1} q_{j1} k_1 + q_{i2} q_{j2} k_2 + q_{i3} q_{j3} k_3) \theta_j.$$

De esta expresión se deduce que

$$t_{ij}(k) = t_{ji}(k);$$

es decir, que la matriz T_k y en general la T_n es simétrica.

Transformación de una traslación en O en una fuerza en el mismo extremo.

En este caso resulta:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = T_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

representando la traslación por

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3.$$

La fuerza elemental F_i que corresponde a la traslación elemental x_j es:

$$F_i = t_{ij}(f) \cdot x_j = q_{ir} q_{jr} f_r x_j \quad r = 1, 2, 3,$$

o sea:

$$F_i = (q_{i1} q_{j1} f_1 + q_{i2} q_{j2} f_2 + q_{i3} q_{j3} f_3) x_j.$$

Transformación de un giro en O en una fuerza en el mismo extremo.

Resulta la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = Q_{\varphi_0} \cdot \bar{Q} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \bar{Q}_{\varphi_0} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = P_{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

representando, en general, por P_n la matriz:

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{Q} = Q_{\varphi_0} \cdot \bar{Q} = Q \cdot \bar{Q}_{\varphi_0}.$$

La fuerza elemental F_i que corresponde al giro elemental θ_j es:

$$F_i = p_{ij}(\varphi) \cdot \theta_j = q_{ir} q_{js} \varphi_r \theta_j \quad \left. \begin{array}{l} r = 2, 3 \\ s = 3, 2 \end{array} \right\}$$

o sea:

$$F_i = (q_{i2} q_{j3} \varphi_2 + q_{i3} q_{j2} \varphi_3) \theta_j.$$

De esta expresión se deduce que la matriz P_φ y, en general, la P_n , no es simétrica, sino en casos especiales, puesto que:

$$p_{ij}(n) = q_{i2} q_{j3} n_2 + q_{i3} q_{j2} n_3$$

$$p_{ji}(n) = q_{j2} q_{i3} n_2 + q_{j3} q_{i2} n_3$$

y $p_{ij}(n)$ es igual a $p_{ji}(n)$ solamente cuando $n_2 = n_3$

o $\frac{q_{i2}}{q_{i3}} = \frac{q_{j2}}{q_{j3}}$, pero siempre se verifica que

$$p_{ij}(n_2, n_3) = p_{ji}(n_3, n_2);$$

es decir, que $p_{ij}(n)$ es igual al valor que se obtiene permutando en $p_{ji}(n)$, la n_2 y la n_3 .

Transformación de una traslación en O en un momento en el mismo extremo.

La transformación es:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2 \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Ahora bien, el producto

$$Q \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2 \end{Bmatrix} = \bar{Q}$$

es la matriz traspuesta de la P_φ , puesto que $p_{ij}(\varphi_2, \varphi_3) = p_{ji}(\varphi_3, \varphi_2)$ y, por consiguiente, la transformación puede escribirse así:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \bar{P}_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

El momento elemental M_i que corresponde a la traslación elemental x_j es:

$$M_i = p_{ji}(\varphi) \cdot x_j = q_{jr} q_{is} \varphi_r x_j \quad \left. \begin{array}{l} r = 2, 3 \\ s = 3, 2 \end{array} \right\}$$

o sea:

$$M_i = (q_{j2} q_{i3} \varphi_2 + q_{j3} q_{i2} \varphi_3) x_j.$$

Transformación de un giro en O' en un momento en O .

En este caso se verifica:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = T_c \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}.$$

El momento elemental M_i que corresponde al giro elemental θ_j es:

$$M_i = t_{ij}(c') \cdot \theta_j = q_{ir} q_{jr} c'_r \theta_j \quad r = 1, 2, 3,$$

o sea:

$$M_i = (q_{i1} q_{j1} c'_1 + q_{i2} q_{j2} c'_2 + q_{i3} q_{j3} c'_3) \theta_j.$$

Transformación de una traslación en O' en una fuerza en O .

Se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = -T_f \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

La fuerza elemental F_i correspondiente a la traslación elemental x_j es:

$$F_i = -t_{ij}(f) \cdot x_j = -q_{ir} q_{jr} f_r x_j \quad r = 1, 2, 3,$$

o sea:

$$F_i = -(q_{i1} q_{j1} f_1 + q_{i2} q_{j2} f_2 + q_{i3} q_{j3} f_3) x_j.$$

Transformación de un giro en O' en una fuerza en O .

Resulta:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = P_{\varphi'} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}.$$

La fuerza elemental F_i que corresponde al giro elemental θ_j es:

$$F_i = p_{ij}(\varphi') \cdot \theta_j = q_{ir} q_{js} \varphi'_r \theta_j \quad \left. \begin{array}{l} r = 2, 3 \\ s = 3, 2 \end{array} \right\}$$

o sea:

$$F_i = (q_{i2} q_{j3} \varphi'_2 + q_{i3} q_{j2} \varphi'_3) \theta_j.$$

Transformación de una traslación en O' en un momento O .

En este caso la transformación es:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = -\bar{P}_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

El momento elemental M_i correspondiente a la traslación elemental x_j es:

$$M_i = -p_{ji}(\varphi) \cdot x_j = -q_{jr} q_{is} \varphi_r x_j \quad \left. \begin{array}{l} r=2, 3 \\ s=3, 2 \end{array} \right\}$$

o sea:

$$M_i = -(q_{j2} q_{i3} \varphi_2 + q_{j3} q_{i2} \varphi_3) x_j.$$

Expresiones de las componentes de las reacciones en O en función de las componentes de los giros y traslaciones.

Como consecuencia de lo expuesto, si los movimientos de los extremos son:

$$\text{Giro en } O \quad \theta = \theta_1 \mathbf{u}_1 + \theta_2 \mathbf{u}_2 + \theta_3 \mathbf{u}_3$$

$$\text{Traslación en } O \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$$

$$\text{Giro en } O' \quad \theta' = \theta'_1 \mathbf{u}_1 + \theta'_2 \mathbf{u}_2 + \theta'_3 \mathbf{u}_3$$

$$\text{Traslación en } O' \quad \mathbf{x}' = x'_1 \mathbf{u}_1 + x'_2 \mathbf{u}_2 + x'_3 \mathbf{u}_3$$

resultan las siguientes expresiones:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = T_k \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \bar{P}_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + T_{c'} \cdot \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} - \bar{P}_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = P_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + T_f \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + P_{\varphi'} \cdot \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} - T_f \cdot \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = T_k \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + T_{c'} \cdot \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} + \bar{P}_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = P_\varphi \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + P_{\varphi'} \cdot \begin{Bmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \end{Bmatrix} + T_f \cdot \begin{Bmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{Bmatrix}$$

A continuación se incluye un cuadro con los coeficientes que proporcionan las reacciones en función de los movimientos:

		MOVIMIENTOS EN O						MOVIMIENTOS EN O'					
		GIROS			TRASLACIONES			GIROS			TRASLACIONES		
		θ_1	θ_2	θ_3	x_1	x_2	x_3	θ'_1	θ'_2	θ'_3	x'_1	x'_2	x'_3
Reacciones en O	M_1	$t_{11}(k)$	$t_{12}(k)$	$t_{13}(k)$	$p_{11}(\varphi)$	$p_{21}(\varphi)$	$p_{31}(\varphi)$	$t_{11}(c')$	$t_{12}(c')$	$t_{13}(c')$	$-p_{11}(\varphi)$	$-p_{21}(\varphi)$	$-p_{31}(\varphi)$
	M_2	$t_{21}(k)$	$t_{22}(k)$	$t_{23}(k)$	$p_{12}(\varphi)$	$p_{22}(\varphi)$	$p_{32}(\varphi)$	$t_{21}(c')$	$t_{22}(c')$	$t_{23}(c')$	$-p_{12}(\varphi)$	$-p_{22}(\varphi)$	$-p_{32}(\varphi)$
	M_3	$t_{31}(k)$	$t_{32}(k)$	$t_{33}(k)$	$p_{13}(\varphi)$	$p_{23}(\varphi)$	$p_{33}(\varphi)$	$t_{31}(c')$	$t_{32}(c')$	$t_{33}(c')$	$-p_{13}(\varphi)$	$-p_{23}(\varphi)$	$-p_{33}(\varphi)$
	F_1	$p_{11}(\varphi)$	$p_{12}(\varphi)$	$p_{13}(\varphi)$	$t_{11}(f)$	$t_{12}(f)$	$t_{13}(f)$	$p_{11}(\varphi')$	$p_{12}(\varphi')$	$p_{13}(\varphi')$	$-t_{11}(f)$	$-t_{12}(f)$	$-t_{13}(f)$
	F_2	$p_{21}(\varphi)$	$p_{22}(\varphi)$	$p_{23}(\varphi)$	$t_{21}(f)$	$t_{22}(f)$	$t_{23}(f)$	$p_{21}(\varphi')$	$p_{22}(\varphi')$	$p_{23}(\varphi')$	$-t_{21}(f)$	$-t_{22}(f)$	$-t_{23}(f)$
	F_3	$p_{31}(\varphi)$	$p_{32}(\varphi)$	$p_{33}(\varphi)$	$t_{31}(f)$	$t_{32}(f)$	$t_{33}(f)$	$p_{31}(\varphi')$	$p_{32}(\varphi')$	$p_{33}(\varphi')$	$-t_{31}(f)$	$-t_{32}(f)$	$-t_{33}(f)$

O bien simbólicamente:

		MOVIMIENTOS EN O			MOVIMIENTOS EN O'		
		GIROS			GIROS		
		θ_1	θ_2	θ_3	θ'_1	θ'_2	θ'_3
		TRASLACIONES			TRASLACIONES		
		x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3
Reacciones en O	M_1						
	M_2						
	M_3						
	F_1						
	F_2						
	F_3						
		T_k			$T_{c'}$		
		$\bar{P}_\varphi$			$- \bar{P}_\varphi$		
		P_φ			$P_{\varphi'}$		
		T_f			$- T_f$		

Se comprueba el teorema de Maxwell, puesto que:

$$\begin{array}{llllll}
 M_i \text{ correspondiente a } \theta_j = 1 & \text{es igual a} & M_j \text{ correspondiente a } \theta_i = 1 \\
 F_i & , & x_j = 1 & , & F_j & , & x_i = 1 \\
 M_i & , & x_j = 1 & , & F_j & , & \theta_i = 1.
 \end{array}$$

Relaciones entre las matrices correspondientes a los dos extremos.

y también:

En el extremo O' se verifica:

$$Q' = \begin{vmatrix} -q_{11} & \pm q_{12} & \mp q_{13} \\ -q_{21} & \pm q_{22} & \mp q_{23} \\ -q_{31} & \pm q_{32} & \mp q_{33} \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}' = \begin{vmatrix} -q_{11} & -q_{21} & -q_{31} \\ \pm q_{12} & \pm q_{22} & \pm q_{32} \\ \mp q_{13} & \mp q_{23} & \mp q_{33} \end{vmatrix}$$

y la doble transformación no varía:

$$Q' \cdot \bar{Q}' = Q \cdot \bar{Q}.$$

La matriz $\bar{Q}'$ vale:

$$\bar{Q}' = \begin{vmatrix} -q_{11} & -q_{21} & -q_{31} \\ \mp q_{12} & \mp q_{22} & \mp q_{32} \\ \pm q_{13} & \pm q_{23} & \pm q_{33} \end{vmatrix}$$

De lo expuesto se deduce fácilmente:

$$T'_n = T_n \quad P'_n = -P_n \quad \bar{P}'_n = -\bar{P}_n$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{P}_\varphi \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \bar{P}'_\varphi \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Determinación de las matrices en casos particulares.

Las matrices Q , $\bar{Q}$ y $\bar{Q}'$ son independientes de las características de las barras, dependiendo solamente de su posición, por lo que estas matrices, y en consecuencia las T_n , P_n y $\bar{P}_n$, pueden determinarse para los casos particulares correspondientes a las posiciones que frecuentemente ocupan las barras al adoptar un triedro conveniente como sistema X, de referencia de la estructura.

Es muy útil obtener el valor de:

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix}$$

expresado en la siguiente forma:

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = Q_f \cdot \bar{Q} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = Q_f \cdot \begin{vmatrix} \Delta_1 - \Delta'_1 \\ \Delta_2 - \Delta'_2 \\ \Delta_3 - \Delta'_3 \end{vmatrix} = Q \cdot \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta_1 - \Delta'_1 \\ \Delta_2 - \Delta'_2 \\ \Delta_3 - \Delta'_3 \end{vmatrix} =$$

$$Q \cdot \begin{vmatrix} f_1 (\Delta_1 - \Delta'_1) \\ f_2 (\Delta_2 - \Delta'_2) \\ f_3 (\Delta_3 - \Delta'_3) \end{vmatrix} = Q \cdot \begin{vmatrix} N \\ f_2 [q_{12} (x_1 - x'_1) + q_{22} (x_2 - x'_2) + q_{32} (x_3 - x'_3)] \\ f_3 [q_{13} (x_1 - x'_1) + q_{23} (x_2 - x'_2) + q_{33} (x_3 - x'_3)] \end{vmatrix}$$

representando por N la compresión de la barra, que vale:

$$N = f_1 (\Delta_1 - \Delta'_1)$$

por ser $\Delta_1 - \Delta'_1$ el acortamiento.

Para cada caso particular se determinan los valores de los coeficientes q , por medio de las relaciones entre ellos existentes, ya expuestas y teniendo en cuenta que:

$$q_{ij} = \cos \widehat{X_i X'_j} = \cos \widehat{X'_j X_i}.$$

Conocidos los coeficientes q , se obtienen inmediatamente las matrices Q_n , $\bar{Q}_n$ y $\underline{Q}_n$ y las T_n , P_n y $\bar{P}_n$ mediante las fórmulas:

$$T_n = Q \cdot \bar{Q}_n \quad P_n = Q \cdot \underline{Q}_n$$

y, por último:

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = Q \cdot \begin{vmatrix} N \\ f_2 [q_{12} (x_1 - x'_1) + q_{22} (x_2 - x'_2) + q_{32} (x_3 - x'_3)] \\ f_3 [q_{13} (x_1 - x'_1) + q_{23} (x_2 - x'_2) + q_{33} (x_3 - x'_3)] \end{vmatrix}$$

Se adopta un triedro de referencia que tenga vertical el eje X_2 , y como orientación principal de la barra la vertical que contiene al eje.

Así, por ejemplo, para las barras paralelas a los planos o a los ejes del sistema X , se obtienen los siguientes valores:

Barra paralela al plano $X_1 X_2$:

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -q_{21} n_2 \\ 0 & 0 & q_{11} n_2 \\ -q_{21} n_2 & q_{11} n_2 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -q_{21} n_2 \\ 0 & 0 & q_{11} n_2 \\ -q_{21} n_2 & q_{11} n_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T_n = \begin{vmatrix} q_{11}^2 n_1 + q_{21}^2 n_2 & q_{11} q_{21} (n_2 - n_1) & 0 \\ q_{11} q_{21} (n_2 - n_1) & q_{21}^2 n_1 + q_{11}^2 n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} N + f_2 [q_{21}^2 (x_1 - x'_1) - q_{11} q_{21} (x_2 - x'_2)] \\ q_{21} N + f_2 [q_{11}^2 (x_2 - x'_2) - q_{11} q_{21} (x_1 - x'_1)] \\ f_3 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix}$$

Barra paralela al plano $X_2 X_3$:

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & -q_{31} n_3 & q_{21} n_3 \\ -q_{31} n_2 & 0 & 0 \\ q_{21} n_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & -q_{31} n_2 & q_{21} n_2 \\ -q_{31} n_3 & 0 & 0 \\ q_{21} n_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T_n = \begin{vmatrix} n_3 & 0 & 0 \\ 0 & q_{21}^2 n_1 + q_{31}^2 n_2 & q_{21} q_{31} (n_1 - n_2) \\ 0 & q_{21} q_{31} (n_1 - n_2) & q_{31}^2 n_1 + q_{21}^2 n_2 \end{vmatrix}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3 (x_1 - x'_1) \\ q_{21} N + f_2 [q_{31}^2 (x_2 - x'_2) - q_{21} q_{31} (x_3 - x'_3)] \\ q_{31} N + f_2 [q_{21}^2 (x_3 - x'_3) - q_{21} q_{31} (x_2 - x'_2)] \end{vmatrix}$$

Barra paralela al plano $X_3 X_1$:

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & -q_{31} n_3 & 0 \\ -q_{31} n_2 & 0 & q_{11} n_2 \\ 0 & q_{11} n_3 & 0 \end{vmatrix} \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & -q_{31} n_2 & 0 \\ -q_{31} n_3 & 0 & q_{11} n_3 \\ 0 & q_{11} n_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T_n = \begin{vmatrix} q_{11}^2 n_1 + q_{31}^2 n_3 & 0 & q_{11} q_{31} (n_1 - n_3) \\ 0 & n_2 & 0 \\ q_{11} q_{31} (n_1 - n_3) & 0 & q_{31}^2 n_1 + q_{11}^2 n_3 \end{vmatrix}$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} N + f_3 [q_{31}^2 (x_1 - x'_1) - q_{11} q_{31} (x_3 - x'_3)] \\ f_2 (x_2 - x'_2) \\ q_{31} N + f_3 [q_{11}^2 (x_3 - x'_3) - q_{11} q_{31} (x_1 - x'_1)] \end{vmatrix}$$

Barra paralela al eje X_1 :

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \\ 0 & n_3 & 0 \end{vmatrix} = -P'_n \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_n$$

$$T_n = \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = T'_n \quad T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N \\ f_2 (x_2 - x'_2) \\ f_3 (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barra paralela al eje X_2 :

$$P_n = \begin{vmatrix} q_{12} q_{32} (n_2 + n_3) & 0 & q_{32}^2 n_3 - q_{12}^2 n_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{32}^2 n_2 - q_{12}^2 n_3 & 0 & -q_{12} q_{32} (n_2 + n_3) \end{vmatrix} = -P'_n$$

$$\bar{P}_n = \begin{vmatrix} q_{12} q_{32} (n_2 + n_3) & 0 & q_{32}^2 n_2 - q_{12}^2 n_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{32}^2 n_3 - q_{12}^2 n_2 & 0 & -q_{12} q_{32} (n_2 + n_3) \end{vmatrix} = -\bar{P}'_n \quad T_n = \begin{vmatrix} q_{12}^2 n_2 + q_{32}^2 n_3 & 0 & q_{12} q_{32} (n_2 - n_3) \\ 0 & n_1 & 0 \\ q_{12} q_{32} (n_2 - n_3) & 0 & q_{32}^2 n_2 + q_{12}^2 n_3 \end{vmatrix} = T'_n$$

$$T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (q_{12}^2 f_2 + q_{32}^2 f_3) (x_1 - x'_1) + q_{12} q_{32} (f_2 - f_3) (x_3 - x'_3) \\ N \\ q_{12} q_{32} (f_2 - f_3) (x_1 - x'_1) + (q_{32}^2 f_2 + q_{12}^2 f_3) (x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barra paralela al eje X_2 y con X'_2 paralelo a X_1 y X'_3 a X_3 :

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -n_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_n \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -n_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_n$$

$$T_n = \begin{vmatrix} n_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = T'_n \quad T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2(x_1 - x'_1) \\ N \\ f_3(x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barra paralela al eje X_2 y con X'_2 paralelo a X_3 y X'_3 a X_1 :

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_n \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{P}'_n$$

$$T_n = \begin{vmatrix} n_3 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} = T'_n \quad T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3(x_1 - x'_1) \\ N \\ f_2(x_3 - x'_3) \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Barra paralela al eje X_3 :

$$P_n = \begin{vmatrix} 0 & -n_3 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -P'_n \quad \bar{P}_n = \begin{vmatrix} 0 & -n_2 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$T_n = \begin{vmatrix} n_3 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} \quad T_f \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \\ x_3 - x'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3(x_1 - x'_1) \\ f_2(x_2 - x'_2) \\ N \end{vmatrix} = -T'_f \cdot \begin{vmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \\ x'_3 - x_3 \end{vmatrix}$$

Cuando las barras son paralelas a uno de los ejes del sistema X , los valores de las matrices corresponden al caso en que el sentido $O O'$ es el positivo del eje correspondiente.

Tensores.

Es fácil demostrar que las matrices Q , $\bar{Q}$, Q_n , $\bar{Q}_n$ y $\bar{Q}_{n_0}$ son tensores, como sumas de tres productos diádicos, y, por lo tanto (*):

$$T_n = Q_n \cdot \bar{Q} = Q \cdot \bar{Q}_n = \begin{vmatrix} t_{11}(n) & t_{12}(n) & t_{13}(n) \\ t_{21}(n) & t_{22}(n) & t_{23}(n) \\ t_{31}(n) & t_{32}(n) & t_{33}(n) \end{vmatrix}$$

$$P_n = Q_{n_0} \cdot \bar{Q} = Q \cdot \bar{Q}_{n_0} = \begin{vmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) \end{vmatrix}$$

(*) En la revista *Ciencia Aplicada*, correspondiente a los meses de marzo y abril, exponemos el desarrollo de los cálculos.

(Continuará.)