

ESTRUCTURAS ESPACIALES

Por MIGUEL GARCIA ORTEGA,

Ingeniero de Caminos

En los primeros párrafos del presente artículo explica el autor el contenido del importante trabajo que se desarrollará en él y en otros próximos, y que es, en esencia, la adaptación de su propio método de cálculo de estructuras planas a las de tres dimensiones.

Varias veces nos hemos visto obligados a calcular estructuras reticulares que no podían ser estudiadas como planas, por la existencia de barras o esfuerzos correspondientes a la tercera dimensión. En estas ocasiones hemos resuelto el problema adaptando nuestro método para el cálculo de estructuras planas, al caso particular que pretendíamos resolver. La repetición de estos casos nos decidió a intentar la adaptación de nuestro método al cálculo de estructuras de tres dimensiones, con carácter general, para lo cual era preciso resolver dos problemas fundamentales: el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio y la resolución del sistema resultante.

Las ecuaciones de equilibrio se plantean sin más que aplicar las leyes fundamentales de la Estática, pero desde el punto de vista práctico, este problema presenta una seria dificultad: la de obtener los coeficientes de una manera rápida y sencilla. Después de varias tentativas, logramos la obtención de los coeficientes con suficiente sencillez y rapidez, mediante un artificio de cálculo; pero este procedimiento, con el que hemos calculado algunos casos prácticos, no llegó a satisfacerlos por artificioso, y, en consecuencia, continuamos nuestros esfuerzos, hasta que, empleando la notación matricial, conseguimos resolver el problema de forma que nos satisfizo plenamente, pues se obtienen expresiones aún más sencillas que las correspondientes a estructuras planas.

La resolución del sistema de ecuaciones se logra de un modo satisfactorio mediante la aplicación de los cuadros-fórmulas (*), análogamente a como se resuelven los sistemas correspondientes a estructuras planas.

Contando con la benevolencia de esta REVISTA y con la de *Ciencia Aplicada*, del Patronato "Juan de la Cierva", perteneciente al Consejo Superior de Investigaciones Científicas, nos proponemos publicar unos artículos, en los que expondremos el cálculo de

estructuras espaciales por nuestro procedimiento, procurando que los artículos publicados en ambas revistas sean complementarios en algunos aspectos.

* * *

El cálculo de una pieza prismática o barra se reduce a determinar las reacciones producidas por las sustentaciones, lo que se logra inmediatamente en los casos isostáticos; pero las barras de las estructuras están sustentadas hiperestáticamente y es preciso acudir al estudio de la deformación.

Si representamos por R_e las reacciones de empotramiento perfecto en los nudos y por R_d las producidas por la deformación, las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$R_d + R_e = 0,$$

en las que R_d es función de los movimientos de los nudos, que se obtienen resolviendo el sistema formado por dichas ecuaciones.

Determinados los movimientos en todos los nudos, si conocemos las funciones que, en las barras, ligan los movimientos con las reacciones en los extremos, se podrán obtener éstas, con lo que, en definitiva, tendremos resuelto el cálculo de la estructura.

Como consecuencia de lo expuesto, dividiremos el proceso en tres partes: primero se calculará la barra como pieza aislada, determinando las reacciones producidas por los movimientos en los extremos; después, considerando la barra como elemento de la estructura, se establecerán las funciones que ligan los movimientos y las reacciones; por último, se abordará el planteamiento y resolución de las ecuaciones de equilibrio.

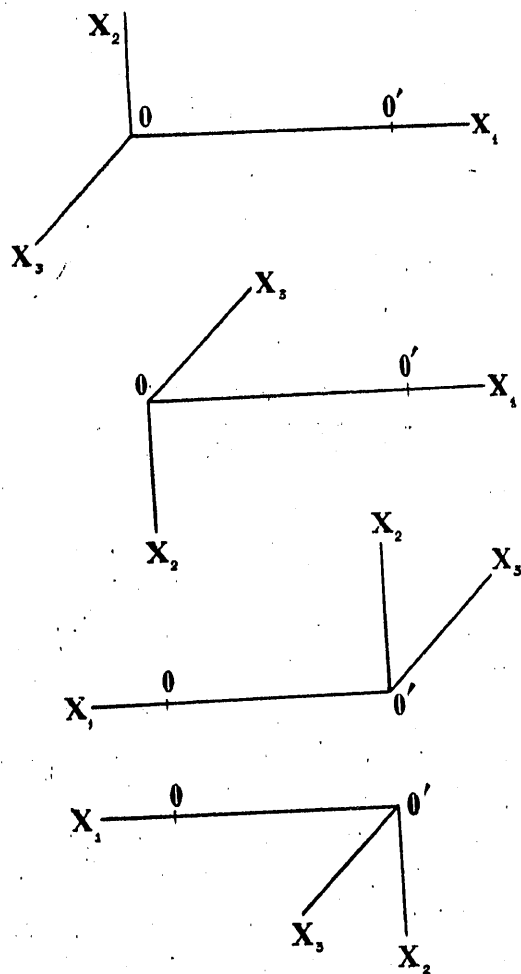
BARRA AISLADA

Si se refiere la barra a un sistema de tres ejes, un movimiento cualquiera, giro o traslación, se descompone en tres elementales paralelos a los ejes de referencia y, por analogía, podemos admitir que una sustentación que produzca una reacción cualquiera, mo-

(*) REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, números de junio y julio de 1949: *Un edificio y un método de cálculo.*

mento o giro, se descompone también en tres elementales, correspondientes a las componentes de la reacción paralelas a los ejes.

La sustentación que produzca como reacción una fuerza o un momento paralelo a uno de los ejes, le denominaremos apoyo o empotramiento elemental, respectivamente. La articulación fija se compone de tres



apoyos elementales, y el empotramiento perfecto, de tres apoyos y tres empotramientos elementales.

Resulta entonces que a cada movimiento en un extremo de una barra corresponde una sustentación, y puede admitirse que un nudo, en el que no actúe ninguna, tiene seis grados de libertad, correspondiendo un grado a cada sustentación elemental.

Cuando se trate de las reacciones producidas en el extremo O , se refiere la barra $O O'$ a tres ejes rectangulares, X_1, X_2, X_3 , adoptando el triedro a dextrósum y de tal manera que el eje X_1 coincida con el de la barra, siendo el sentido positivo el $O O'$.

Las secciones paralelas a los planos $X_2 X_3, X_1 X_2$

y $X_3 X_1$ las denominaremos normales, principales y secundarias, respectivamente.

Cuando se trate del extremo O' , el eje X_1 cambia de sentido, y como se conserva el triedro a dextrósum, cambia también el sentido de uno de los ejes X_2 o X_3 , y permanece invariable el del otro.

Partiendo de la barra perfectamente empotrada, se admitirá, sucesivamente, un solo grado de libertad, distinto en cada caso, hasta considerar los seis correspondientes a los movimientos en los dos extremos.

Los giros de eje X_1 , producen torsiones, y los de eje X_2 o X_3 , flexiones; las traslaciones de eje X_1 , producen compresiones o tracciones, y las de eje X_2 o X_3 , flexiones. Por lo tanto, la determinación de los momentos y fuerzas reacciones en función de los giros y traslaciones es un problema que no presenta dificultad (*) y cuyo resumen se expone a continuación.

Giro de eje X_1 .

A un giro unidad, u_1 , en O , corresponde el momento $k_1 u_1$ en dicho extremo y el $c_1 u_1$ en el O' , y a un giro unidad, u_1 , en O' , corresponden los momentos $k'_1 u_1$ y $c'_1 u_1$ en O' y O , respectivamente.

Los coeficientes k_1, k'_1, c_1 y c'_1 tienen el mismo valor absoluto, dado por la expresión:

$$k_1 = k'_1 = -c_1 = -c'_1 = 8 \frac{G}{L} \frac{\iint \phi dx_2 dx_3}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}};$$

siendo: L , la luz; G , el módulo de elasticidad transversal, y ϕ , una función de las coordenadas x_2 y x_3 , que en los puntos de las secciones extremas cumple la condición:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \text{constante},$$

y en todos los puntos de su contorno:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

Giro de eje X_2 .

A un giro unidad, u_2 , en O , corresponden, en este extremo, un momento $k_2 u_2$ y una fuerza $\varphi_3 u_3$, y en el O' , un momento $c_2 u_2$ y una fuerza $-\varphi_3 u_3$.

El coeficiente k_2 es la rigidez de la barra respecto

(*) En la revista *Ciencia Aplicada*, correspondiente a los meses de marzo y abril, exponemos el desarrollo completo de los cálculos.

a las flexiones de eje X_2 , y si β_2 es el correspondiente factor de transmisión de momentos, los valores de c_2 y φ_3 son:

$$c_2 = \beta_2 k_2; \quad \varphi_3 = -\frac{k_2 (1 + \beta_2)}{L}.$$

La rigidez y el coeficiente de transmisión de momentos valen:

$$k_2 = E_0 I_0 L \frac{\int_0^L r_2 x_1^2 dx_1}{\int_0^L r_2 dx_1 \int_0^L r_2 x_1^2 dx_1 - \left(\int_0^L r_2 x_1 dx_1 \right)^2};$$

$$\beta_2 = L \frac{\int_0^L r_2 x_1 dx_1}{\int_0^L r_2 x_1^2 dx_1} - 1;$$

representando por I_0 un momento de inercia patrón, que puede tomarse arbitrariamente, y, análogamente, por E_0 un coeficiente de elasticidad patrón, también arbitrario, y obteniéndose r_2 por la fórmula

$$r_2 = \frac{E_0}{E} \frac{I_0}{I_1},$$

en la cual se designan por I_2 los momentos de inercia de las secciones normales respecto a la intersección del plano de la sección con el $X_1 X_2$.

Análogamente, a un giro unidad u_2 , en O' , corresponden, en este extremo, un momento $k'_2 u_2$ y una fuerza $-\varphi'_3 u_3$, y en el O , un momento $c'_2 u_2$ y una fuerza $\varphi'_3 u_3$, siendo k'_2 , c'_2 y φ'_3 los elementos análogos a los k_2 , c_2 y φ_3 , correspondientes al extremo O' .

Giro de eje X_3 .

A un giro unidad, u_3 , en O , corresponden, en este extremo, un momento $k_3 u_3$ y una fuerza $\varphi_2 u_2$, y en el O' , un momento $c_3 u_3$ y una fuerza $-\varphi_2 u_2$.

El coeficiente k_3 es la rigidez de la barra respecto a las flexiones de eje X_3 , y si β_3 es el correspondiente factor de transmisión de momentos, los valores de c_3 y φ_2 son:

$$c_3 = \beta_3 k_3; \quad \varphi_2 = \frac{k_3 (1 + \beta_3)}{L}.$$

La rigidez y el coeficiente de transmisión de momentos valen:

$$k_3 = E_0 I_0 L \frac{\int_0^L r_3 x_1^2 dx_1}{\int_0^L r_3 dx_1 \int_0^L r_3 x_1^2 dx_1 - \left(\int_0^L r_3 x_1 dx_1 \right)^2};$$

$$\beta_3 = L \frac{\int_0^L r_3 x_1 dx_1}{\int_0^L r_3 x_1^2 dx_1} - 1;$$

obteniéndose r_3 por la fórmula

$$r_3 = \frac{E_0}{E} \frac{I_0}{I_3},$$

en la cual se designan por I_3 los momentos de inercia de las secciones normales respecto a la intersección del plano de la sección con el $X_1 X_3$.

Análogamente, a un giro unidad, u_3 , en O' , corresponden, en este extremo, un momento $k'_3 u_3$ y una fuerza $-\varphi'_2 u_2$, y en el O , un momento $c'_3 u_3$ y una fuerza $\varphi'_2 u_2$.

Traslación de eje X_1 .

A una traslación unidad, u_1 , en O , corresponde en este extremo la fuerza $f_1 u_1$, y en el O' , la $-f_1 u_1$, y a una traslación unidad, u_1 , en O' , corresponden las fuerzas $f_1 u_1$ y $-f_1 u_1$, en O' y O , respectivamente.

Si S_0 es la sección virtual (*) y s la sección variable de la barra, se verifica:

$$S_0 = \frac{L}{E_0 \int_0^L \frac{dx_1}{E_s}},$$

y el valor de f_1 es:

$$f_1 = \frac{E_0 S_0}{L}.$$

Traslación de eje X_2 .

A una traslación unidad, u_2 , en O , corresponden, en este extremo, un momento $\varphi_2 u_3$ y una fuerza $f_2 u_2$, y en el O' , un momento $\varphi'_2 u_3$ y una fuerza $-f_2 u_2$. Análogamente, a una traslación unidad, u_2 , en O' , corresponden, en O' , un momento $-\varphi'_2 u_3$ y una fuerza $f_2 u_2$, y en O , un momento $-\varphi_2 u_2$ y una fuerza $-f_2 u_2$.

El valor de f_2 es:

$$f_2 = \frac{1}{L} (\varphi_2 + \varphi'_2).$$

Traslación de eje X_3 .

A una traslación unidad, u_3 , en O , corresponden, en este extremo, un momento $\varphi_3 u_2$ y una fuerza $f_3 u_3$, y en el O' , un momento $\varphi'_3 u_2$ y una fuerza $-f_3 u_3$. Análogamente, a una traslación unidad, u_3 , en O' , corresponden, en O' , un momento $-\varphi'_3 u_2$ y una fuerza $f_3 u_3$, y en O , un momento $-\varphi_3 u_2$ y una fuerza $-f_3 u_3$.

El valor de f_3 es:

$$f_3 = \frac{1}{L} (\varphi_3 + \varphi'_3).$$

(*) García Ortega: *Cálculo de estructuras reticulares*, página 12.

CUADRO RESUMEN

Como resumen, en el siguiente cuadro se consignan las intensidades de las fuerzas y momentos producidos en el extremo O por los movimientos de los dos extremos:

		MOVIMIENTOS UNITARIOS											
		En O						En O'					
		GIROS			TRASLACIONES			GIROS			TRASLACIONES		
		u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3
Reacciones en O	MOMENTOS	u_1	k_1					c'_1					
		u_2		k_2			φ_3		c'_2				$-\varphi_3$
		u_3			k_3		φ_2			c'_3		$-\varphi_2$	
	FUERZAS	u_1				f_1					$-f_1$		
		u_2			φ_2		f_2			φ'_2		$-f_2$	
		u_3		φ_3			f_3		φ'_3				$-f_3$

Barra homogénea y de sección constante.

Cuando la barra es homogénea a lo largo de la directriz y de sección rectangular constante, S , de dimensiones a y b , siendo $a < b$, los valores de los coeficientes son:

$$k_1 = k'_1 = \frac{E}{2,32} \frac{a^3 b}{L} \left[0,33 - 0,22 \frac{a}{b} - 0,03 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right],$$

$$k_2 = k'_2 = 4 \frac{E I_2}{L},$$

$$k_3 = k'_3 = 4 \frac{E I_3}{L},$$

$$\beta_2 = \beta'_2 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = \beta'_3 = \frac{1}{2},$$

$$c_1 = c'_1 = - \frac{E}{2,32} \frac{a^3 b}{L} \left[0,33 - 0,22 \frac{a}{b} - 0,03 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right],$$

$$c_2 = c'_2 = \frac{1}{2} k_2 = 2 \frac{E I_2}{L},$$

$$c_3 = c'_3 = \frac{1}{2} k_3 = 2 \frac{E I_3}{L},$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2 = \frac{3}{2 L} k_3 = 6 \frac{E I_3}{L^2},$$

$$\varphi_3 = \varphi'_3 = - \frac{3}{2 L} k_2 = - 6 \frac{E I_2}{L^2},$$

$$f_1 = \frac{E S}{L},$$

$$f_2 = \frac{3}{L^2} k_3 = 12 \frac{E I_3}{L^3},$$

$$f_3 = \frac{3}{L^2} k_2 = 12 \frac{E I_2}{L^3};$$

habiéndose adoptado para G el valor $\frac{E}{2,32}$.

Pueden determinarse fácilmente dos de los coefi-

cientes k_1 , k_2 y k_3 en función del tercero, pues si hacemos

$$\lambda = 0,33 - 0,22 \frac{a}{b} + 0,03 \left(\frac{a}{b} \right)^2,$$

y representamos por k_M y k_m el mayor y el menor, respectivamente, de los coeficientes k_2 y k_3 , resulta:

$$k_1 = \frac{E}{2,32} \frac{a^3 b}{L} \lambda,$$

$$k_M = \frac{1}{3} \frac{E}{L} a b^3,$$

$$k_m = \frac{1}{3} \frac{E}{L} a^3 b,$$

de donde se deduce:

$$\frac{k_1}{k_m} = 1,2931 \lambda \left(\frac{a}{b} \right)^2,$$

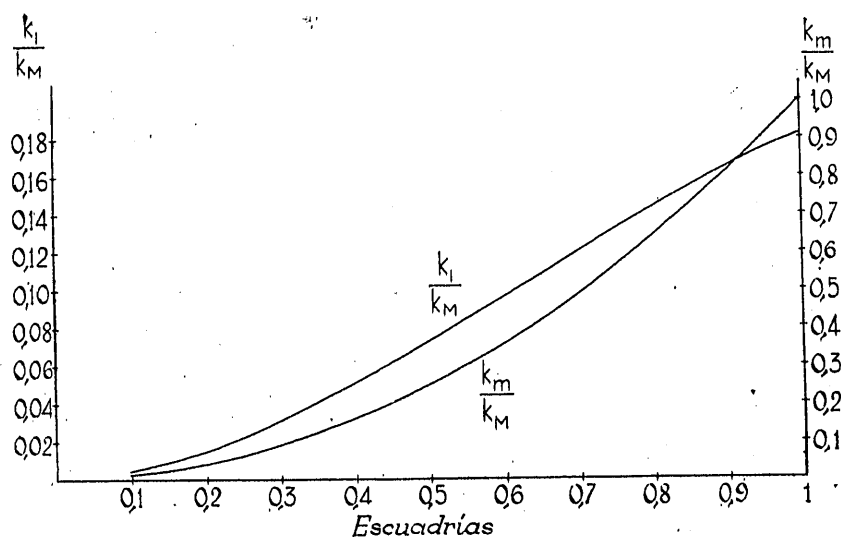
$$\frac{k_m}{k_M} = \left(\frac{a}{b} \right)^2,$$

obteniéndose el siguiente cuadro:

Valores de $\frac{k_1}{k_M}$ y $\frac{k_m}{k_M}$ para diferentes escuadrias.

$\frac{a}{b}$	λ	$\left(\frac{a}{b} \right)^2$	$\lambda \left(\frac{a}{b} \right)^2$	$\frac{k_1}{k_M}$	$\frac{k_m}{k_M}$
0,1	0,3083	0,01	0,003083	0,004004	0,01
0,2	0,2872	0,04	0,011488	0,014919	0,04
0,3	0,2667	0,09	0,024003	0,031173	0,09
0,4	0,2468	0,16	0,039488	0,051283	0,16
0,5	0,2275	0,25	0,056875	0,073864	0,25
0,6	0,2088	0,36	0,075168	0,097621	0,36
0,7	0,1907	0,49	0,093443	0,121354	0,49
0,8	0,1732	0,64	0,110848	0,143958	0,64
0,9	0,1563	0,81	0,126603	0,164419	0,81
1	0,1400	1,00	0,140000	0,181818	1,00

Este cuadro se traduce en un gráfico mediante el cual, conocido k_M , se determinan k_1 y k_m , con lo que se conocen los tres coeficientes k_1 , k_2 y k_3 , y, mediante las fórmulas anteriores, se obtienen inmediatamente c_1 , c_2 , c_3 , φ_2 , φ_3 , f_2 y f_3 .



LA BARRA COMO ELEMENTO DE LA ESTRUCTURA

Al considerar la barra como elemento de la estructura, es preciso relacionar cada una con las demás, refiriendo los movimientos y las reacciones de los extremos a un sistema de ejes único.

Sea X el sistema al que se refiere la estructura, designando por X' el propio de la barra.

Se trata de determinar los momentos y fuerzas reacciones, referidas al sistema X , en función de los

giros y traslaciones, referidos también a este sistema. El problema se resuelve mediante una triple transformación: primero, el movimiento, giro o traslación, referido al sistema X , se transforma refiriéndole al X' ; después, el movimiento obtenido se transforma en momento o fuerza, referidos también al sistema X' , y por último, las fuerzas o momentos se transforman refiriéndoles al sistema X .

Para calcular las triples transformaciones, empleamos la notación matricial, por lo que es conveniente recordar algunas propiedades de las matrices.

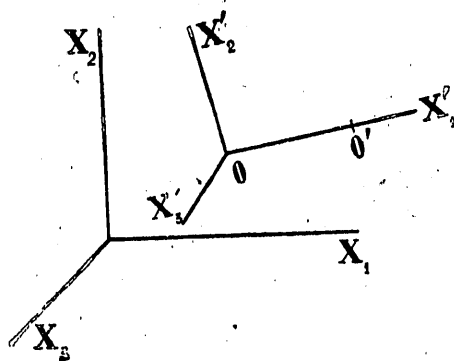
Suma de matrices semejantes es otra matriz, semejante a las dadas, que se obtiene sumando los elementos homólogos.

La suma de matrices goza de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

El producto de dos matrices, tales que el número de columnas de la primera es igual al de filas de la segunda, es otra matriz, que tiene tantas filas como el primer factor y tantas columnas como el segundo y que se obtiene efectuando el producto de las filas del multiplicando por las columnas del multiplicador. Así, si a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} son los términos generales de las matrices multiplicando, multiplicador y producto, respectivamente, indicando el primer subíndice la fila y el segundo la columna, se verifica:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots$$

El producto de matrices goza de las propiedades asociativa y distributiva, pero no de la conmutativa.



Designando por Q la matriz

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

por $\bar{Q}$ se representa la traspuesta, o sea que:

$$\bar{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix}$$

Las matrices que se obtienen permutando en las Q y $\bar{Q}$ las segundas y terceras columnas o filas, respectivamente, se representan por $\underline{Q}$ y $\underline{\bar{Q}}$, es decir, que:

$$\underline{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{13} & q_{12} \\ q_{21} & q_{23} & q_{22} \\ q_{31} & q_{33} & q_{32} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\bar{Q}} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \end{vmatrix}$$

El producto de la matriz Q por la:

$$\begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix}$$

lo representamos por Q_n ; cuando $n_1 = 0$ por Q_{n_0} , y si en la última matriz se permutan las filas segunda y tercera, el producto lo designamos por $\underline{Q}_n$. Por lo tanto, se verifica:

$$Q_n = Q \cdot \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} n_1 & q_{12} n_2 & q_{13} n_3 \\ q_{21} n_1 & q_{22} n_2 & q_{23} n_3 \\ q_{31} n_1 & q_{32} n_2 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$Q_{n_0} = Q \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_{12} n_2 & q_{13} n_3 \\ 0 & q_{22} n_2 & q_{23} n_3 \\ 0 & q_{32} n_2 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$Q_{\underline{n}_0} = Q \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_{12} n_3 & q_{13} n_2 \\ 0 & q_{22} n_3 & q_{23} n_2 \\ 0 & q_{32} n_3 & q_{33} n_2 \end{vmatrix}$$

Análogamente, cuando en vez de la matriz Q se trate de la $\bar{Q}$, o sea:

$$\underline{Q}_n = \underline{Q} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} n_1 & q_{12} n_2 & q_{13} n_3 \\ q_{21} n_1 & q_{22} n_2 & q_{23} n_3 \\ q_{31} n_1 & q_{32} n_2 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{Q}_{n_0} = \underline{Q} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_{12} n_2 & q_{13} n_3 \\ 0 & q_{22} n_2 & q_{23} n_3 \\ 0 & q_{32} n_2 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{Q}_{n_2} = \underline{Q} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_{13} n_3 & q_{12} n_2 \\ 0 & q_{23} n_3 & q_{22} n_2 \\ 0 & q_{33} n_3 & q_{32} n_2 \end{vmatrix}$$

Una notación análoga se adopta para la matriz $\bar{Q}$, pero tomándola como multiplicador en vez de como multiplicando, o sea:

$$\bar{Q}_n = \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} n_1 & q_{21} n_1 & q_{31} n_1 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}_{n_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}_{n_2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}_n = \begin{vmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} q_{11} n_1 & q_{21} n_1 & q_{31} n_1 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}_{n_0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Q}_{n_2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{13} n_3 & q_{23} n_3 & q_{33} n_3 \\ q_{12} n_2 & q_{22} n_2 & q_{32} n_2 \end{vmatrix}$$

(Continuará.)