

EL NOMOGRAMA CIRCULAR

FUNDAMENTO, CARACTERISTICAS Y APLICACIONES

Por BIENVENIDO OLIVER ROMAN,
Ingeniero de Caminos.

Se expone en el presente artículo el fundamento matemático del Nomograma circular, sus propiedades características, las normas para su construcción, así como algunas explicaciones a fórmulas de hidráulica y de la industria del papel.

Ante todo, procede recordar la definición de nomograma: Nomograma es un dibujo constituido por varias escalas, rectas y curvas, con divisiones iguales o desiguales y con graduaciones muy variadas, que sirve para hallar los valores simultáneos de las variables de una fórmula que la satisfacen, mediante la aplicación de una recta, con carácter de línea de fe, sobre el dibujo, que corte a las referidas escalas, siendo las graduaciones leídas en los puntos de intersección los referidos valores.

Los nomogramas de escalas rectilíneas, paralelas o concurrentes, son muy conocidos; no lo son los que tienen alguna escala curvilínea, como el del tipo circular, por ejemplo, razón por la cual es muy conveniente y necesaria la divulgación de sus fundamentos, de sus características y de las normas para su construcción, con el colofón de aplicaciones a fórmulas de uso corriente en el ejercicio de la profesión por parte de arquitectos, ingenieros, industriales, etc.

1. Fundamento del nomograma circular.

El fundamento del nomograma circular es un conjunto de propiedades geométricas y trigonométricas muy elementales del triángulo y de la circunferencia, conocidas desde hace siglos, cuya aplicación a la construcción de nomogramas es muy reciente: de principios del siglo actual.

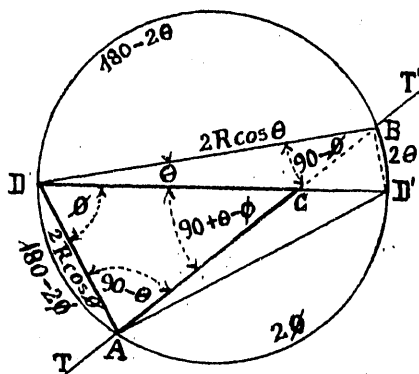


Figura 1.ª

En la figura 1.ª, a la circunferencia representada y a uno cualquiera de sus diámetros DD' , les corta la transversal TT' en los puntos A y B , a la primera, y en el C , al segundo.

En el triángulo DAC se verifica:

$$\frac{\text{sen } (90 - \theta)}{DC = L} = \frac{\text{sen } (90 + \theta - \phi)}{2R \cos \phi};$$

$$\frac{\cos \theta}{L} = \frac{\cos (\theta - \phi)}{2R \cos \phi}.$$

$$L = \frac{2R \cos \theta \cos \phi}{\cos \theta \cos \phi + \text{sen } \theta \text{ sen } \phi}.$$

$$L = \frac{2R}{1 + \text{tg } \theta \text{ tg } \phi}. \quad [1]$$

Sobre la semicircunferencia superior puede establecerse una escala de ángulos θ con el cero en D' y el ángulo 90° en D ; de manera análoga, sobre la inferior puede establecerse otra escala de ángulos ϕ con el cero en D' y el ángulo 90° en D .

Si se traza una recta que corte a una circunferencia así graduada, las tangentes de los ángulos indicados en los puntos de intersección y la longitud, L , entre el punto en que la transversal corta el diámetro DD' , C , y el D , extremo de ambas escalas, son magnitudes que satisfacen a la fórmula [1].

Puesto que los valores de las tangentes tienen por límites $+\infty$ y $-\infty$, si X e Y representan dos magnitudes variables, es correcto establecer las igualdades

$$X = \text{tg } \theta, \quad Y = \text{tg } \phi,$$

y sustituir las graduaciones en ángulos por los valores de las respectivas tangentes trigonométricas, que son, a su vez, los de X e Y ; por consiguiente:

$$L = \frac{2R}{1 + XY}.$$

Si entre las variables X, Y , existiese la relación

$$XY = Z;$$

$$L = \frac{2R}{1+Z}.$$

Las fórmulas para la graduación de las escalas que han de establecerse sobre las semicircunferencias y sobre el diámetro común a las mismas son:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} X; \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} Y; \quad L = \frac{2R}{1+Z}.$$

Si θ' y ϕ' representan los ángulos centrales correspondientes a los inscritos θ y ϕ , respectivamente, las fórmulas anteriores se sustituirán por estas otras:

$$\theta' = 2 \operatorname{tg}^{-1} X; \quad \phi' = 2 \operatorname{tg}^{-1} Y; \quad L = \frac{2R}{1+Z}.$$

Conclusión de lo expuesto en los párrafos precedentes es que las dos escalas circulares y la diámetro rectilínea constituyen conjuntamente un nomograma para la fórmula

$$XY = Z,$$

cuya clave consiste, sencillamente, en trazar una recta que pase por las divisiones de las dos primeras que representen los valores de los factores X e Y , respectivamente, cuyo producto señalará dicha recta sobre la tercera.

La escala para L tiene el cero en el extremo D del diámetro básico, y el valor $2R$, en el otro extremo D' ; la escala para Z tiene el cero en D' ; el uno, en el centro de la circunferencia, y el infinito, en D , leyéndose directamente sobre la escala diámetro los valores de Z , esto es, los del producto

$$XY = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \phi:$$

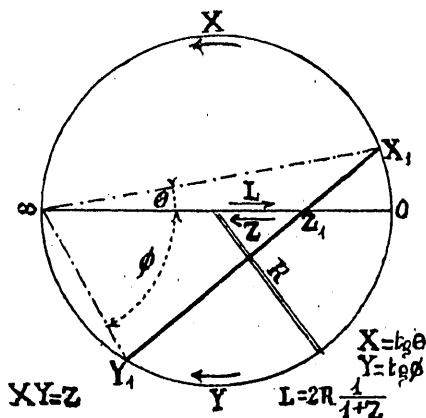


Figura 2.

La clave de este nomograma circular se representa en la figura 2.^a, y es tan sencilla que no se considera necesaria explicación alguna sobre la misma.

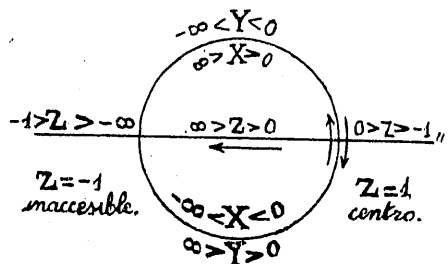


Figura 3.

II. Características del nomograma circular.

1.^a Un diámetro determina dos semicircunferencias sobre las que se establecen escalas análogas que tienen el cero en uno de sus extremos, el infinito en el otro y la unidad en el punto medio de la respectiva semicircunferencia. Si las escalas se gradúan en grados, las divisiones son iguales, siendo sus límites cero y 90° .

2.^a Sobre el diámetro antes especificado se establece una escala con el cero en el mismo extremo que el cero de las escalas circulares; el infinito, en el otro, y el uno, en el centro de la circunferencia.

3.^a Los ceros de las tres escalas coinciden con uno de los extremos del diámetro elegido, y los infinitos con el otro. Estas tres características son para el caso en que ninguna de las tres variables va acompañada por coeficiente o exponente diferente de la unidad, además de ser las tres positivas.

4.^a Si el producto se escribe en la forma

$$(-X)(-Y) = Z;$$

los valores de la variable X están en la escala para Y , y viceversa (fig. 3.^a); si se expresara en una de las formas

$$X(-Y) = -Z, \quad (-X)Y = -Z,$$

la disposición del nomograma será una de las dos que se representan en la figura 4.^a, con la misma escala para el producto Z .

5.^a Para los valores $X=1$, $Y=1$, que se leen en los extremos del diámetro perpendicular al básico, respectivamente, el de Z , también igual a la unidad, se leerá en el centro de la circunferencia.

6.^a Las rectas que pasen por la división señalada con el 1 en la escala para X , y por las divisiones de la escala para Y , cortarán al diámetro básico en puntos que llevarán, respectivamente, la misma numeración que los de la segunda utilizados; lo mismo su-

cede si las rectas parten de la división 1 de la escala para Y , siendo las divisiones de la para X las que determinan la orientación de cada una de las primeras.

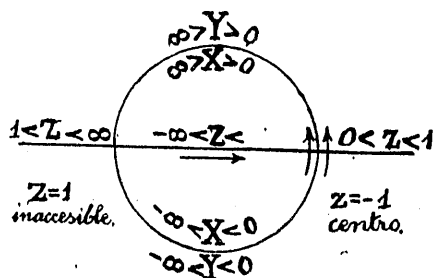


Figura 4.^a

7.^a Las divisiones con la misma numeración en las escalas para X y para Y son simétricas con relación al diámetro básico.

8.^a Las divisiones correspondientes a los extremos de un diámetro cualquiera, llevan numeraciones inversas.

9.^a Las divisiones correspondientes a los extremos de una cuerda paralela al diámetro básico, llevan numeraciones inversas.

Si los dos factores y su producto fuesen funciones de X, Y, Z , respectivamente, esto es,

$$F(X) f(Y) = \psi(Z),$$

entonces:

$$F(X) = \operatorname{tg} \theta; \quad f(Y) = \operatorname{tg} \phi; \quad L = \frac{2R}{1 + \psi(Z)}.$$

El trazado y graduación de las escalas se hace de la misma manera que se ha explicado en los párrafos anteriores, no para los valores de las variables, sino para los de sus correspondientes funciones, pero escribiendo sobre las divisiones los primeros; es tan sencillo el procedimiento que no es necesario entrar en más explicaciones, porque, además, las aplicaciones que se desarrollan al final de este artículo, apartarán cualquier duda del posible lector.

En casos como el que se acaba de exponer, las características antes especificadas se aplican a las funciones; no a las variables aisladamente.

III. Trazado de las escalas.

A. Escalas circulares. Variables sin coeficiente ni exponente (fig. 5.^a).

La división de la escala correspondiente a un valor cualquiera X_n de X , tiene que trazarse sobre un punto de su respectiva circunferencia tal que:

$$X_n = \operatorname{tg} \theta_n.$$

Por consiguiente, si R es el radio de la circunferencia, por el extremo de la derecha del diámetro básico se traza la tangente a la circunferencia, y sobre ella, a partir de ese extremo y hacia arriba, se lleva la magnitud $2RX$. La recta que enlace el extremo de la izquierda de dicho diámetro con el final de esta magnitud, corta a la circunferencia en un punto sobre el que se sitúa la división que ha de señalarse con el valor X_n , puesto que:

$$\frac{2RX_n}{2R} = \operatorname{tg} \theta_n = X_n.$$

Por consiguiente, la escala sobre la circunferencia será la proyección polar sobre la misma de la escala establecida sobre la tangente en el extremo de la derecha del diámetro básico, con polo en el extremo de la izquierda del mismo: la fórmula escalar de la última es $2RX$.

Este trazado se limita a los valores de X menores que la unidad, esto es, a media semicircunferencia; para el trazado sobre la otra media, la escala auxiliar se establece en la tangente de la izquierda con la fórmula escalar

$$\frac{2R}{X} = \frac{2R}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{2R}{1/\cot \theta} = 2R \cot \theta,$$

y el polo en el extremo de la derecha del diámetro básico.

La escala para Y sobre la semicircunferencia inferior se traza por un procedimiento análogo en todo.

A. Escalas circulares. Producto de funciones de X, Y .

Cuando el producto tiene la forma

$$F(X) f(Y) = \psi(Z),$$

el trazado de las escalas circulares se hace por el procedimiento antes explicado, con la única diferencia

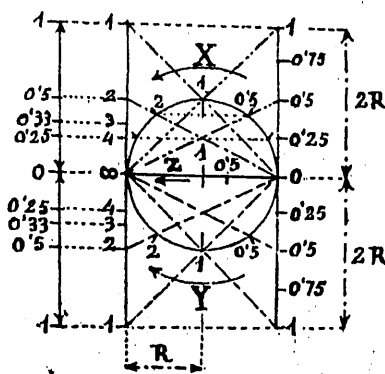


Figura 5.^a

de que las correspondientes fórmulas escalares son, respectivamente:

$$2R F(X); \quad \frac{2R}{F(X)}$$

$$2R f(Y); \quad \frac{2R}{f(Y)}$$

Sobre las divisiones trazadas se escribirán los valores de las variables, no los correspondientes de las funciones.

Las características del nomograma circular son aplicables, en el caso que ahora se examina, a las funciones, no a las variables que las constituyen.

B. Escala para Z, ó $\psi(Z)$, sobre el diámetro básico.

Se trata, sencillamente, de una escala rectilínea cuyo cero está en el extremo de la izquierda del diámetro básico y cuya fórmula escalar es:

$$\frac{2R}{1 + \psi(Z)}$$

En la figura 6.^a se representa, esquemáticamente, el trazado de las escalas del nomograma circular, en el caso de que las tres variables llevan los coeficientes $n, n', n n'$, respectivamente; las fórmulas escalares correspondientes son:

$$E_x = 2R n X; \quad E_x = \frac{2R}{n X};$$

$$E_y = 2R n' Y; \quad E_y = \frac{2R}{n' Y};$$

$$E_z = \frac{2R}{1 + n n' X Y}.$$

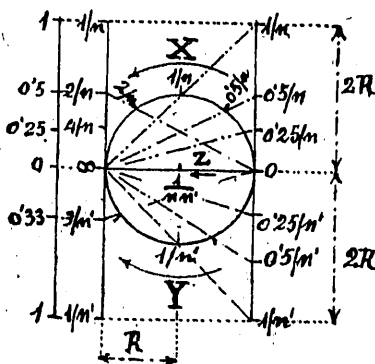


Figura 6.^a

Las dos de la izquierda para

$$\left. \begin{matrix} n X \\ n' Y \end{matrix} \right\} < 1;$$

y las dos de la derecha para

$$\left. \begin{matrix} n X \\ n' Y \end{matrix} \right\} > 1.$$

Con objeto de completar lo dibujado en la figura 6.^a se han formado las relaciones de valores particulares que se especifican a continuación, relativos a la escala para X:

Valores de $1/n$	Valores de E_x	
$1/n$	$2R$	$n X < 1.$
$0,8/n$	$2R \times 0,8$	
$0,6/n$	$2R \times 0,6$	
$0,4/n$	$2R \times 0,4$	
$0,2/n$	$2R \times 0,2$	

Valores de $1/n$	Valores de E_x	
$1/n$	$2R$	$n X > 1.$
$2/n$	$2R \times 0,50$	
$3/n$	$2R \times 0,33$	
$4/n$	$2R \times 0,25$	
$5/n$	$2R \times 0,20$	
$6/n$	$2R \times 0,17$	

Por lo que se refiere a la escala para Y, podrían formarse relaciones análogas.

Estado comparativo de las longitudes de las escalas en cuatro tipos de nomograma para la fórmula de Bazin (canales).

Coefficiente de rugosidad: $n = 0,06$.

Dimensiones de la hoja de papel: 40×30 cm.

Límites de las variables: los mismos en los cuatro tipos.

	Tipo I cm.	Tipo II cm.	Tipo III cm.	Tipo IV cm.
Escala para la velocidad...	13,3	19,5	19,7	38,5
Escala para el radio hidráulico	12,8	20,8	20,5	28,6
Escala para la pendiente...	4,0	19,5	13,0	12,2

- Tipo I. La tres escalas rectilíneas y paralelas.
- " II. Las tres escalas rectilíneas: dos paralelas y una transversal.
- " III. Dos escalas rectilíneas y una elíptica (la del radio hidráulico).
- " IV. Dos escalas circulares y una rectilínea (la de la pendiente).

La elección de uno u otro tipo de nomograma depende de las circunstancias de cada caso particular y de la importancia relativa que el operador les atribuya.

IV. Aplicaciones.

1. *Nomograma circular para la fórmula de Bazin (canales). Coeficiente de rugosidad: $n = 0,06$.*

$$V = \frac{87 \sqrt{i}}{\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{0,06}{R}};$$

$$V \left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{0,06}{R} \right) = 87 \sqrt{i}.$$

Diámetro de la circunferencia: 5 cm. (fig. 7.^a).

Las fórmulas para las escalas sobre las tangentes son:

Para la velocidad: $E_V = 5 V; \quad E_V = \frac{5}{V}.$

Para el radio hidráulico: $E_R = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{0,06}{R} \right).$

Para el radio hidráulico: $R_R = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{0,06}{R}}.$

Para la pendiente: $E_i = \frac{5}{1 + 87 \sqrt{i}}.$

Por ser la expresión para la velocidad una variable aislada sin coeficiente ni exponente, es suficiente trazar la escala para el primer cuadrante, como se representa en la figura; la graduación sobre el segundo se establece mediante la aplicación de la característica de que los extremos de cuerda paralelas al diámetro básico llevan numeraciones inversas. En la

figura se representa el trazado de la escala para los valores de V :

0,1, 0,5, 1, 2, 10;

nada más, en favor de la claridad de la misma, no estimándose necesarias más explicaciones.

Por ser el segundo factor una función del radio hidráulico R , el trazado de la respectiva escala exige el previo de las dos auxiliares sobre las tangentes correspondientes a los cuadrantes tercero y cuarto; por lo que se refiere a éste, se representa en la figura la construcción geométrica para situar las divisiones para los valores 1 y 5, respectivamente, de R , con magnitudes escalares de 4,8 cm. para el primero y 2,3 para el segundo; el punto medio de la semicircunferencia llevará la numeración 1,12, valor de R para que el paréntesis tenga el 1. En el cuadrante tercero se representa el trazado para el valor 0,5 de R , con magnitud escalar de 3,25 cm.

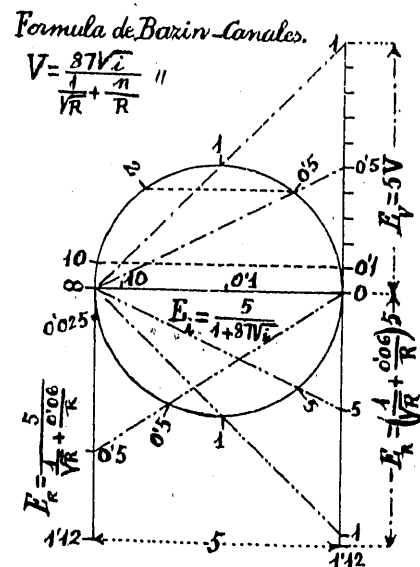


Figura 7.^a

El trazado de la escala para la pendiente i no ofrece circunstancia alguna digna de especial mención; se trata de una escala rectilínea, con fórmula escalar muy sencilla, sin complicaciones de ninguna clase.

Es oportuno recordar que a todo trazado de escalas para nomogramas debe preceder inexorablemente la formación de estados detallados en los que se consiguen para los valores particulares de las variables que se adopten, los parciales necesarios para obtener los escalares correspondientes a cada uno de los primeros.

2. Nomograma circular para la fórmula de Scobey (tubos de acero).

$$V = \frac{0,61}{K^{0,526}} D^{0,58} H^{0,526};$$

en la que:

V representa la velocidad en m./seg.
 D " el diámetro del tubo en m.
 H " la pérdida de carga en m./Km.
 K " el coeficiente de rugosidad.

Los límites de K son 0,1 y 1; los correspondientes de $K^{0,526}$, 0,3 y 1; tan próximos, que indudablemente es correcto adoptar para esta potencia el valor 0,61, para el cual el de K es casi 0,4, poco diferente, a su vez, de la media aritmética de sus límites; entonces la fórmula es:

$$V = D^{0,58} H^{0,526}.$$

Para que las escalas de estas tres variables en el nomograma tengan longitudes relativamente grandes y compatibles con las dimensiones de la hoja de papel en que han de dibujarse, es conveniente multiplicar los dos miembros de aquella fórmula por el factor 0,25, y escribir ésta en la forma siguiente:

$$0,25 V = (0,5 D^{0,58}) (0,5 H^{0,526}).$$

El diámetro de la circunferencia es 5 cm. (fig. 8.^a).

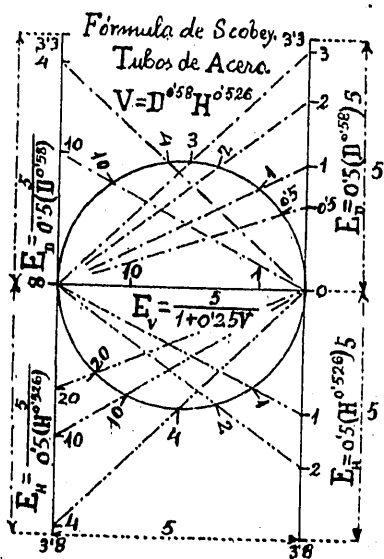


Figura 8.^a

Las correspondientes fórmulas para las escalas auxiliares son:

Para el diámetro:

$$E_D = 5 (0,5 D^{0,58}); \quad E_D = \frac{5}{0,5 D^{0,58}}.$$

Para la pérdida de carga:

$$E_H = 5 (0,5 H^{0,526}); \quad E_H = \frac{5}{0,5 H^{0,526}}.$$

Para la velocidad:

$$E_V = \frac{5}{1 + 0,25 V}.$$

La primera fase de construcción del nomograma es el dibujo de las cuatro escalas sobre las tangentes en los extremos del diámetro básico, para los valores de las variables respectivas que se estimen convenientes; en el caso presente son los numerados en la figura, en la que se representa muy claramente la proyección polar de los mismos sobre los cuadrantes respectivos.

La segunda fase es el dibujo de la escala para la velocidad sobre el diámetro básico, tarea muy sencilla, sin probabilidades de complicaciones.

Véase el dibujo del nomograma circular para la fórmula considerada, construido para su utilización normal y corriente por los interesados; en el original, la longitud del diámetro básico es 25 cm.

3. Nomograma circular para la fórmula del caudal en tubos llenos.

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V,$$

en la que:

Q representa el caudal en m.³/seg.
 D " el diámetro del tubo en m.
 V " la velocidad en m./seg.

Con la misma finalidad que en la aplicación anterior se modifica la estructura de la fórmula, adoptando la siguiente:

$$\frac{2}{3,14} Q = \frac{D^2}{\sqrt{2}} \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

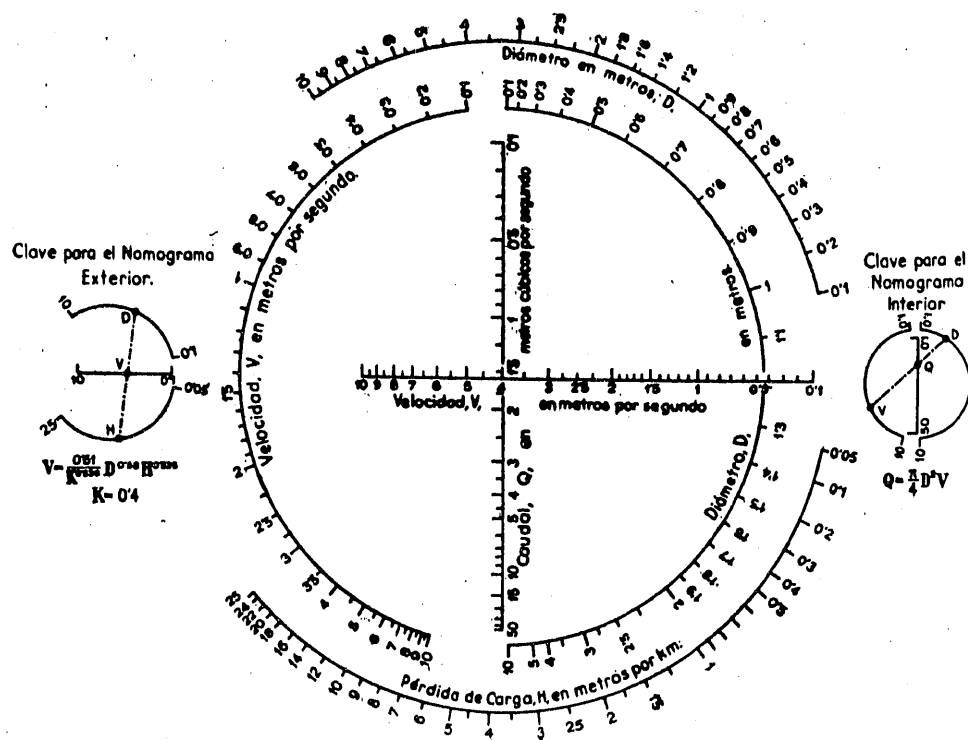
$$0,635 Q = (0,707 D^2) (0,707 V).$$

El diámetro de la circunferencia tiene longitud de 5 cm. (fig. 9.^a).

Las fórmulas de las escalas auxiliares sobre las tangentes en los extremos del diámetro básico son:

bajo de la escala para los caudales sobre el diámetro básico no ofrece dificultad alguna.

En la fotografía del nomograma para la fórmula de Scobey está también la del nomograma que se ha



Nomograma circular para la fórmula de Scobey. Tubos de acero.

Para el diámetro:

$$E_D = 5 (0,707 D^2); \quad E_D = \frac{5}{0,707 D^2}.$$

Para la velocidad:

$$E_V = 5 (0,707 V); \quad E_V = \frac{5}{0,707 V}.$$

Para el caudal:

$$E_Q = \frac{5}{1 + 0,635 Q}.$$

Una vez dibujadas las cuatro escalas auxiliares sobre las respectivas tangentes, las correspondientes a sus cuadrantes se trazan en la misma forma que se ha explicado para los nomogramas precedentes. El di-

descrito en los párrafos que anteceden, cuya circunferencia, en el original, tiene diámetro con 20 cm. de longitud.

4. Nomograma circular para la evaluación de la longitud de papel arrollado en una bobina.

La correspondiente fórmula es:

$$L = 0,8 \frac{D^2 - 0,0076}{e},$$

en la cual:

L representa la longitud de papel arrollado en m.
 D " el diámetro actual de la bobina en m.
 e " el espesor del papel en m.

Para el espesor del papel:

$$(1,000 \text{ e}) \frac{L}{1,000} = 0,8 (D^2 - 0,0076).$$

Las fórmulas para las escalas auxiliares son, respectivamente:

Para la longitud de papel arrollado:

$$E = 5 \frac{L}{1.000}; \quad E = 5 \frac{1.000}{L}.$$

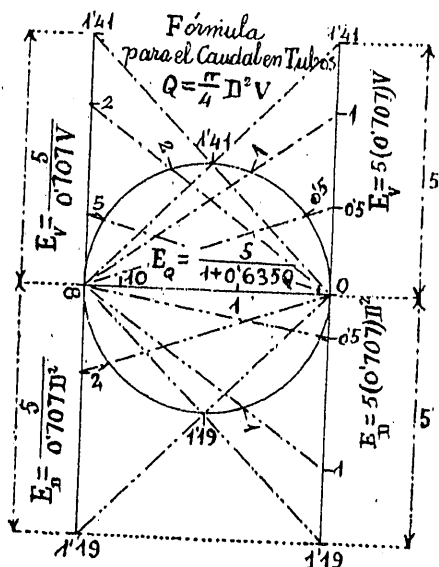


Figura 9.ª

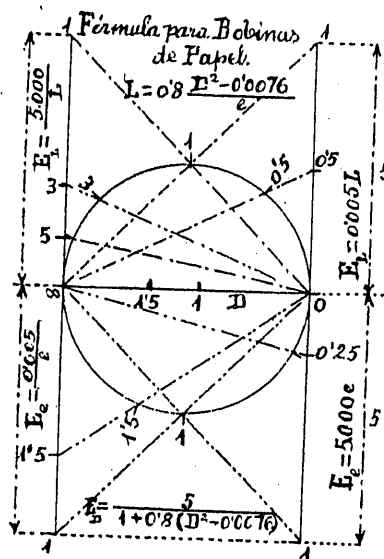


Figura 10.

Para el diámetro de la bobina:

$$E = \frac{5}{1 + 0,8(D^2 - 0,0076)}.$$

La construcción del nomograma que interesa se lleva a cabo por el mismo procedimiento que la de los tres anteriores, como aparece claramente en la figura. Se advierte que la escala para la longitud de papel arrollado está graduada en Km., y la de los espesores, en mm.