

NOTA SOBRE LAS LAMINAS CILINDRO-CIRCULARES

Por RAMON VIDAL DE ARTAZA,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un procedimiento de cálculo de láminas cilíndricas de directriz circular, sustentadas sobre pñones, que, a su juicio, no presenta más complicaciones que las actualmente conocidas, y que puede tener aplicación práctica.

La teoría elástica de la superficie deformable se aplica como primera aproximación a las cubiertas laminares, basándose en su pequeño espesor con relación a los radios de curvatura en cada punto. Cuando las condiciones de borde que se deducen de las ecuaciones planteadas no se cumplen, la lámina debe ofrecer rigidez a flexión y torsión, debiendo obtenerse soluciones adicionales que tengan en cuenta que el espesor de la lámina es finito.

Concretándonos a las láminas cilíndricas de directriz circular, sustentadas sobre pñones, existen métodos de cálculo simplificados, en los que simplemente, sin justificación rigurosa, se prescinde en las ecuaciones de equilibrio de los momentos de torsión y del longitudinal de flexión y del esfuerzo cortante correspondiente. Tampoco se tiene en cuenta la dilatación transversal, que, en bóvedas en las que el desarrollo de la directriz pueda tener relación no despreciable con la luz, parece que deba ser considerada.

A pesar de estas simplificaciones, a las que se puede presentar serios reparos teóricos, el desarrollo del cálculo en la práctica es en extremo complicado.

Otros tipos de cálculo en los que no se admite otra simplificación que la deformación rectilínea de las normales a la superficie media, son erróneas teóricamente, ya que es fácil demostrar que dicha hipótesis es incompatible con la sustentación en los pñones, y en efecto, así lo hemos demostrado en otro lugar.

Aunque en lo que sigue no pretendemos aclarar el porqué de la resistencia de este tipo de bóvedas, ya que la complicación del cálculo dificulta las tentativas en este sentido, y en todo caso, la razón fundamental se puede buscar en la teoría de la superficie deformable, si hemos llegado, con rigor suficiente y sin otra hipótesis que la pequeñez relativa del espesor de la lámina con respecto a sus radios de curvatura, a unos resultados que no son más complicados que los de la teoría desarrollada por Dischinger y Finsterwalder, y que pueden tener aplicación práctica.

En los desarrollos que siguen hemos prescindido de los cálculos superfluos, pues son bastante laboriosos, dando importancia solamente al rigor de los razonamientos.

Ecuaciones fundamentales.

Ecuaciones de equilibrio interno, en recorridos, en coordenadas cilíndricas.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial r} &= M \ddot{\xi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \varphi} &= M \ddot{\eta} \\ \frac{\partial e}{\partial z} &= M \ddot{\xi} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \varphi} \\ \ddot{\eta} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \\ \ddot{\xi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \varphi} - \frac{\dot{\eta}}{r} - \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dot{\xi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{aligned} \right\}$$

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\xi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

$$M = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

ξ = recorrido según la generatriz.

η = " " la directriz.

ξ = " " el radio.

Las tensiones se deducen mediante:

$$\begin{aligned} t_r &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \theta_{tz} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\ t_t &= \lambda e + \frac{2\mu}{r} \left(\zeta + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) & \theta_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \\ t_z &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial z} & \theta_r &= \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \text{Coeficiente de Poisson.} \\ E = \text{Módulo de elasticidad.} \end{array} \right.$$

Para cumplir las condiciones en los piñones, elegimos una solución de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \\ \eta &= \eta \cos \frac{\pi z}{l} \\ \zeta &= \zeta \cos \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \xi, \eta, \zeta, \text{ funciones de } r; \\ \varphi \text{ y } l, \text{ la luz de la bóveda.} \end{array}$$

Se deduce sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta} &= \left(-\frac{\pi}{l} \eta - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \\ \dot{\eta} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\pi}{l} \zeta \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \\ \dot{\xi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \cos \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \ddot{\zeta} &= \left[\frac{\pi}{l} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\pi}{l} \zeta \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \varphi} \right) \right] \cos \frac{\pi z}{l}; \\ \ddot{\eta} &= \left[\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\eta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \right) + \frac{\pi}{l} \left(\frac{\pi}{l} \eta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) \right] \cos \frac{\pi z}{l}; \\ \ddot{\xi} &= \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{\pi}{l} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\pi}{l} \zeta \right) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right] \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}. \end{aligned}$$

$$e = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\zeta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\pi}{l} \xi \right) \cos \frac{\pi z}{l}.$$

Las ecuaciones de equilibrio interno, en recorridos, se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{\zeta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\pi}{l} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= M \left[\frac{\pi}{l} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\pi^2}{l^2} \zeta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \varphi} \right]; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} + \frac{\pi}{lr} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} &= M \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\eta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{\pi^2}{l^2} \eta + \frac{\pi}{lr} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right]; \\ \frac{\pi}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\pi}{lr} \zeta + \frac{\pi}{lr} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\pi^2}{l^2} \xi &= M \left[\frac{\pi}{lr} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\pi}{lr} \zeta + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\pi}{l} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

Si en este sistema ponemos en el primer miembro de cada ecuación las $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2}$, y pasamos al segundo las restantes, obtenemos un sistema en la forma llamada normal, el cual admite una solución única para el problema de Cauchy, desarrollable en serie doble uniformemente convergente en un entorno de todo valor de r distinto de cero.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dr^2} &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{\zeta}{r} \right) + (M+1) \frac{t \eta}{r^2} + (M-1) \frac{t}{r} \cdot \frac{d \eta}{dr} + \alpha \frac{d \xi}{dr} (M-1) + M \zeta \left(\alpha^2 - \frac{t^2}{r^2} \right) \\ M \frac{d^2 \eta}{dr^2} &= -M \frac{d}{dr} \left(\frac{\eta}{r} \right) + \frac{t}{r} (M-1) \frac{d \zeta}{dr} + \frac{\alpha t}{r} (M-1) \xi - \frac{t}{r^2} (M+1) \zeta + \eta \left(M \alpha^2 - \frac{t^2}{r^2} \right) \\ M \frac{d^2 \xi}{dr^2} &= -\frac{M}{r} \frac{d \xi}{dr} - \frac{\alpha t}{r} (M-1) \eta - \frac{\alpha}{r} (M-1) \zeta - \alpha (M-1) \frac{d \zeta}{dr} + \xi \left(\alpha^2 - \frac{M t^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden. Se sabe que los únicos puntos que pueden ser singulares para las integrales son los de los coeficientes. Las integrales serán, pues, uniformemente convergentes, por lo menos dentro de un círculo que tenga por centro cualquier punto del plano y por radio la distancia de dicho punto al origen de coordenadas.

Sea R el radio de intradós de la bóveda, y sea $R+h$, siendo h variable entre cero y el espesor de la misma, el radio de cualquier superficie paralela al intradós.

Teniendo en cuenta los desarrollos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \frac{h^3}{R^3} \dots \right) \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} - \frac{4h^3}{R^3} \dots \right) \end{aligned} \right\} |h| < R$$

y que:

$$\frac{d^n \eta}{dr^n} = \frac{d^n \eta}{dh^n}; \quad \frac{d^n \xi}{dr} = \frac{d^n \xi}{dh^n}; \quad \frac{d^n \zeta}{dr^n} = \frac{d^n \zeta}{dh^n}$$

se puede tomar como nueva variable h , y entonces la integral general, para todo $|h| < R$, se expresa:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 + \frac{h}{R} \zeta_1 + \frac{h^2}{R^2} \zeta_2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \frac{h}{R} \eta_1 + \frac{h^2}{R^2} \eta_2 + \dots \\ \xi &= \xi_0 + \frac{h}{R} \xi_1 + \frac{h^2}{R^2} \xi_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

Los coeficientes son funciones racionales y enteras de t , y dentro del valor fijado para $|h|$, las series siguen siendo uniformemente convergentes para todo valor finito de t . Así, pues, para un valor determinado

Demostrada la unicidad de la solución de Cauchy, podemos ensayar una del tipo:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta e^{t\varphi} \\ \eta &= \eta e^{t\varphi} \\ \xi &= \xi e^{t\varphi} \end{aligned}$$

Las ζ , η , ξ del segundo miembro son funciones sólo de r , y la constante t puede ser real o compleja.

El sistema se puede escribir con $\alpha = \frac{\pi}{l}$:

de h pueden ordenarse esas series según las potencias de t , y el resultado será una serie entera en t , uniformemente convergente en todo el plano.

Evidentemente: conociendo (ζ_0, η_0, ξ_0) , (ζ_1, η_1, ξ_1) , el problema de Cauchy se resuelve fácilmente sustituyendo los desarrollos [2] en el sistema [1].

El problema elástico se plantea así:

Primera parte: Encontrar soluciones tales que las tensiones sobre trasdós e intradós sean nulas y que las tensiones sobre los bordes se conozcan de antemano.

Segunda parte: Encontrar la solución que produce tensiones determinadas, no nulas a la vez en trasdós e intradós; interesa, en particular, el que anule las tensiones en intradós y coincida en trasdós con la ley real de carga. Esta solución nos dará valores determinados de tensión en los bordes.

Tercera parte: Agrupar las tensiones en los bordes de la primera parte con los de la segunda, de modo que sean las prefijadas por las condiciones de sustentación.

Igualmente, las condiciones de tensión en las generatrices de borde se pueden sustituir por condiciones de recorridos o mixtas de tensión y recorrido, pero la parte fundamental, que es la integración de las ecuaciones [1], hay que ejecutarla en todos los casos.

En todo ello se supone que la ley de carga es de la forma:

$$f(\varphi) \cos \frac{\pi z}{l},$$

y que, como se verifica para los casos de la práctica,

$$f(\varphi) = f_1(e^{k\varphi})$$

o aún más estrictamente, que la ley de carga sobre la directriz es función lineal de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$.

Si la ley de carga, como función de z , puede desarrollarse en serie trigonométrica de la forma:

$$\Sigma A_n \cos \frac{(2n+1)\pi z}{l},$$

pueden efectuarse tantas integraciones como se desee para llegar a la aproximación deseada.

Nótese que estos artificios son idénticos, en la forma, a los que se emplean para encontrar la solución de Finsterwalder.

Para tener en cuenta, sin complicar la notación, en los cálculos que siguen, la pulsación variable de las armónicas, hacemos $\frac{(2n+1)\pi z}{l} = \alpha z$.

* * *

El problema que vamos a resolver no es el clásico de Cauchy para las ecuaciones diferenciales. El problema de Cauchy se plantearía así: Dadas las seis constantes (ζ_0, ζ_1) , (ξ_0, ξ_1) , (η_0, η_1) para $h=0$, encontrar la integral, o un desarrollo en serie de la misma, uniformemente convergente en un entorno de $h=0$. Se podría también plantear así: Dadas seis relaciones lineales entre las seis constantes citadas, encontrar la

integral; que equivaldría a conocer, para $h=0$, o sea para la cara de intradós, las tres tensiones $t_r, \theta_{rz}, \theta_{rt}$ y sus derivadas respecto a r .

El problema que, en realidad, se plantea, es reducible a una ecuación de Fredholm, pues los datos del problema son las tensiones $t_r, \theta_{rz}, \theta_{rt}$ para $h=0$ y para $h=H$, siendo H el espesor de la bóveda. Desde luego no lo resolveremos por el método Fredholm, pues ello implicaría: la resolución previa de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (haciendo $t=0$ en el sistema [1]), que no es de ninguna manera sencillo; la formación de la resolvente y determinación de los polos de la misma, ya que, tratándose de un sistema homogéneo, en la primera etapa del cálculo, sólo para esos valores de t tiene solución distinta de cero; problema en general inabordable.

* * *

Dada la pequeñez de la relación $\frac{h}{R}$, vamos a suponer limitado el desarrollo de las tensiones en los términos del segundo grado; no se limita en los de primero por razones que veremos más adelante.

Sustituyendo los desarrollos [2] en las ecuaciones [1], se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{2}{R^2} \zeta_2 + \frac{6}{R^2} \cdot \frac{h}{R} \cdot \zeta_3 = & \left| \begin{array}{l} \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{R^2} \\ - \frac{2(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2)}{R^2} \\ - \frac{(M+1)t}{R^2} (2\eta_0 - \eta_1) \\ - \frac{(M-1)t}{R^2} (\eta_1 - 2\eta_2) \\ + \frac{2\alpha(M-1)}{R} \zeta_2 \\ + M\alpha^2 \zeta_1 \\ + \frac{Mt^2}{R^2} (2\zeta_0 - \zeta_1) \end{array} \right| \frac{h}{R} \\ & + \frac{(M+1)t}{R^2} \eta_0 \\ & + \frac{(M-1)t}{R^2} \eta_1 \\ & + \frac{\alpha(M-1)}{R} \xi_1 \\ & + M\alpha^2 \zeta_0 \\ & - \frac{Mt^2}{R^2} \zeta_0 \\ \\ M \left(\frac{2}{R^2} \eta_2 + \frac{6}{R^2} \cdot \frac{h}{R} \eta_3 \right) = & \left| \begin{array}{l} \frac{M}{R^2} (\eta_0 - \eta_1) \\ - \frac{2M}{R^2} (\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) \\ - \frac{(M-1)t}{R^2} (\zeta_1 - 2\zeta_2) \\ - \frac{\alpha t}{R} (M-1) (\xi_0 - \xi_1) \\ + \frac{t}{R^2} (M+1) (2\zeta_0 - \zeta_1) \\ + M\alpha^2 \eta_1 \\ + \frac{t^2}{R^2} (2\eta_0 \eta_1) \end{array} \right| \frac{h}{R} \\ & + \frac{(M-1)t}{R^2} \zeta_1 \\ & + \frac{\alpha t}{R} (M-1) \xi_0 \\ & - \frac{t}{R^2} (M+1) \zeta_0 \\ & + M\alpha^2 \eta_0 \\ & - \frac{t^2}{R^2} \eta_0 \end{aligned} \quad [3]$$

$$M \left(\frac{2}{R^3} \xi_0 + \frac{6}{R^3} \cdot \frac{h}{R} \xi_3 \right) = - \left. \begin{array}{l} \frac{M}{R^3} \xi_1 \\ - \frac{\alpha t}{R} (M-1) \eta_0 \\ - \frac{\alpha (M-1)}{R} \zeta_0 \\ - \frac{\alpha (M-1)}{R} \zeta_1 \\ + \alpha^2 \xi_0 \\ - \frac{M t^2}{R^3} \xi_0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{M}{R^3} (\xi_1 - 2 \xi_3) \\ + \frac{\alpha t}{R} (M-1) (\eta_0 - \eta_1) \\ + \frac{\alpha (M-1)}{R} (\zeta_0 - \zeta_1) \\ - \frac{2 \alpha (M-1)}{R} \zeta_2 \\ + \alpha^2 \xi_1 \\ + \frac{M t^2}{R^3} (2 \xi_0 - \xi_1) \end{array} \right\} \frac{h}{R} \quad [8]$$

Suponiendo conocidas las constantes (ξ_0, η_0, ζ_0) , determinaremos las (ξ_1, η_1, ξ_3) , anulando para $h = 0$ las tensiones $t_r, \theta_{rz}, \theta_{tr}$.

Las expresiones de las tensiones, prescindiendo de los coeficientes armónicos y limitadas en los términos en $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ son:

$$\begin{array}{l} t_r = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{R} (\lambda + 2 \mu) \zeta_1 \\ + \frac{\lambda}{R} \zeta_0 \\ + \frac{\lambda}{R} \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \\ + \lambda \alpha \xi_0 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{2}{R} (\lambda + 2 \mu) \zeta_2 \\ - \frac{\lambda}{R} (\zeta_0 - \zeta_1) \\ - \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} \right) \\ + \lambda \alpha \xi_1 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} + \frac{3}{R} (\lambda + 2 \mu) \zeta_3 \\ + \frac{\lambda}{R} (\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2) \\ + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \varphi} \right) \\ + \lambda \alpha \xi_2 \end{array} \right\} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots \\ \\ t_t = \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda + 2 \mu}{R} \zeta_0 \\ + \frac{\lambda + 2 \mu}{R} \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \\ + \frac{\lambda}{R} \zeta_1 \\ + \lambda \alpha \xi_0 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda + 2 \mu}{R} (\zeta_0 - \zeta_1) \\ - \frac{\lambda + 2 \mu}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{2 \lambda}{R} \zeta_2 \\ + \lambda \alpha \xi_1 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} + \frac{\lambda + 2 \mu}{R} (\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2) \\ + \frac{\lambda + 2 \mu}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{3 \lambda}{R} \zeta_3 \\ + \lambda \alpha \xi_2 \end{array} \right\} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots \\ \\ t_z = \left. \begin{array}{l} (\lambda + 2 \mu) \alpha \xi_0 \\ + \frac{\lambda}{R} \zeta_0 \\ + \frac{\lambda}{R} \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \\ + \frac{\lambda}{R} \zeta_1 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} (\lambda + 2 \mu) \alpha \xi_1 \\ - \frac{\lambda}{R} (\zeta_0 - \zeta_1) \\ - \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{2 \lambda}{R} \zeta_2 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} + (\lambda + 2 \mu) \alpha \xi_2 \\ + \frac{\lambda}{R} (\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2) \\ + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{3 \lambda}{R} \zeta_3 \end{array} \right\} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots \\ \\ \theta_{tz} = \left. \begin{array}{l} - \mu \alpha \eta_0 \\ + \frac{\mu}{R} \frac{\partial \xi_0}{\partial \varphi} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \mu \alpha \eta_1 \\ - \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \right) \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} - \mu \alpha \eta_2 \\ + \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \right) \end{array} \right\} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots \\ \\ \theta_{rz} = \left. \begin{array}{l} - \mu \alpha \zeta_0 \\ + \frac{\mu}{R} \xi_1 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \mu \alpha \zeta_1 \\ + 2 \frac{\mu}{R} \xi_2 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} - \mu \alpha \zeta_2 \\ + 3 \frac{\mu}{R} \xi_3 \end{array} \right\} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots \end{array}$$

$$\theta_{rl} = + \left| \begin{array}{cc} \frac{\mu}{R} \eta_1 & + \quad 2 \frac{\mu}{R} \eta_2 \\ \frac{\mu}{R} \eta_0 & + \quad \frac{\mu}{R} (\eta_0 - \eta_1) \\ + \quad \frac{\mu}{R} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi} & - \quad \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} \right) \end{array} \right| \frac{h}{R} + \left| \begin{array}{cc} 3 \frac{\mu}{R} \eta_3 & \\ - \quad \frac{\mu}{R} (\eta_0 - \eta_1 + \eta_2) & \\ + \quad \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varphi} \right) & \end{array} \right| \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \dots$$

Es de notar que las ξ_i , η_i , ζ_i son, en estas expresiones, funciones de φ ; para obtener fórmulas que se relacionen con el grupo de tres fórmulas [3], basta tener en cuenta:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} = t \eta_i e^{t\varphi}; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} = t \xi_i e^{t\varphi}; \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial \varphi} = t \zeta_i e^{t\varphi}, \quad [4]$$

en donde η_i , ξ_i , ζ_i , son constantes en los segundos miembros.

Según esto, las condiciones de anulación de t_r , θ_{rz} , y θ_{rl} , para la cara de intradós $h=0$, serán:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\zeta_0 + \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} + R \alpha \xi_0 \right); \\ \eta_1 &= \eta_0 - \frac{\partial \zeta_0}{\partial \varphi}; \\ \xi_1 &= R \alpha \zeta_0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & M+1 &= \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}, & M-1 &= -\frac{1}{2(1-\nu)}; \\ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} &= \frac{\nu}{1-\nu}, & \frac{M+1}{M} &= \frac{3-4\nu}{1-2\nu}, & \frac{M-1}{M} &= -\frac{1}{1-2\nu}, \end{aligned}$$

y las [4], se deduce sucesivamente, mediante [3]:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= - \frac{\nu}{1-\nu} (\zeta_0 + t \eta_0 + R \alpha \xi_0); \\ \xi_1 &= R \alpha \zeta_0; \\ \eta_1 &= \eta_0 - t \zeta_0; \\ 2 \zeta_2 &= \frac{\zeta_0}{1-\nu} (1 + t^2 \nu - R^2 \alpha^2 \nu) + t \eta_0 + R \alpha \frac{\nu \xi_0}{1-\nu}; \\ 2 \eta_2 &= - \frac{\zeta_0}{1-\nu} t (2-\nu) + \eta_0 \left(R^2 \alpha^2 - t^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \right) - R \alpha \zeta_0 \frac{t}{1-\nu}; \\ 2 \xi_2 &= \frac{\zeta_0}{1-\nu} \nu R \alpha + \frac{\eta_0}{1-\nu} R \alpha t - \xi_0 \left(t^2 - \frac{2-\nu}{1-\nu} R^2 \alpha^2 \right); \\ 6 \zeta_3 &= - \frac{3}{1-\nu} \zeta_0 + \frac{\eta_0}{1-\nu} [-t(2-\nu) + t^3(1+\nu) - R^2 \alpha^2 t(1+\nu)] + \frac{R \alpha \xi_0}{1-\nu} [-3\nu + t^2(1+\nu) - R^2 \alpha^2(1+\nu)]; \\ 6 \eta_3 &= \zeta_0 \left[\frac{5-\nu}{1-\nu} t + \frac{2-\nu}{1-\nu} t^3 - \frac{2-\nu}{1-\nu} R^2 \alpha^2 t \right] + \frac{3}{1-\nu} t^2 \eta_0 + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} R \alpha t \xi_0; \\ 6 \xi_3 &= \zeta_0 \left(R \alpha \cdot \frac{1}{1-\nu} - R \alpha t^2 \frac{1}{1-\nu} + R^3 \alpha^3 \frac{2-\nu}{1-\nu} \right) + \eta_0 \left(2 R \alpha \frac{t^2 \nu}{1-2\nu} - R \alpha \frac{t}{1-2\nu} \right) + \xi_0 \left(3 t^2 - R^2 \alpha^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \right). \end{aligned}$$

y, por lo tanto, los valores de t_r , 0_{rz} y 0_{rt} , prescindiendo del coeficiente armónico en z y del exponencial $e^{t\varphi}$, son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{h} t_r &= \frac{\lambda + 2\mu}{R} \cdot \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \left[\zeta_0 \left(1 - \frac{3h}{2R} \right) + \eta_0 \left(t - t \frac{h}{R} + t^3 \frac{h}{2R} - R^2 \alpha^2 t \frac{h}{2R} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi_0 \left(\nu R \alpha - 3\nu R \alpha \frac{h}{2R} + R \alpha t^2 \frac{h}{2R} - R^3 \alpha^3 \frac{h}{2R} \right) \right]; \\ \frac{R}{h} 0_{rz} &= \frac{\mu}{R} \left[\zeta_0 \left(\frac{2\nu}{1-\nu} R \alpha - R \alpha t^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{h}{2R} + R^3 \alpha^3 \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} \right) + \eta_0 \left(R \alpha t \frac{1+\nu}{1-\nu} - R \alpha t \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{h}{R} + R \alpha t^2 \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{h}{R} \right) + \xi_0 \left(-t^2 + \frac{2}{1-\nu} R^2 \alpha^2 - R^2 \alpha^2 \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} + 3t^2 \cdot \frac{h}{2R} \right) \right]; \\ \frac{R}{h} 0_{rt} &= \frac{\mu}{R} \left[\zeta_0 \left(-\frac{2t}{1-\nu} + \frac{4t}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} + \frac{t^3}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} - R^2 \alpha^2 t \cdot \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} \right) + \eta_0 \left(R^2 \alpha^2 - \frac{2t^2}{1-\nu} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - R^2 \alpha^2 \cdot \frac{h}{2R} + \frac{3t^2}{1-\nu} \cdot \frac{h}{R} \right) + \xi_0 \left(-R \alpha t \frac{1+\nu}{1-\nu} + R \alpha t \cdot \frac{3+5\nu}{1-\nu} \cdot \frac{h}{2R} \right) \right]. \end{aligned} \right\} [5]$$

Estas tensiones deben anularse en la primera fase del cálculo para $h = H$. Se obtiene así un sistema homogéneo, cuya condición de compatibilidad nos dará una ecuación en t , cuyas raíces nos permitirán calcular dos de las ξ_0, η_0, ζ_0 en función de una de ellas.

Este determinante es de un desarrollo muy laborioso, pero se puede simplificar prescindiendo, por su pequeñez relativa, de alguno de sus términos. Por ejemplo: el coeficiente de η_0 , de la primera ecuación, se puede escribir ordenándolo en t :

$$t \left(1 - \frac{h}{R} - R^2 \alpha^2 \frac{h}{2R} \right) + t^3 \cdot \frac{h}{2R},$$

y teniendo en cuenta la pequeñez de $\frac{h}{R}$, lo simplificaremos así:

$$t + t^3 \frac{h}{2R};$$

pues $R^2 \alpha^2$, para las dos primeras armónicas, vale:

$$\frac{\pi^2 R^2}{l^2} \quad \text{y} \quad \frac{9\pi^2 R^2}{l^2}.$$

Siguiendo este mismo criterio en todos los elementos, el determinante de los coeficientes es, con

$$\frac{H}{2R} = a, \quad R \alpha = b:$$

$$\begin{vmatrix} 1, & t + a t^3, & b \nu + a b t^2; \\ \frac{2\nu}{1-\nu} b - \frac{1+\nu}{1-\nu} a b t^2, & \frac{1+\nu}{1-\nu} b t + \\ + \frac{2\nu}{1-2\nu} a b t^2, & -t^2 + \frac{2}{1-\nu} b^2; \\ -\frac{2}{1-\nu} t + \frac{2}{1-\nu} a t^3, & b^2 - \frac{2}{1-\nu} t^2, & -\frac{1+\nu}{1-\nu} b t; \end{vmatrix} = 0$$

que, desarrollado y simplificado, conduce a la ecuación en t :

$$\begin{aligned} &\frac{2a^2}{1-\nu} t^8 + 4a^3 b^2 \frac{\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} t^7 - a^2 b^2 \frac{\nu+3}{1-\nu} t^6 - \\ &- 4a^2 b^2 \frac{\nu}{1-2\nu} t^5 - \left(a b^2 - a^2 b^4 \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) t^4 + \\ &+ \frac{2\nu}{1-2\nu} a b^2 t^3 - a b^4 \nu t^2 + 2(1+\nu) b^4 = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede resolver; sus raíces son imaginarias. Su resolución puede hacerse, por ejemplo, mediante el procedimiento empleado por el profesor Torroja para una ecuación análoga.

Sustituyendo una de sus raíces en el sistema de ecuaciones de que procede, se puede obtener, por ejemplo, ζ_0, η_0 en función de ξ_0 , y sucesivamente, en función de esta última constante, los valores de $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \xi_4$, y las tensiones, por medio de simples operaciones. Todos los valores que se obtengan serán imaginarios.

Al hacer lo propio con la raíz imaginaria conjugada, se obtendrán expresiones imaginarias conjugadas de las anteriores, y en virtud del teorema de superposición de las soluciones elásticas, la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria de las expresiones que se obtengan, afectadas de coeficientes arbitrarios, serán soluciones aproximadas del problema en su primera etapa.

Es de notar que la discusión del problema no creemos que pueda llevarse más allá del planteamiento de la ecuación en t , y por eso hemos afirmado que el aspecto físico del problema no se puede poner de manifiesto por la complicación de los cálculos; no obstante, de cada caso particular que se resuelva pueden deducirse las consecuencias oportunas.

Antes de pasar adelante, conviene hacer notar que la ecuación trascendente deducida de la función holo-

morfa en t a que tiende el determinante del sistema, tiene, en efecto, infinitas raíces; es decir, que es una función entera con ceros. Que el determinante tiende hacia una función holomorfa, es fácil de ver. En efecto: hemos indicado que los coeficientes de ξ_0, η_0, ξ_0 son series uniformemente convergentes para todo valor finito de t , y de esto se deduce inmediatamente nuestra proposición. En cuanto a que tiene ceros, se puede deducir de la siguiente manera:

Por idénticas razones que con respecto a t la integral general del sistema [1] es una función holomorfa de α , pues los coeficientes son funciones analíticas holomorfas de dicho parámetro. Para encontrar la serie entera que represente dicha función de α , se puede formar una serie entera en α para cada valor ξ, η, ξ , y, por sustitución e identificación, se obtienen los coeficientes como soluciones de una serie de sistemas de ecuaciones lineales. En particular, el término independiente de α se obtendrá haciendo $\alpha = 0$ en el sistema [1]. El sistema que se obtiene es uno lineal del tipo de Euler, cuya integración es inmediata. Operando con él, como hemos hecho con la solución ordenada en h , el determinante que se obtenga, que será de sexto orden, nos representará el valor de la función de t , que nos da los valores de dicho parámetro, útiles, cuando $\alpha = 0$. Tratándose de una ecuación trascendente, con infinitos ceros, lo mismo será la ecuación general en α y t .

Si en vez de detenernos en los términos del segundo grado en h , lo hubiéramos hecho en los de primero, el desarrollo del determinante correspondiente nos daría una constante; la primera y mínima aproximación para los valores de t es, pues, la ecuación de octavo grado que hemos escrito más arriba. La simplificación del determinante no es precisa en casos de aplicación, y según la armónica de que se trate, es decir, según el valor de α , es claro que puede no ser conveniente.

El procedimiento es susceptible de afinación indefinida. Todo depende de la potencia de h en que nos detengamos; el grado de la ecuación en t aumentará, y un síntoma de la bondad de la primera aproximación será el contraste con la segunda ecuación aproximada. Claro que ello implica el cálculo de los valores ξ_4, η_4, ξ_4 , cuyo cálculo no es cómodo, pero sí factible.

Con la primera aproximación, tenemos ocho soluciones particulares. Integrando las expresiones de las tensiones que actúan, en las caras normales a la superficie, podemos encontrar los momentos flectores, de torsión, esfuerzos cortantes y normales totales que nos son suficientes prácticamente para encontrar una solución a lo Saint-Venant. Igualmente, para las soluciones

de recorrido, los valores de ξ_0, η_0, ξ_0 y el valor η_1 , o bien el del momento flector sobre la directriz, agotan las posibilidades de la primera aproximación.

Si suponemos resuelta la segunda etapa del cálculo, a la que en seguida nos referiremos, esta solución nos dará ciertos valores en los dos bordes de tensiones o recorridos, y podemos pasar a la tercera etapa, en la cual, mediante un sistema de ecuaciones lineales ajustado a las condiciones en los bordes, podemos calcular el valor de las constantes arbitrarias que figuran en las soluciones de la primera etapa.

La segunda etapa es fácil de resolver:

Si, en general, es para $r = R + H$:

$$t_r = A \cos \varphi + B \sin \varphi;$$

$$\theta_{tr} = C \cos \varphi + D \sin \varphi;$$

$$\theta_{zr} = 0;$$

teniendo en cuenta:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i};$$

haciendo $t = \pm i$ en las expresiones [5], e identificando con el coeficiente correspondiente de $e^{\pm i\varphi}$, y observando que por lo mismo que $+i$ y $-i$ son imaginarios conjugados, se puede repetir lo que antes hemos dicho para los valores de t de la primera etapa, se obtendrá la solución que se busca.

* * *

Este es, en líneas generales, el procedimiento que proponemos. Su desarrollo es, hasta cierto punto, paralelo al que da la solución de Finsterwalder. Las dificultades de su aplicación no son mucho mayores, y hasta el punto que ha sido posible hemos desarrollado esta nota con rigor matemático. Este rigor ha sido abandonado en el momento en que hablamos de ecuaciones aproximadas, pues resulta difícil, si no imposible, encontrar una cota práctica del error cometido. Como podemos suponer razonablemente que la serie en $\left(\frac{h}{R}\right)$ es fuertemente convergente, entra dentro de lo posible que los resultados sean aproximados para la práctica.

Con esta solución podemos conocer el orden de magnitud de las tensiones y otros esfuerzos de menos importancia y aplicarlas sin reservas en otras modalidades estructurales del mismo tipo.