

TEORIA PARA EL CALCULO DE EJES

DE ACUERDO CON LAS NORMAS DE LA NOTICIA TECNICA DE LA SOCIETE NATIONALE DES CHEMINS DE FER FRANÇAIS

Por FERMIN GARCIA GONZALEZ, Ingeniero de Caminos.

Con este mismo título se publicó por el Laboratorio de Investigaciones Ferroviarias un importante trabajo, que ahora resume el mismo autor en el presente artículo, para conocimiento de nuestros lectores.

Notaciones.

Consideramos un eje montado (figs. 1.^a y 2.^a) mirado desde detrás en la dirección de la marcha, del que designaremos por rueda 1 la de la izquierda, que supondremos ser la menos cargada, y rueda 2, la de la derecha, que supondremos ser la más cargada y sobre la que actúa el esfuerzo lateral o transversal.

Designamos con las siguientes letras las magnitudes que se detallan a continuación:

P = carga estática sobre cada mangueta en estado de reposo.

P' = carga estática sobre el carril, obtenida sumando a P el peso de un semieje montado.

P_1 = suma de carga y sobrecarga dinámica sobre la mangueta izquierda, en un estado dinámico.

P_2 = suma de cargas y sobrecargas dinámicas en la mangueta derecha, en el mismo estado dinámico.

T = esfuerzo lateral transversal entre carril y rueda, en un estado dinámico, que se supone actuando en la rueda derecha, por ser lo más desfavorable.

ψ_1 y ψ_2 = reacciones verticales de carril sobre rueda que equilibran las cargas y sobrecargas dinámicas verticales y transversales.

F = componente radial de la acción de frenado entre rueda y zapata.

H = esfuerzo horizontal longitudinal a la vía sobre la mangueta, producido por el frenado y ejercido por la caja sobre el eje.

H' = esfuerzo horizontal longitudinal entre carril y rueda.

φ = coeficiente de rozamiento entre rueda y carril.

f = coeficiente de rozamiento entre rueda y zapata de freno.

EJE CON MANGUETAS EXTERIORES

NOTA: EN ESTA FIGURA X ES NEGATIVA, PUES SE CUENTA POSITIVA A PARTIR DEL CARRIL Y HACIA EL EXTERIOR DE LA VÍA.

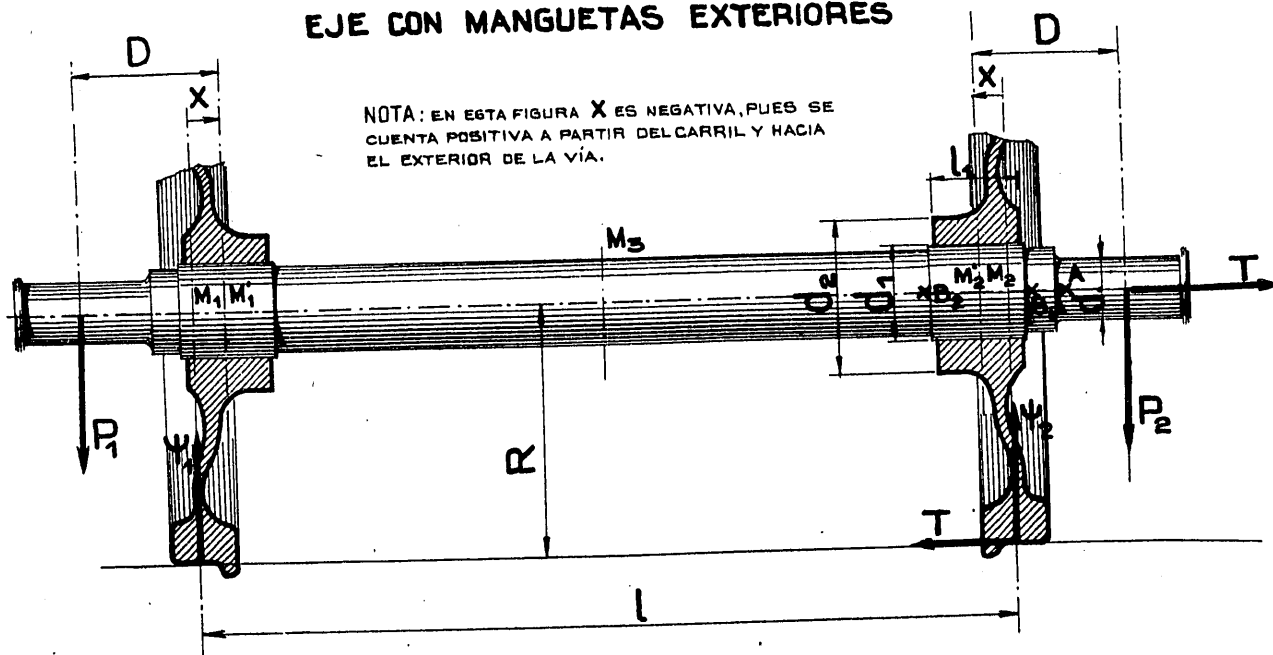


Figura 1.^a

f' = coeficiente de rozamiento entre cubo de rueda y eje.

β = módulo de calaje, relación entre las dos dimensiones siguientes: Una, la diferencia entre el diámetro exterior del eje y el diámetro interior del cubo antes del calaje, y la otra, el diámetro exterior del eje en dicha zona de calaje.

E = módulo de elasticidad del acero empleado.

e = diferencia entre los radios de dos secciones acoradas (figs. 3.^a y 4.^a).

δ = longitud (en la dirección del eje) del acuerdo entre dos secciones.

ρ = en una sección longitudinal del eje (figs. 3.^a y 4.^a), el radio del acuerdo entre dos secciones de distinto diámetro o el mayor radio de este acuerdo si se realiza con dos radios.

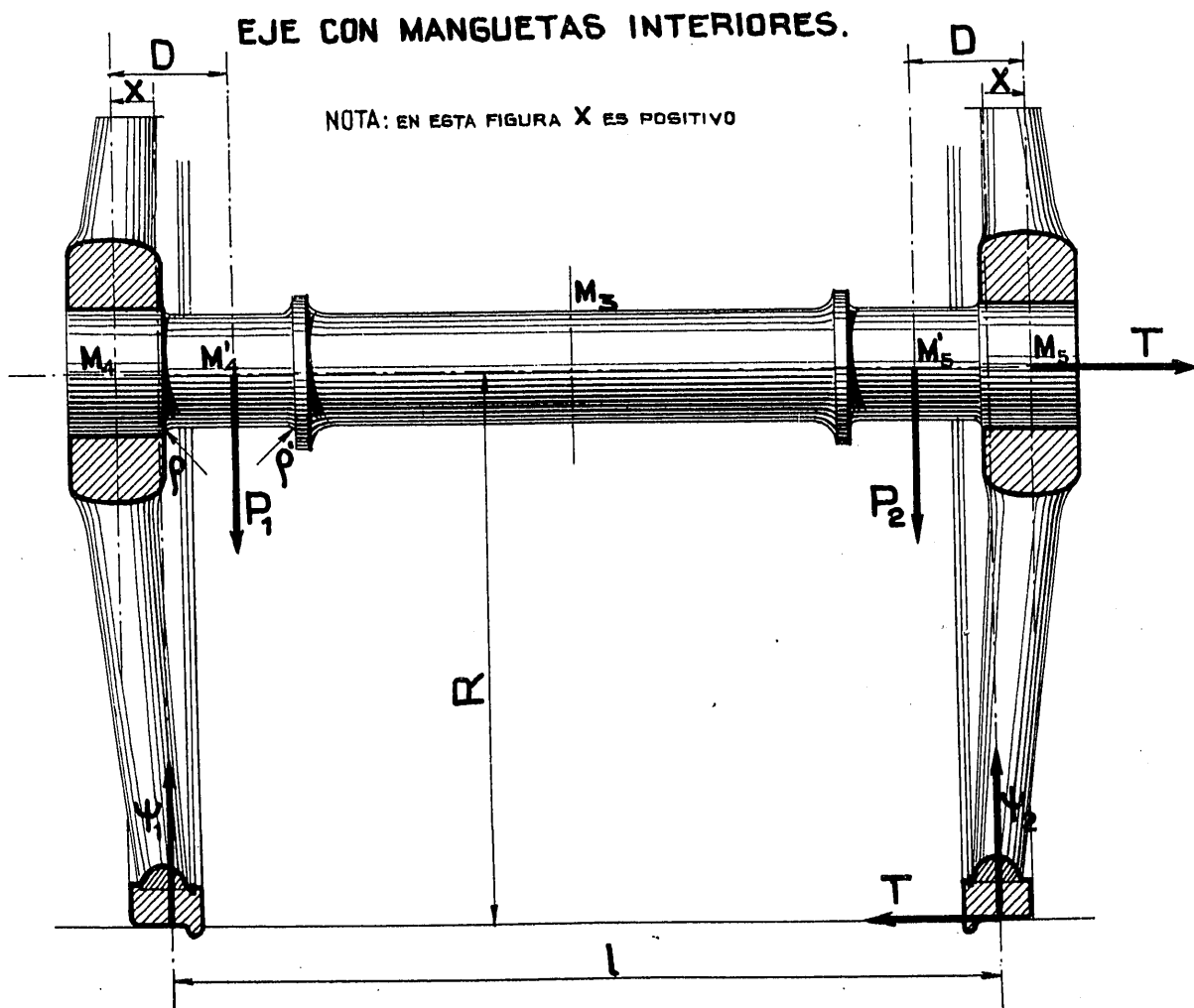


Figura 2.^a

R = radio de la superficie de rotadura de la rueda y también tensión límite de rotura para cargas fijas.

d = diámetro del eje en la mangueta.

d_1 = diámetro del eje en la zona de calaje.

d' = diámetro del eje en otras secciones.

d_3 = diámetro interior de eje hueco.

d_2 = diámetro exterior del cubo de la rueda en la zona de calaje.

r_1, r_2, r_3 y r' = radios correspondientes a los diámetros d_1, d_2, d_3 y d' (su mitad).

ρ' = radio menor del acuerdo anterior cuando se realiza con dos radios (fig. 3.^a).

D' = diámetro mayor a considerar en las curvas de la figura 8.^a para calcular el coeficiente de aumento de esfuerzos por cambio rápido de sección (que es igual al diámetro exterior del cubo para la sección de calaje y al diámetro mayor de las secciones acoradas en las restantes secciones).

K = en las secciones donde hay cambio rápido de sección, coeficiente de aumento que corrige el error de

emplear las fórmulas corrientes de piezas prismáticas para el cálculo de las tensiones.

K' = coeficiente de aumento a aplicar a la presión media de calaje para tener en cuenta la desigual repartición.

l_1 = longitud de la zona de calaje entre cubo y eje.

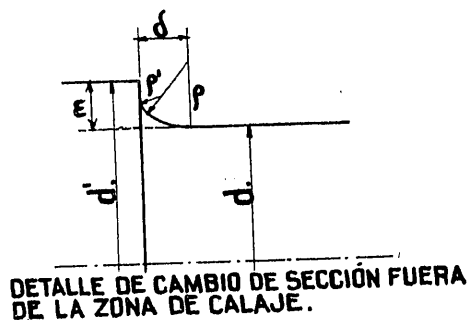


Figura 3.ª

l' = longitud de la mangueta.

l = distancia entre centros de carriles.

D = distancia entre centros de mangueta y de calaje.

x = distancia transversal horizontal entre centro de carril y centro de calaje, contada positivamente a partir del centro del carril hacia fuera de la vía.

α = ángulo con la horizontal del radio que va al centro de la zapata del freno.

M_1 = en el caso de manguetas exteriores y bajo la acción de las cargas y sobrecargas dinámicas verticales en mangueta y transversales, en rueda, el momento flector (de eje horizontal) que resulta en el centro de la zona del calaje izquierdo, considerando como fuerzas a la izquierda de dicha sección solamente las que actúan sobre la mangueta y no las que actúan sobre la rueda.

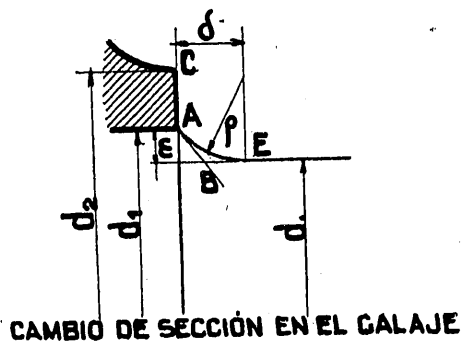


Figura 4.ª

M'_1 = momento flector en la misma sección anterior y con las mismas cargas y sobrecargas, pero considerando actuando a la izquierda de la sección, además

de las fuerzas que actúan sobre la mangueta, las que actúan sobre la rueda.

(Los dos momentos anteriores en la misma sección resultan de la simplificación de suponer que la transmisión de esfuerzos de la rueda al eje por el calaje se realiza bruscamente en la sección media de dicho calaje.)

M_2 = análogo al M_1 en la rueda derecha, al considerar sólo fuerzas en la mangueta derecha para su cálculo.

M'_2 = análogo al M'_1 en la rueda derecha, considerando en su determinación las fuerzas que actúan en la mangueta y rueda derecha.

M_4 = (en el caso de manguetas interiores y bajo la acción de cargas y sobrecargas dinámicas verticales en mangueta y transversales en rueda derecha) momento flector en el centro del calaje izquierdo, considerando como fuerzas a la izquierda la totalidad de fuerzas sobre rueda izquierda.

M'_4 = en las circunstancias anteriores, momento en el centro de la mangueta izquierda.

M_5 = análogo al M_4 , pero para la rueda derecha.

M'_5 = análogo al M'_4 en la rueda derecha.

M_3 = momento flector en el centro del eje bajo la acción de las cargas y sobrecargas verticales en manguetas, y transversales en rueda derecha.

M_F = momento flector de eje vertical producido durante el frenado en el centro del calaje, considerando como fuerzas flectoras del lado exterior de la sección solamente las acciones horizontales producidas en la mangueta y no las que actúan sobre la rueda.

M'_F = el momento anterior, considerando además las fuerzas horizontales que actúan sobre la rueda.

(Los dos momentos anteriores en la misma sección del eje resultan de suponer que la acción de la rueda sobre el eje se realiza bruscamente en la sección media del calaje donde se hace la transmisión total de fuerzas y momentos, habiendo un momento flector antes de la transmisión, y otro, después.)

M_v = suma de momentos de flexión producidos por fuerzas verticales y transversales (momentos de eje horizontal).

M_h = suma de momentos producidos por fuerzas horizontales longitudinales (momentos de eje vertical).

M_{hv} = momento resultante de las flexiones de direcciones normales anteriores.

M_t = momento de torsión.

M_E = momento equivalente a los momentos simultáneos de torsión y flexión.

t_f = tensión debida a los momentos de flexión.

t_t = tensión debida a los momentos de torsión.

t_e = tensión equivalente a la acción de flexiones y torsiones.

t_z = tensión debida al zunchado en el calaje, en ejes macizos.

t_{zn} = tensión de zunchado normal al eje, en ejes huecos.

- t_{zt} = tensión producida por el zunchado tangencial a la circunferencia, en ejes huecos.
 t_{ez} = tensión equivalente a la suma de flexiones, torsiones y zunchado de calaje.
 L = tensión límite de rotura por fatiga a tensiones alternativas.
 L' = tensión límite de elasticidad proporcional.
 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6 = coeficientes de seguridad para distintas secciones y circunstancias.

HIPÓTESIS DE CÁLCULO

Consideraciones generales sobre cargas variables y reacciones.

Observemos que si tenemos una función lineal, F , de varias variables, $x, y, z, \dots$, por ejemplo, $F = ax + by + \dots - cz - \dots$, en la que los valores de las variables pueden oscilar entre dos límites, $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$, etc., el mayor valor positivo de dicha función corresponderá a los valores límites mayores de los términos de coeficiente positivo y los menores valores límites de los términos de coeficiente negativo, y análogamente, el menor valor positivo o mayor negativo se producirá con la hipótesis opuesta.

Observemos también que, tratándose de fuerzas concentradas aplicadas a puntos invariables, los momentos en cualquier sección son funciones lineales de estas fuerzas y, además, los momentos para secciones comprendidas entre dos puntos consecutivos de aplicación de fuerzas son funciones lineales de estos momentos y, por ello, de las fuerzas aplicadas, siendo distintas estas funciones para cada intervalo de fuerzas consecutivas.

Para cada sección intermedia entre dos de aplicación de fuerzas consecutivas, se considera que el mayor valor se produce para una de las dos hipótesis que hacen mayores los valores en los dos extremos, o sea, será la mayor ordenada de las dos rectas representativas de las leyes de variación de los momentos para las dos hipótesis de carga que dan los mayores valores en los extremos.

Un caso de fuerzas variables entre límites conocidos es el de las fuerzas longitudinales de rozamiento entre rueda y carril, que pueden variar entre $+\varphi P'$ y $-\varphi P'$ ($\varphi = 0,3$, máximo coeficiente de rozamientos, y P' , peso sobre el carril).

Las fuerzas verticales que actúan sobre la mangueta están comprendidas también entre límites que fijamos, así como las transversales entre pestaña y carril.

Es muy interesante tener en cuenta el caso corriente de fuerzas que, pudiendo variar cada una entre dos límites absolutos, no pueden alcanzarlos simultáneamente, de modo que si llevamos unas a sus límites absolutos, las otras no pueden alcanzar simul-

táneamente más que unos límites relativos. Tal es el caso de un par motor $C_m < 2\varphi P' R$, equilibrado en el eje por el rozamiento de sus dos ruedas, de las que, si una llega al límite de rozamiento y equilibra el par $\varphi P' R$, la otra sólo puede producir simultáneamente la reacción que dé el resto del par $C_m - \varphi P' R$.

En estos casos es preciso considerar hipótesis, en las que unas fuerzas se llevan al límite absoluto y las otras al relativo al mismo tiempo.

Se desprecian las fuerzas de inercia que representan las aceleraciones de rotación y traslación del conjunto del eje montado, aunque no las fuerzas de inercia centrífugas y oscilantes de los movimientos relativos de las masas giratorias y oscilantes. Tenidas en cuenta o despreciadas las fuerzas de inercia del conjunto del eje montado, el total de fuerzas aplicadas y de inercia forman un sistema de fuerzas en equilibrio cuyas condiciones permiten, una vez fijados convenientemente cada serie de valores extremos de las acciones, determinar las restantes, consideradas como reacciones que las equilibran.

Por ser los esfuerzos y momentos en cada sección funciones lineales de las acciones aplicadas, los efectos de estas acciones resultan superponibles y pueden ser considerados aisladamente o por grupos sencillos, que luego se suman, teniendo las siguientes precauciones:

1.^a Que las acciones parciales admitidas no sean incompatibles entre sí, lo cual puede ocurrir, o bien porque sea materialmente imposible que se realicen al mismo tiempo por producirse para posiciones o circunstancias incompatibles, o bien porque la suma de las acciones que resultan en un punto determinado sea superior al límite admitido para esta acción (caso de rozamientos, por ejemplo).

2.^a Para cada sección hay que considerar no solamente las acciones que dan los mayores valores absolutos de los esfuerzos producidos (momentos o fuerzas) en dicha sección, sino que es preciso tener en cuenta el signo de estos esfuerzos para obtener las acciones que den el máximo valor para cada sentido o signo.

Cargas y sobrecargas dinámicas verticales en manguetas (P_1 y P_2), y esfuerzos dinámicos transversales (T) entre rueda y carril.

Se distinguen dos casos, según la clase de los muelles de suspensión: el primero, para los vehículos acondicionados con muelles en hélice para los cuales el campo de variación de los referidos esfuerzos se supone definido por las siguientes relaciones: $\frac{P}{2} \leq (P_1$

ó $P_2) \leq +\frac{3}{2} P$ con $-\frac{2}{3} P \leq T \leq +\frac{2}{3} P$, y otro caso, el de vehículos no acondicionados con muelles en hélice, para los que el campo de variación ad-

medido está definido por las relaciones $0 \leq (P_1 \text{ ó } P_2) \leq +2P$ y $-P \leq T \leq +P$, en el primer caso, la variación de carga en la mangueta sobre el peso estático es de la mitad de dicho peso en más o en menos, y el esfuerzo transversal, T , en uno u otro sentido puede llegar a valer los dos tercios de la carga vertical estática. En el segundo caso, la variación de las cargas verticales y transversales puede alcanzar, en los dos sentidos, el valor de la carga vertical estática.

Puntos de aplicación de las fuerzas y momentos. Las fuerzas verticales y horizontales en la mangueta se suponen reducidos a una fuerza actuando en el centro de la misma, y las fuerzas y momentos que la rueda transmite al eje a través del calaje de cubo y rueda se suponen actuando en la sección media de la zona de calaje, por lo que en dicha sección habrá dos momentos: uno antes y otro después de las acciones transmitidas al eje por el cubo de la rueda.

La reacción transversal máxima entre rueda y carril T , se supone que actúa íntegra sobre la rueda más cargada verticalmente (o sea, la rueda designada con el número 2).

Reacciones longitudinales entre rueda y carril. — Se admite que pueden variar entre 0 y $\varphi P'$, siendo P' la carga estática sobre el carril, y φ , el coeficiente máximo de rozamiento entre rueda y carril, que se supone es de 0,3.

Reacciones verticales entre rueda y carril. — No se tienen en cuenta las fuerzas de inercia debidas a traslaciones y oscilaciones del conjunto del eje montado, cuyos efectos se consideran incluidos en las acciones verticales dinámicas supuestas anteriormente; por ello, las reacciones del carril junto con las restantes fuerzas aplicadas al eje montado forman un sistema en equilibrio. Las condiciones de este equilibrio permiten deducir las reacciones verticales de los carriles si se suponen conocidas las restantes fuerzas aplicadas.

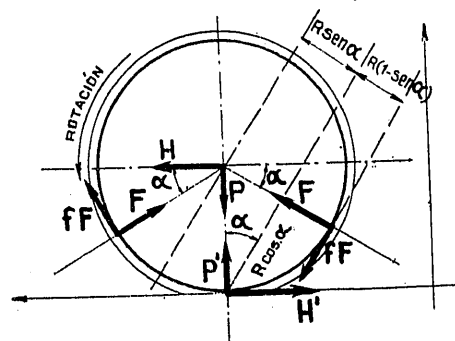
Reacciones producidas por el esfuerzo motor. — Cuando existen ruedas acopladas hay una indeterminación respecto al esfuerzo transmitido por las bielas de acoplamiento, ya que este esfuerzo está afectado por los huelgos del mecanismo, por las deformaciones de la propia biela y las que resultan de las flexiones y torsiones de ejes, manivelas y ruedas.

En el caso frecuente de dos manivelas motoras en ángulo recto, se consideran para el cálculo de los esfuerzos motores y de inercia las posiciones en que una manivela está en punto muerto y la otra está vertical o a media carrera. No se puede asegurar que para estas hipótesis se producen los máximos esfuerzos en todas las secciones, pero en cambio disminuye la indeterminación de los esfuerzos transmitidos por las bielas de acoplamiento que pueden ser determinados haciendo hipótesis sobre las reacciones longitudinales entre rueda y carril, que, como hemos indicado, han

de ser las extremas. En el caso de motores eléctricos apoyados en el eje, es preciso tener en cuenta las reacciones estáticas y motoras de las suspensiones.

Fuerzas de inercia. — A grandes velocidades es preciso contar con las fuerzas centrífugas de cada masa en el movimiento relativo rotatorio, así como las fuerzas de inercia de las masas de movimiento relativo alternativo. Estas fuerzas se deben considerar a la vez que las acciones motoras, ya que producen acciones horizontales y pares de torsión cuyo conjunto ha de ser equilibrado por las reacciones longitudinales de los carriles que supondremos tendrán valores extremos. En efecto, para obviar la indeterminación del esfuerzo transmitido por las bielas de acoplamiento, se recurre a considerar conocidas las reacciones horizontales en el carril (que se suponen extremas), con lo que las condiciones de equilibrio nos permiten deducir las reacciones de acoplamiento correspondientes.

No se consideran para el cálculo de los ejes motores los esfuerzos de frenado que habría que considerar a la vez que los motores y de inercia, ya que influyen en las reacciones longitudinales del carril que suponemos llevadas al límite. Por otra parte, en el caso raro (alarma) de haber simultaneidad de esfuerzo motor y frenado, las tensiones producidas no tienen el carácter de alternativas o repetidas a las que



FUERZAS EN FRENADO

Figura 5.^a

podamos aplicar el coeficiente de fatiga, como se hace para las restantes.

Esfuerzo de frenado. — Las acciones tangenciales a la rueda producidas en el contacto de la zapata (fF) y en el contacto del carril (H') durante el frenado, requieren para el equilibrio de la rueda la acción horizontal, H , en la mangueta (fig. 5.^a) (fuerza que actúa en la deceleración de la caja del vehículo).

Supuesto que el límite de la fuerza H' sea $\varphi P'$, se determinan por equilibrio de la rueda los valores correspondientes de fF y H .

Momentos de torsión. — Las fuerzas, que dan momentos axiales respecto a la normal a una sección

del eje, no cortan a esta normal; por ello, en ejes rectos no producen torsiones las reacciones en manguetas ni las reacciones verticales y transversales de carril sobre eje montado. Son fuerzas torsoras las acciones tangenciales de zapata sobre rueda y las longitudinales de carril sobre rueda. En las ruedas acopladas hay también las fuerzas transmitidas por las bielas de acoplamiento, y en las ruedas motoras hay que añadir los esfuerzos motores transmitidos por bielas, engranajes o discos de transmisión. A grandes velocidades hay que considerar las fuerzas de inercia de las piezas de movimiento alternativo, las cuales no cortan al eje. Es invariable el momento de torsión en un trozo recto del eje en el que no haya aplicadas fuerzas torsoras (ya que no varían ni el sistema de fuerzas ni el eje de momentos). Si se desprecia la inercia rotatoria del eje montado, la suma de los momentos torsores aplicados será nula.

En el caso de ejes portadores no hay más fuerzas torsoras que las aplicadas tangencialmente a la rueda por zapata y carril. El máximo momento torsor es el producido por el rozamiento del carril sobre la rueda al patinar ésta por cualquier circunstancia de vía o movimiento, y vale $\varphi P' R$, dando a φ el máximo valor admitido ($\varphi = 0,3$).

Si este patinaje se produce a la vez que el frenado, el momento torsor producido por la zapata no puede ser del mismo sentido que el producido por el carril de la misma rueda, pues la suma de los dos momentos debería ser equilibrada por otra suma igual y contraria en la otra rueda, y para ello sería preciso que la zapata de la otra rueda diese momento de sentido acelerador o contrario.

En el caso de ejes motores no acoplados, el par motor, que será menor de $2 \varphi P' R$ (para no producir patinaje constante), ha de ser equilibrado por los pares producidos en las dos ruedas. Lo más desfavorable será que esté equilibrado por una rueda al máximo que ella puede equilibrar, o sea, con un momento torsor de $\varphi P' R$, que será también el máximo momento torsor soportado por el eje.

En el caso de ejes motores y acoplados, hay indeterminación en cuanto a los esfuerzos transmitidos por las bielas de acoplamiento y las reacciones horizontales de los carriles. Un estudio de la posibilidad de momentos torsores en una y otra rueda, análogo al indicado para ruedas portadoras, se complica por la indeterminación de las fuerzas posibles en una y otra rueda. Sin embargo, se supone que el máximo par de torsión transmisible a través del eje motor es igual al máximo par motor C_m aplicado a ruedas o ejes motores por el mecanismo motor. En el caso de ejes acoplados se considera como máximo momento de torsión a resistir por el eje al mayor de los valores $\varphi P' R$ ó $C_m - \varphi P' R$.

Presiones máximas producidas en el calaje.

Si sobre un cilindro (fig. 6.^a) hueco de diámetro exterior d_1 , e interior d_3 , se coloca un zuncho de diámetro exterior d_2 , e interior $d_1 (1 - \beta)$, se produce una presión unitaria de zunchado normal al eje de cilindro cuyo valor teórico medio es:

$$t_{zn} = \frac{E \beta}{2} \times \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_3^2} \left(1 - \frac{d_3^2}{d_1^2} \right).$$

El valor de β se establece de modo que el máximo momento de torsión transmitido por el cubo al eje esté resistido por las reacciones de rozamiento entre

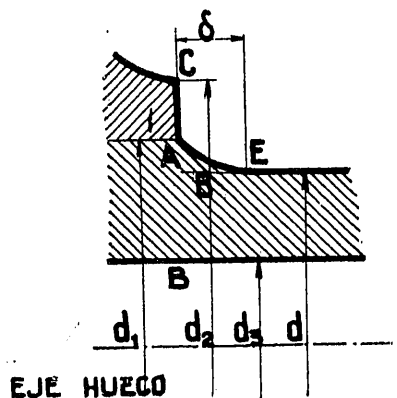


Figura 6.^a

cubo y eje con un coeficiente de rozamiento de 0.1 y un coeficiente de seguridad $S_0 = 3$. A la vez se produce una compresión unitaria tangencial a la circunferencia de la sección, que vale en la superficie exterior:

$$t_{zt} = \frac{E \beta}{2} \times \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_3^2} \left(1 + \frac{d_3^2}{d_1^2} \right),$$

y en la superficie interior:

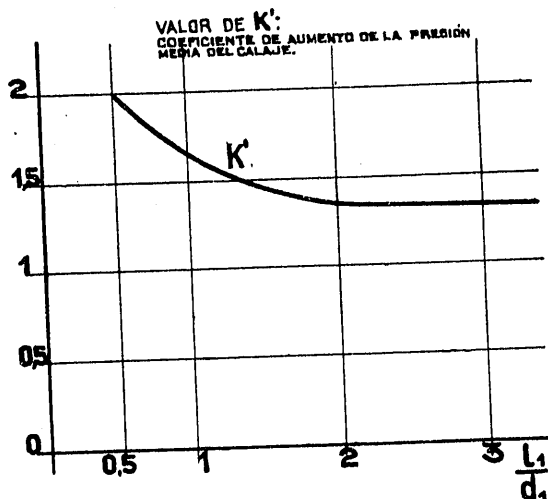
$$t'_{zt} = E \beta \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_3^2}.$$

Si el diámetro exterior del zuncho es variable, se puede dividir en trozos que se suponen para el cálculo de diámetro constante y sumar. Los anteriores valores se convierten en el caso de cilindro macizo ($d_3 = 0$), en:

$$t_z = \frac{E \beta}{2} \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right);$$

tanto para la compresión unitaria radial como para la tangencial. Este valor crece con d_2 , o sea, al aumentar la rigidez del zuncho. Estos valores son valores me-

dios que no son iguales en todos los puntos, ya que se ha comprobado que las presiones de zunchado a lo largo de la zona de calaje son mayores en los extremos y menores en la parte central. Esta desigual repartición de la presión de zunchado se ha tratado de disminuir constructivamente disminuyendo el valor de d_2 en los extremos del cubo (en mayor canti-


 Figura 7.^a

dad en el extremo más castigado por las demás tensiones). Para tener en cuenta el aumento de la presión en los extremos del calaje sobre la que da la fórmula teórica media, se le aplica un coeficiente de aumento K' , cuyo valor se encuentra en las ordenadas de la figura 7.^a, en la que las abscisas son las relaciones $\frac{l_1}{d_1}$ entre la longitud y diámetro del calaje.

Composición de flexiones de ejes normales y torsiones.

En una sección puede haber un momento de flexión de eje horizontal M_v (producido por fuerzas paralelas al plano vertical que contiene al eje); otro momento de flexión de eje vertical, M_h (producido por fuerzas paralelas al plano horizontal que contiene al eje), y un momento de torsión, M_t , de las fuerzas que no cortan al eje.

Para cada carga o sobrecarga es preciso calcular separadamente los momentos producidos por fuerzas verticales (de eje de momento horizontal) para sumarlos algebraicamente y obtener el momento, M_v , total, y análogamente determinar el momento total, M_h , producido por fuerzas horizontales.

Tratándose de secciones circulares, se pueden sustituir los momentos flectores de eje horizontal y

vertical por su momento resultante M_{hv} , que es la suma geométrica de dichos momentos:

$$M_{hv} = \sqrt{M_h^2 + M_v^2}.$$

El momento de torsión M_t , unido al de flexión M_{hv} , produce en la sección circular una tensión cortante máxima igual a la que produciría un momento flector ficticio, equivalente a la suma geométrica de los momentos de flexión y torsión, y como es la tensión cortante máxima la que se considera para estos materiales como determinante de la fluencia y rotura, de aquí que para el cálculo de estos ejes se considere el momento equivalente de flexiones y torsiones

$$M_E = \sqrt{M_{hv}^2 + M_t^2} = \sqrt{M_h^2 + M_v^2 + M_t^2}.$$

Con el valor de este momento M_E y con el coeficiente de aumento de tensiones por cambio de sección, se tiene la tensión de fatiga total equivalente

$$t_e = K \frac{32 M_E}{\pi d^3}$$

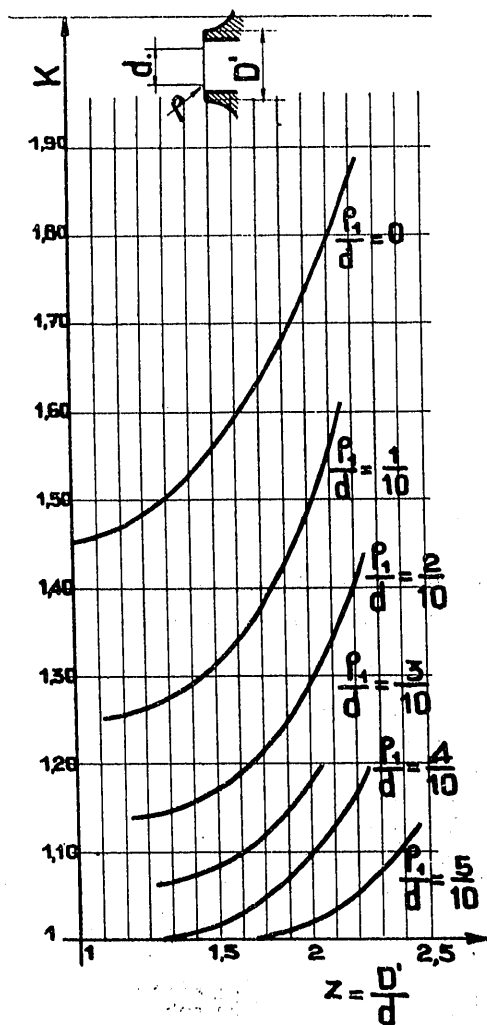
en una sección de diámetro d .

Cálculo de las tensiones en las secciones donde hay cambio rápido de sección.

El eje está formado por trozos cilíndricos de distinto diámetro, unidos entre sí por superficies de acuerdo que, para evitar longitudes exageradas, hay que reducir, a pesar del aumento de tensiones que estos cambios rápidos de sección producen. Las tensiones que dan las fórmulas corrientes de piezas prismáticas en estos puntos deben ser multiplicadas por coeficientes K de aumento, que dependen de la forma y dimensiones de la sección longitudinal del eje en la zona del acuerdo.

Estos coeficientes K se deducen de las curvas de la figura 8.^a, en las que se debe entrar con los valores de d , D' y ρ_1 , los cuales en los distintos casos son los siguientes: d , diámetro de la sección menor acordada; D' , diámetro de la sección mayor acordada, si ésta no es la de calaje, y diámetro exterior del cubo, si se trata de la sección de calaje. Respecto al valor que se debe tomar para ρ_1 , para entrar en dicha figura 8.^a, hay que distinguir distintos casos: 1.º Cuando en la sección longitudinal el acuerdo se realiza por un cuarto de circunferencia ($\rho = \epsilon = \delta$), se tomará para valor de ρ_1 el radio ρ del acuerdo. 2.º Cuando el acuerdo se realiza con dos arcos de círculo tangentes entre sí, de radios ρ y ρ' ($\rho > \rho'$) (fig. 3.^a) y $\rho < 2\delta$, se tomará para ρ_1 el valor de δ . 3.º En el caso anterior de dos

radios, y para $\rho > 2\delta$, se tomará para ρ_1 el valor de ρ' (radio menor). Cuando la sección mayor acordada es la sección de calaje, hay que tener en cuenta que, a los efectos de los cambios de sección, se debe considerar como formando una pieza cubo y eje. Por ello se considera como diámetro D' , de la sección acordada,



COEFICIENTE K DE AUMENTO DE LA TENSIÓN EN LOS CAMBIOS RÁPIDOS DE SECCIÓN.

Figura 8.^a

el diámetro exterior del cubo d_2 , y se tiene en cuenta el ángulo que forma el arco único del acuerdo con la superficie normal al eje del final del cubo. En este caso de acuerdo de la sección de calaje, se distinguen dos casos, a saber (fig. 4.^a): a) Cuando $\delta < 3\epsilon$, se tomará para valor de ρ_1 el de δ ; y b) Si $\delta > 3\epsilon$, se tomará para ρ_1 el valor cero, ya que el encuentro entre final de cubo y acuerdo es casi en ángulo recto.

Combinación de las tensiones variables de flexión y torsión con una tensión permanente de zunchado.

En la sección límite del calaje hay una disminución de resistencia a flexiones y torsiones respecto a la que dan las fórmulas corrientes, por dos causas: una, por el efecto de cambio de sección, y otra, por el efecto de zunchado.

El efecto del cambio de sección (cuyo valor máximo se obtiene con el coeficiente K antes estudiado) no es igual en toda la zona del acuerdo, siendo mayor en la parte E (fig. 4.^a), de menor sección que en la sección A del calaje, tanto más cuanto mayor es el ángulo CAB de fin de zuncho con principio de acuerdo. A su vez, el efecto de la tensión de zunchado en A depende también de dicho ángulo. Los máximos efectos de cambio de sección y zunchado sólo se realizan en A cuando el ángulo CAB es próximo al recto.

Ante la dificultad de encontrar un procedimiento de cálculo que atienda a todas estas circunstancias, se consideran dos casos extremos:

El primero es cuando $\delta < 3\epsilon$, en cuyo caso se prescinde de la tensión de zunchado y se considera, en cambio, el mayor efecto del cambio de sección. En este caso se emplea un coeficiente de seguridad para la sección de calaje S_3 , que vale 1,4 para acero al carbono y 2,5 para aceros especiales duros (coeficiente a aplicar a la carga de rotura a tensiones alternativas, L). Se emplearán coeficientes de seguridad intermedios para aceros intermedios.

El segundo caso es aquel en que $\delta > 3\epsilon$, en cuyo caso se tienen en cuenta las tensiones máximas de zunchado t_z y la equivalente a la combinación de flexiones y torsiones t_e en las que se han tenido en cuenta los coeficientes de aumento K y K' . Se considera que la combinación de ambas tensiones dé lugar a una tensión de fatiga equivalente dada por la fórmula

$$t_{ez} = \frac{1}{2} [t_e + t_z + \sqrt{t_e^2 + t_z^2}]$$

para el caso de ejes macizos, en los que las presiones normales y tangenciales de zunchado son iguales.

En el caso de ejes huecos, en que las compresiones normales t_{zn} y las tangenciales t_{zt} de zunchado no son iguales, la fórmula es

$$t_{ez} = \frac{1}{2} [t_e - t_{zn} + \sqrt{t_e^2 + t_{zn}^2}] + t_{zt}$$

En este caso, al tenerse en cuenta al máximo los efectos de cambio de sección y zunchado, se emplea un coeficiente de seguridad S_2 menor, que vale 1,1, para el acero al carbono, y 1,9, para acero especial duro.

Coefficientes de seguridad. — Para las zonas de calaje ya hemos indicado los coeficientes que se emplean: S_2 ó S_3 , según se tenga o no en cuenta la tensión de zunchado. Los coeficientes de seguridad S_2 y S_3 son variables, según se trate de aceros al carbono o aceros especiales; valen, en el primer caso, $S_2 = 1,1$ y $S_3 = 1,4$, y para aceros especiales con carga de rotura próxima a los 100 Kg./cm.², los valores son $S_2 = 1,9$ y $S_3 = 2,5$, respectivamente. Para aceros especiales con R , comprendidos entre 70 y 100 Kg./mm.², el coeficiente de seguridad se obtendrá por interpolación lineal.

Para las manguetas exteriores y centro del eje, se emplean dos coeficientes de seguridad $S_1 = S_4 = 2,5$. Para las manguetas interiores, en su acuerdo con la zona central del eje, se emplea el coeficiente de seguridad S_3 , definido anteriormente. Todos estos coeficientes S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , se aplican a la carga L de rotura por fatiga a tensiones alternativas.

Para el cálculo de la presión de calaje necesaria para resistir las torsiones en el calaje, ya dijimos que se empleaba el coeficiente de seguridad $S_5 = 3$, con un coeficiente de rozamiento $f' = 0,1$, y, por último, para el cálculo del cubo de rueda (no sometido a tensiones alternativas), se emplea el coeficiente de seguridad $S_6 = 1,1$, aplicable a la tensión límite de elasticidad proporcional L' .

FÓRMULAS Y PROCEDIMIENTOS RESULTANTES DE LAS HIPÓTESIS DE CÁLCULO

Ejes portadores con manguetas exteriores.

Cargas y sobrecargas verticales y transversales. — Considerando primeramente el grupo de acciones y reacciones verticales y transversales P_1 , P_2 , T , ψ_1 y ψ_2 , las condiciones de equilibrio nos dan:

$$\psi_1 = P_1 - (P_2 - P_1) \frac{D+x}{l} - T \frac{R}{l};$$

$$\psi_2 = P_2 + (P_2 - P_1) \frac{D+x}{l} + T \frac{R}{l}.$$

Los momentos flectores en los puntos de aplicación de las fuerzas (considerando como positivos los momentos de las fuerzas a la izquierda de una sección que producen giros en el sentido de las agujas de un reloj), son:

$$M_1 = -P_1 D; \quad M'_1 = -P_1 D - \psi_1 x;$$

$$M_2 = -P_2 D; \quad M'_2 = -P_2 D - \psi_2 x - T R;$$

$$M_3 = -\frac{(P_1 + P_2)(D+x) + T R}{2}.$$

PRIMER CASO. Vehículos sin muelles de suspensión en hélice. — Para el caso normal de ser x negativo, la hipótesis de cargas que dentro de los límites impuestos

produce los mayores momentos M_2 , M'_2 y M_3 , es la de los valores

$$P_1 = P; \quad P_2 = 2P; \quad T = +P,$$

que sustituidos en las fórmulas anteriores dan:

$$M_2 (\text{máximo}) = 2PD; \quad M'_2 (\text{máximo}) =$$

$$= -P \left[2(D+x) + \frac{x}{l}(D+x+R) + R \right]$$

$$\text{y } M_3 (\text{máximo}) = -P \frac{R+3(D+x)}{2}.$$

En el caso raro de ser x positivo, resulta el mayor valor de M'_2 para la hipótesis

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 2P \quad \text{y} \quad T = +P,$$

y el mayor valor de M_3 para la hipótesis

$$P_1 = P; \quad P_2 = 2P; \quad T = +P.$$

SEGUNDO CASO. Vehículos con muelles de suspensión en hélice. — En todo caso, la hipótesis que produce los mayores momentos es:

$$P_1 = \frac{P}{2}; \quad P_2 = \frac{3}{2}P; \quad T = \frac{2}{3}P;$$

que da, sustituyendo,

$$M'_2 (\text{máximo}) = -\frac{P}{6} \left\{ 9(D+x) + \right.$$

$$\left. + 4R + \frac{x}{l} [6(D+x) + 4R] \right\}$$

$$\text{y } M_3 (\text{máximo}) = \frac{P}{6} [6(D+x) + 2R].$$

Los momentos de torsión máximos son, según hemos explicado, $\varphi P' R$ ($\varphi = 0,3$).

Esfuerzos de frenado. — Supuesto que en cada rueda se equilibran las acciones de caja sobre mangueta H y P (fig. 5.^a), las de zapata sobre rueda F y Ff y las de carril sobre rueda H' y P' , al tomar momentos respecto al apoyo de rueda en carril, nos resulta, para el caso de una sola zapata, $H = Ff(1 - \sin \alpha) - F \cos \alpha$, y $H = 2fF(1 - \sin \alpha)$, para el caso de dos zapatas simétricas (fórmulas que sólo son válidas para el caso de que no haya patinaje de rueda y carril, o sea que es preciso que $P'\varphi \geq Ff$, con una sola zapata, y $P'\varphi \geq 2fF$, con dos zapatas). Si consideramos $\alpha = 0$ y $\varphi = f$, en el caso extremo de iniciarse el patinaje, resulta $H = P'(\varphi - 1)$, con una sola zapata, y $H = \varphi P'$, si hay dos zapatas, que para el valor límite $\varphi = 0,3$ dan $H = 0,7 P'$ y $H = 0,3 P'$, respectivamente.

La fuerza horizontal H en la mangueta y sus reacciones en la rueda dan momentos flectores de

eje vertical en el centro del calaje $M_F = HD$, si consideramos sólo las fuerzas en mangueta, y $M'_F = H(D+x)$, si consideramos, además, las fuerzas horizontales en la rueda que equilibran a las de la mangueta.

Para el cálculo del calaje necesario se emplearán las fórmulas de la presión media de calaje que, multiplicada por $f' \pi d_1 l_1$, han de igualar a la torsión máxima, que es $\varphi P' R$, multiplicada por el coeficiente de seguridad $S_0 = 3$.

Ejes portadores con manguetas interiores.

Por consideraciones análogas a las anteriores, resultan las fórmulas siguientes para estos ejes:

$$\psi_1 = P_1 - (P_2 - P_1) \frac{x-D}{l} - T \frac{R}{l};$$

$$\psi_2 = P_2 + (P_2 - P_1) \frac{x-D}{l} + T \frac{R}{l};$$

$$M_4 = -\psi_1 x; \quad M'_4 = -(x-D) \psi_1;$$

$$M_5 = -\psi_2 x - TR; \quad M'_5 = -(x-D) \psi_2 - TR,$$

$$\text{y } M_3 = (P_1 + P_2) \frac{D-x}{2} - T \frac{R}{2}.$$

Se supone suspensión sin hélices, como es corriente.

Para el caso normal de $x > 0$ y $D-x > 0$, la hipótesis de carga que hace mayores los valores de M_3 y M'_5 es:

$$P_1 = P; \quad P_2 = 2P; \quad T = -P;$$

y resultan:

$$M_3 (\text{máximo}) = P \frac{3(D-x) + R}{2},$$

$$\text{y } M'_5 (\text{máximo}) = P \left[(D-x) \left(2 - \frac{D-x+R}{l} \right) + R \right].$$

El valor M_5 es máximo para la hipótesis

$$P_1 = P; \quad P_2 = 2P \quad \text{y} \quad T = +P.$$

y vale:

$$M_5 (\text{máximo}) = P \left[-x \left(2 - \frac{D-x+R}{l} \right) - R \right].$$

(En el caso raro de ser $(D-x) < 0$, se hacen máximos a M_5 y M'_5 para la hipótesis

$$P_1 = 0; \quad P_2 = 2P; \quad T = +P,$$

y M_3 es máximo para la hipótesis

$$P_1 = P; \quad P_2 = 2P; \quad T = +P).$$

Los esfuerzos de torsión y calaje son iguales que en el caso de manguetas exteriores.

Los esfuerzos debidos al frenado también son iguales que en el caso de manguetas exteriores, o sea:

$H = F f (1 - \sin \alpha) - F \cos \alpha$, para el caso de una sola zapata, y $H = 2 F f (1 - \sin \alpha)$, para el caso de dos zapatas con los mismos máximos valores de H respectivos, o sea: $H = -0,7 P'$ y $H = 0,3 P'$.

El momento de eje vertical producido por el frenado en la sección media del calaje vale $H \cdot x$, y el producido en el centro de la mangueta interior vale $H(x-D)$. Para obtener el momento en una sección intermedia, se interpola linealmente.

Ejes motores y acoplados.

Existe una complejidad de esfuerzos, que es preciso analizar por grupos, cuidando que las hipótesis de los distintos grupos no sean incompatibles entre sí y sean, con su signo, las que produzcan en cada sección las máximas tensiones totales, y no solamente las parciales.

Deben considerarse formando un grupo las acciones que producen reacciones horizontales en el carril, ya que estas reacciones no son ilimitadas como las verticales, sino que están comprendidas entre límites definidos por el rozamiento. Resultarían incompatibles las hipótesis de acciones cuyas reacciones en el carril, sumadas, pasasen del límite admitido, y, por diferencias de signo, podría ocurrir que hipótesis parciales extremas no dieran hipótesis extremas en la suma.

Para cada grupo de acciones hay que considerar separadamente los momentos de eje vertical y horizontal para sumarlos, algébricamente, con los de los otros grupos. Por ello se consideran separadamente las componentes horizontales y verticales de las distintas acciones.

Es preciso considerar las dos posiciones de la manivela, vertical superior e inferior, para elegir para cada sección la que dé momentos del mismo signo que las restantes acciones consideradas en otros grupos.

El grupo de acciones formado por las cargas y sobrecargas verticales en mangueta y transversales en rueda, se calcula igual y con las mismas fórmulas que en el caso de ejes portadores. Únicamente hay que tener en cuenta, en el caso de ejes acodados, que estas fuerzas dan también momentos de torsión en los codos por la excentricidad de los mismos. Las fuerzas de frenado también se calculan como en el caso de ejes portadores, con las mismas fórmulas y observación para las secciones excéntricas de ejes acodados. En el caso de motores eléctricos suspendidos en el eje y caja, hay que considerar, además, las reacciones estáticas y motoras de las sustentaciones del motor.

No se consideran, a la vez, los esfuerzos de frenado con los motores.

Los esfuerzos de inercia de masas giratorias y alternativas se considerarán en sus respectivos planos y se descompondrán en las direcciones vertical y horizontal, así como las fuerzas motoras transmitidas por bielas o engranajes. Ya dijimos que la indeterminación

de los esfuerzos de las bielas de acoplamiento se eludía considerando posiciones especiales de las mismas y combinaciones de reacciones longitudinales del carril.

Se reúnen en un grupo todas las acciones y reacciones horizontales longitudinales, o sean las componentes horizontales de las fuerzas de inercia y del esfuerzo motor en bielas o engranajes y las reacciones longitudinales de los carriles, estableciendo tres relaciones de equilibrio que resultan de igualar a cero la suma de las acciones y reacciones longitudinales, su momento respecto a un eje vertical y su momento respecto a la recta del propio eje. Estas tres relaciones nos permitirán, para cada hipótesis de reacciones del carril, determinar las reacciones longitudinales H_1 y H_2 que en cada mangueta produce la caja y la reacción longitudinal de la biela de acoplamiento que no está en punto muerto.

A estos esfuerzos horizontales habría que añadir los producidos por el frenado, pero ya dijimos que no se tienen en cuenta, a la vez que los motores.

Conocidas todas las acciones y reacciones horizontales longitudinales, se pueden determinar, para cada sección, los momentos totales M_h (de eje vertical) producidos por ellas.

Las acciones y reacciones verticales producidas por el esfuerzo motor y fuerzas de inercia se pueden calcular en grupo aparte, determinando las reacciones verticales complementarias de los carriles que las equilibran con las dos ecuaciones que resultan de igualar a cero la suma algebraica y el momento respecto a un eje horizontal normal al eje.

Los momentos flectores que resultan de estas fuerzas (momentos de eje horizontal) se sumarán a los producidos por las cargas y sobrecargas dinámicas verticales y transversales (ya estudiados), para llegar a los momentos máximos totales, de eje horizontal M_v , producidos en cada sección.

Insistimos en que es preciso, para cada uno de estos dos grupos, elegir las hipótesis que den los mayores esfuerzos del mismo signo en cada sección.

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE FORMAS, DIMENSIONES Y MATERIALES

El diámetro de la sección de calaje está comprendido, normalmente, entre 1,15 y 1,20 del valor de la sección próxima acordada, sin que deba ser inferior a 1,10.

Debe evitarse el ángulo vivo entre la zona de calaje y siguiente del eje, debiendo empezar el acuerdo de secciones inmediatamente después del calaje, ya que,

a los efectos del cambio de sección, el cubo forma parte del eje.

Este acuerdo entre la sección de calaje y la reducida siguiente, se debe hacer con un cuarto de circunferencia, si la relación de diámetros es mayor de 1,15. Si esta relación es menor, el acuerdo puede hacerse con un radio mayor, pero con la condición de que $\delta < 3\varepsilon$ (δ , longitud del acuerdo; ε , diferencia de los radios de las secciones acordadas).

Para disminuir la presión de calaje en los extremos del cubo, se hace éste menos rígido en dichos extremos, especialmente en aquel extremo que está sometido a mayores momentos de flexión y torsión. Para ello, lo más práctico es disminuir el espesor del zuncho hacia los extremos, limitando el cubo con curvas cóncavas hacia fuera. Esto es más recomendable que el empleo de ranuras que debilitan la rigidez del cubo en los extremos.

La longitud l_2 de las manguetas debe cumplir con la condición de no recalentamiento, que para cojinetes

ordinarios es $K > \frac{PV}{2l_2R}$, en la que K es un coeficiente comprendido entre 1,5 y 2,5; l_2 , longitud del cojinete, en milímetros; V , velocidad máxima, en kilómetros por hora; R , radio de la rueda, en milímetros, y P , carga estática sobre el cojinete, en kilogramos. Cuando se trata de cajas de rodillos, la forma y dimensiones de mangueta dependen de las características del rodamiento.

En ejes huecos debe evitarse hacer los aligeramientos en la zona de calaje.

En todos los cálculos se supone la sección calculada con el máximo desgaste, y por ello hay que incrementar las secciones obtenidas en el desgaste previsible.

En cuanto al acero empleado para ejes, es norma corriente usar aceros al carbono, recocidos o templados y revenidos.

Las características de dos tipos empleados, en kilogramo por milímetro cuadrado, han sido: para el recocido, $R = 56$, $L = 27$ y $L' = 36$, y para el templeado y revenido, $R = 60$, $L = 28$ y $L' = 38$ Kg./mm.².

Los aceros especiales de alta resistencia son muy sensibles para cargas alternativas, a los efectos de cambio rápido de sección, que es justamente el caso de los ejes, y por ello no se suelen emplear. Sería preciso emplear con ellos coeficientes de seguridad mayores, como ya hemos indicado, no obteniendo disminución de dimensiones con su empleo. Combinando el aumento de resistencia con el del coeficiente de seguridad, las menores dimensiones resultan, para aceros especiales, de $R = 80$ Kg./mm.².