

MENUDENCIAS ELECTROTECNICAS ⁽¹⁾

II. SOBRE EL VECTOR DE POYNTING

Por PEDRO JOSE LUCIA, Ingeniero de Caminos.

Continúa en este segundo artículo el trabajo iniciado en el número anterior bajo el mismo epígrafe, en el que se apreciaba, igual que en el publicado, el profundo conocimiento que el autor tiene de la materia en la que muchos de nuestros lectores están interesados.

Corriente de energía en el campo electromagnético.

Dentro de un campo electromagnético existen, en el caso más general, transformaciones energéticas. La energía eléctrica y la magnética pueden variar a lo largo del tiempo; hay una conversión de energía químicotérmica, en sentido positivo o negativo, y una disipación térmica, debida al efecto Joule.

Por cm^3 , la energía del campo eléctrico vale:

$$w_e = \frac{1}{2} E D \quad (\text{julios/cm}^3) \quad [1]$$

siendo:

E = magnitud del vector *intensidad del campo eléctrico* en el punto considerado, en V/cm .

D = magnitud del vector *inducción eléctrica* en dicho punto, en coulombios/cm^2 .

Recordaremos que, entre los dos vectores $\vec{E}$ y $\vec{D}$, existe la relación

$$\vec{D} = \frac{10^9}{4\pi c^2} \epsilon \vec{E}; \quad [2]$$

c = velocidad de la luz en el vacío $\approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$.

ϵ = constante dieléctrica relativa del medio considerado; por su propia definición es $\epsilon = 1$ en el vacío; en el aire, ϵ es también, prácticamente, la unidad.

Análogamente, la energía por cm^3 , del campo magnético, es:

$$w_m = \frac{1}{2} H B \quad (\text{julios/cm}^3) \quad [3]$$

H = magnitud del vector *intensidad del campo magnético*, en A/cm .

B = magnitud del vector *inducción magnética*, en Vs/cm^2 .

Los dos vectores $\vec{H}$ y $\vec{B}$ están ligados por la relación

$$\vec{B} = 4\pi \cdot 10^{-9} \mu \vec{H}; \quad [4]$$

μ = permeabilidad relativa del medio; $\mu = 1$, en el vacío, y también la unidad, para todos los efectos prácticos, en el aire.

En cuanto a la energía químicotérmica, la que se transforma por cm^3 y por segundo, o sea la *potencia* convertida por cm^3 , es:

$$\psi = \rho G^2 - E^0 G \cos(E^0, G) \quad (\text{W/cm}^3) \quad [5]$$

ρ = resistibilidad del medio, en ohmios $\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$.

G = magnitud del vector *densidad de corriente*, en A/cm^2 .

E^0 = magnitud del vector *intensidad de campo impresa*, en V/cm .

En el segundo miembro de la igualdad [5], el primer término corresponde al proceso irreversible de transformación de la potencia en calor, por efecto Joule; el segundo término, que puede ser positivo o negativo, abarca los procesos químicos o térmicos reversibles; por ejemplo, en un acumulador $E^0 G \cos(E^0, G)$ es negativo durante la carga y positivo durante la descarga.

Consideremos ahora una superficie cerrada en el campo electromagnético, y sea $\vec{df}$ un vector normal a ella en uno de sus puntos, dirigido hacia adentro, e igual al área elemental, en cm^2 .

En los tratados de electrodinámica clásica (1), se demuestra la propiedad fundamental siguiente:

$$\int_0 [\vec{E} \vec{H}] \vec{df} = \int_v \psi dv + \frac{\partial \left(\int_v w_e dv \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\int_v w_m dv \right)}{\partial t} \quad [6]$$

(1) Véase, p. ej., Johannes Fischer: *Einführung in die klassische Elektrodynamik*, 1936, págs. 127 y 128.

(1) Véase el preámbulo al primer artículo de esta serie.

Vamos a examinar la significación matemática y física de los varios términos de esta igualdad.

$[\vec{E} \vec{H}]$ (fig. 1.^a) es el producto vectorial de los dos vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$. Designaremos con la letra $\vec{S}$ a ese vector, llamado *de Poynting*:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (\text{W/cm.}^2) \quad [7]$$

La integral del primer miembro, que va extendida a toda una superficie cerrada, no es sino el *flujo de*

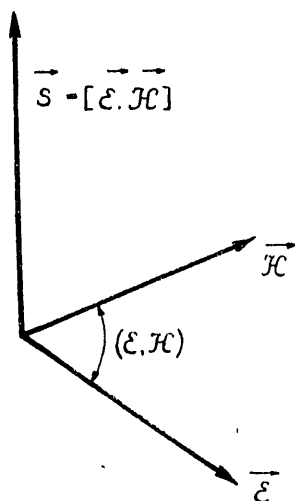


Figura 1.^a

dicho vector $\vec{S}$ a través de la misma, de fuera hacia adentro; pues el producto escalar

$$[\vec{E} \vec{H}] d\vec{f} = \vec{S} d\vec{f} = S df \cos(S, d\vec{f})$$

es la expresión analítica del flujo elemental.

Recuérdese que el vector $[\vec{E} \vec{H}]$, producto vectorial, es normal a $\vec{E}$ y a $\vec{H}$; su dirección es tal que, mirando hacia ella, para pasar del vector $\vec{E}$ al $\vec{H}$ hay que realizar un giro menor de 180° en el sentido de las agujas de un reloj; la magnitud de $[\vec{E} \vec{H}]$ es igual a $E H \sin(E, H)$.

Por el valor que antes hemos asignado a ψ , la primera integral del segundo miembro de [6] es la energía electromagnética convertida por segundo en energía quimicotérmica, dentro del volumen encerrado por la superficie estudiada. En cuanto a las integrales segunda y tercera, representan, evidentemente, el aumento por segundo, en el interior de ese volumen, de la energía eléctrica y la magnética.

Por el principio de conservación de la energía, es obvio que el flujo del primer miembro

$$\int_0 [\vec{E} \vec{H}] d\vec{f} = \int_0 \vec{S} d\vec{f} \quad (\text{W.}) \quad [8]$$

no puede ser sino la *cantidad total de energía electromagnética que entra por segundo en la superficie cerrada que se está estudiando*.

El vector de Poynting $\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]$, W/cm.², adquiere así la significación de *densidad de la corriente de energía electromagnética* en un punto del campo, medida en julios por segundo y por cm.², o sea en vatios por cm.².

Tenemos, pues, que representarnos el campo electromagnético, en general, como cursado todo él por corrientes de energía. Esta se traslada de unos puntos a otros, cambia de magnitud y de forma y se disipa, irreversiblemente, en aquellas partes del campo en las que ρ es distinto de cero y existe un vector $\vec{G}$, densidad de corriente eléctrica.

Es curioso seguir este deambular de la energía electromagnética en algunos casos particulares.

Condensador plano.

Empezaremos por el condensador plano, en régimen de carga o de descarga. Consideremos, primero, el caso sencillo de un condensador (fig. 2.^a), cuyas armaduras son dos círculos, de radio r cm., grande en comparación con el espesor e cm. del dieléctrico.

Sean $+Q$ y $-Q$, en coulombios, las cargas eléctricas de las armaduras en el instante t . Prescindiendo del efecto de los bordes (ya volveremos a hablar de él más adelante), el campo eléctrico en el interior del condensador es uniforme, con una intensidad $\vec{E}$ constante, normal a las armaduras y dirigida hacia abajo. Si llamamos D a la inducción eléctrica en el dieléct-

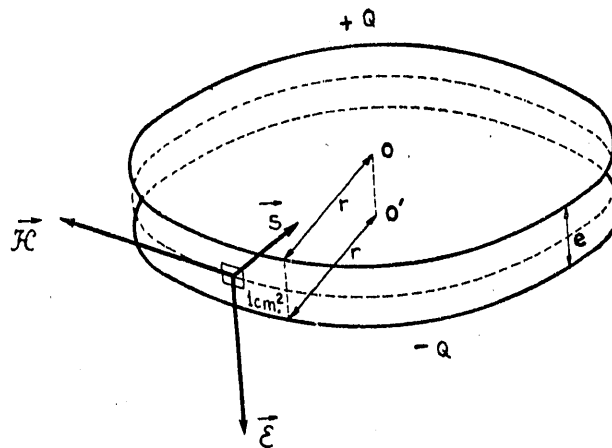


Figura 2.^a

trico del condensador, se tendrá, por la fórmula [2]:

$$E = \frac{4\pi c^2}{10^9 \epsilon} \cdot D \quad (\text{V/cm.}) \quad [9]$$

Por otra parte, la propiedad fundamental del vector $\vec{D}$

$$\int_0 \vec{D} d\vec{f} = \Sigma q \quad (\text{coulombios}) \quad [10]$$

nos da en este caso, calculando el flujo de inducción que sale por una superficie cerrada que envuelve la armadura positiva:

$$D \pi r^2 = Q. \quad [11]$$

Sustituyendo en [9] el valor de D deducido de [11], se encuentra:

$$E = \frac{4c^2}{10^9 \epsilon r^2} \cdot Q \quad (\text{V/cm.}) \quad [12]$$

La energía eléctrica por cm.^3 es, en este caso, la misma en todos los puntos del dieléctrico, y vale:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \cdot \frac{4c^2}{10^9 \epsilon r^2} \cdot Q \cdot \frac{Q}{\pi r^2} = \\ &= \frac{2c^2 Q^2}{10^9 \epsilon \pi r^4} \quad (\text{julios/cm.}^3) \quad [13] \end{aligned}$$

La energía eléctrica total almacenada, en el instante t , es, por tanto:

$$W_e = \pi r^2 e w_e = \frac{2c^2 e Q^2}{10^9 \epsilon r^2} \quad (\text{julios}) \quad [14]$$

A este mismo resultado hubiéramos llegado aplicando la conocida fórmula $\frac{1}{2} Q V$; pues V , diferencia de potencial entre las dos armaduras, vale, evidentemente:

$$E e = \frac{4c^2 e Q}{10^9 \epsilon r^2}.$$

Estudiemos ahora el campo magnético en el seno del condensador, cuando la carga de éste crece desde Q hasta $Q + dQ$, en el intervalo dt . Por simetría cilíndrica, las líneas de fuerza son circunferencias en planos normales al eje OO' , con sus centros en dicho eje. Veamos lo que vale $\vec{H}_x$, a la distancia radial X .

La primera ley fundamental del electromagnetis-

mo, cuando existen corrientes de desplazamiento, es:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \int_F \vec{G} d\vec{f} + \int_F \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{f}. \quad [15]$$

La integral de la izquierda es la circulación del vector $\vec{H}$ en un circuito cerrado s . La primera integral del segundo miembro es la corriente total de conducción que atraviesa una superficie F , cuyo contorno es la curva cerrada s . La segunda integral, que da las corrientes de desplazamiento, es el flujo del vector $\frac{d\vec{D}}{dt}$ a través de dicha superficie F . El sentido positivo de la circulación y el de los flujos de corriente se corresponden entre sí como el giro de un sacacorchos al avance del mismo.

En el caso que estamos estudiando, si s es una circunferencia línea de fuerza, de radio x , el valor de $\vec{G}$ es cero, pues no hay corrientes de conducción. En cuanto a $\frac{d\vec{D}}{dt}$, es un vector de la misma dirección que $\vec{D}$ y $\vec{E}$; su valor es, en virtud de [11]:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad [16]$$

La ecuación [15] nos da, por tanto:

$$H_x \cdot 2\pi x = \pi x^2 \frac{1}{\pi r^2} \cdot \frac{dQ}{dt};$$

o sea:

$$H_x = \frac{x}{2\pi r^2} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad [17]$$

Conocidos ya el campo eléctrico y el campo magnético, vamos a calcular el vector de Poynting. Consideremos una superficie cilíndrica en el interior del dieléctrico, pero en la inmediata proximidad al límite de éste, que suponemos coincidente con las armaduras; es decir, una superficie cilíndrica de eje OO' , de radio r y altura e . En un punto cualquiera de ella (fig. 2.^a), los vectores del campo electromagnético, $\vec{E}$ y $\vec{H}$, tienen las direcciones marcadas en la figura; son, pues, normales el uno al otro. El vector de Poynting, $\vec{S}$, resulta ser radial y apuntando hacia el interior del condensador. Por cada cm.^2 del dieléctrico, en los bordes del condensador, entra una potencia desde el campo electromagnético igual a

$$EH \quad (\text{W/cm.}^2)$$

Ahora bien: hemos visto que

$$E = \frac{4 c^2}{10^9 \epsilon r^2} \cdot Q;$$

y, por la fórmula [17],

$$H = \frac{2 \pi r}{1} \cdot \frac{d t}{d Q}. \quad [18]$$

Reemplazando valores y haciendo operaciones, se obtiene:

$$E H = \frac{2 c^2}{10^9 \epsilon \pi r^3} \cdot Q \cdot \frac{d Q}{d t} \quad (\text{W/cm.}^2)$$

La cantidad de energía que entra, por segundo, por toda la superficie lateral del dieléctrico, es:

$$E H \cdot 2 \pi r e = \frac{4 c^2 e}{10^9 \epsilon r^2} \cdot Q \cdot \frac{d Q}{d t} \quad (\text{W}) \quad [19]$$

Pero antes demostramos que la energía eléctrica almacenada en el condensador, en el instante t , valía

$$W_e = \frac{2 c^2 e Q^2}{10^9 \epsilon r^2} \quad (\text{julios}) \quad [14]$$

Comparando [19] con [14], se ve que la corriente de energía que afluye del campo al condensador, cuando éste está cargándose, es exactamente igual a $\frac{\partial W_e}{\partial t}$, o sea al aumento por segundo de la energía eléctrica almacenada en el dieléctrico; dicha corriente de energía no entra por las armaduras, sino por el dieléctrico, a través de su borde o superficie lateral.

¿Qué ocurriría si calculáramos el vector de Poynting no dentro ya del dieléctrico, aunque junto al aire, sino en el aire, en la inmediata proximidad del dieléctrico? No cambiaría el resultado obtenido. En efecto: es bien sabido que al pasar de un medio a otro se conservan las componentes tangenciales del campo eléctrico y del campo magnético. Los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son, en este caso, los dos tangenciales. Luego en el aire, en una superficie cilíndrica $2 \pi r e$, envolviendo el dieléctrico, tendríamos el mismo valor del vector de Poynting, $[\vec{E} \vec{H}]$, que acabamos de calcular, y la misma corriente resultante de energía.

Puede seguirse con los condensadores, al estudiar sus variaciones de energía, otro procedimiento más sencillo y directo; aplicable, además, a cualquier condensador plano (fig. 3.^a).

Sea un elemento, $d e \cdot d s$, en la superficie lateral del dieléctrico. Los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$, en ese punto, serán ortogonales. Pero, en general, el vector $\vec{H}$ for-

mará un ángulo, $(H, d s)$, distinto de cero, con el vector $\vec{d s}$. El vector de Poynting, $\vec{S}$, dirigido hacia el dieléctrico, forma con $\vec{d f}$ el ángulo $(S, d f)$, igual al $(H, d s)$.

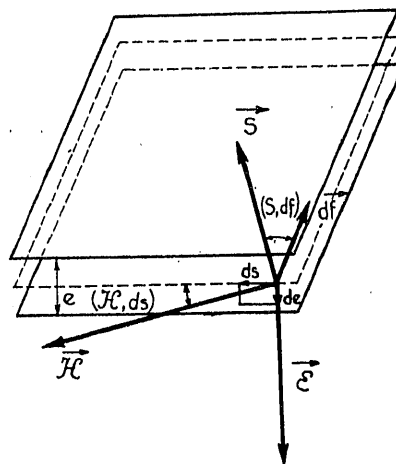


Figura 3.^a

La corriente elemental de energía será:

$$\vec{S} \cdot \vec{d f} = E H d e d s \cos (S, d f) = E H d e d s \cos (H, d s)$$

Dejando constante $d e$, integremos esta expresión a lo largo de la línea dibujada de puntos (fig. 3.^a). Así se encuentra:

$$E d e \oint H d s \cos (H, d s). \quad [20]$$

Ahora bien: antes hemos visto que

$$\oint H d s \cos (H, d s) = \oint \vec{H} \cdot \vec{d s} = \frac{d Q}{d t};$$

Sustituyendo en [20], e integrando en la altura, desde 0 hasta e , resulta en definitiva, para el flujo total de energía por segundo:

$$E e \cdot \frac{d Q}{d t} = V \cdot \frac{d Q}{d t} = \frac{Q}{C} \cdot \frac{d Q}{d t} \quad (\text{W.}). \quad [21]$$

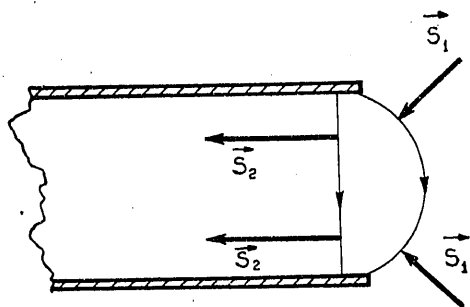
Como la energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$W_e = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (\text{julios})$$

se ve que la expresión [21] no es, como anteriormente, sino la derivada de W_e con relación al tiempo.

En los bordes de los condensadores, las líneas de fuerza del campo eléctrico ya no serán rectas parale-

las; tendrán una forma análoga a la indicada en la figura 4.^a. El vector de Poynting presentará allí una inclinación respecto al plano de las armaduras, y su valor será más pequeño. La perturbación del campo en los bordes crea como un embudo, por el que se

Figura 4.^a

vierte en el dieléctrico la corriente electromagnética de energía.

Y para terminar, una observación, anticipándonos a posibles objeciones. Las demostraciones anteriores sólo son completamente rigurosas, desde un punto de vista físicomatemático, si $\frac{dQ}{dt}$ es constante; es decir, si se considera un momento, en el régimen de carga o descarga, durante el cual la intensidad, $i = \frac{dQ}{dt}$, no cambia. Sólo así es invariable, en el intervalo dt , el campo magnético debido a las corrientes de desplazamiento, y no interviene su magnitud, W_m , en las transformaciones energéticas. Si $\frac{dQ}{dt}$ es variable, existirán $\frac{dW_e}{dt}$ y $\frac{dW_m}{dt}$... Por otra parte, $\vec{E}$ ya no será sólo debida al campo electrostático; tendrá una componente originada por la inducción electromagnética en el circuito de alimentación del condensador, al variar las intensidades de campo $\vec{H}$ producidas por las $\frac{d\vec{D}}{dt}$. De todos modos, la cantidad total neta de energía que entra en el dieléctrico desde $Q=0$ hasta su valor final, Q , es exactamente igual a la energía eléctrica almacenada, $\frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$; pues la energía magnética del campo H , debida a las corrientes de desplazamiento, es nula antes de empezar el proceso y después de terminarse.

Bobina de autoinducción.

En la figura 5.^a reproducimos un trozo de una bobina de autoinducción, formada por n espiras repartidas uniformemente sobre un núcleo; éste tiene l cm. de longitud y una sección transversal con c cm. de periferia.

Para hacer posible un cálculo elemental, introduciremos las hipótesis simplificativas siguientes: a), permeabilidad constante del núcleo; b), resistibilidad nula en el hilo del bobinado; c), diámetro muy pequeño de éste; d), valor de c pequeño, comparado con l .

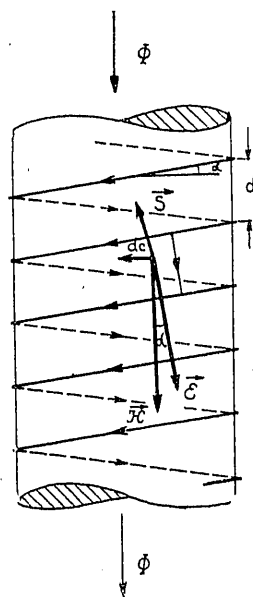
Con las notaciones de la figura 5.^a, tendremos para el ángulo α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{c}.$$

En el instante t considerado, se supone que existe en las n espiras una intensidad i ; esta intensidad, y el flujo ϕ que produce en el núcleo, crecen con el tiempo.

Si llamamos V a la tensión de alimentación, entre los terminales de la bobina se verificará que

$$V = L \frac{di}{dt}; \quad [22]$$

Figura 5.^a

siendo L el coeficiente de autoinducción del conjunto. La diferencia de potencial eléctrico entre dos espiras contiguas será:

$$\frac{V}{n} = \frac{1}{n} \cdot L \frac{di}{dt}, \quad [23]$$

y el campo eléctrico en la superficie del núcleo estará constituido por líneas de fuerza normales a los hilos;

formando, por tanto, el ángulo α con la dirección longitudinal. La intensidad de dicho campo valdrá:

$$E = \frac{V}{n} : d \cos \alpha = \frac{1}{n d \cos \alpha} \cdot L \frac{di}{dt}. \quad [24]$$

Vamos a comprobar que este campo eléctrico satisface la segunda ecuación fundamental del electromagnetismo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi}{dt}. \quad [25]$$

Integrando a lo largo de la periferia, c , de una sección transversal, se encuentra:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{1}{n d \cos \alpha} \cdot L \frac{di}{dt} c \sin \alpha = - \operatorname{tg} \alpha \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{n} L \frac{di}{dt} = - \frac{1}{n} L \frac{di}{dt}. \quad [26]$$

(Si adoptamos como positivo el sentido del flujo ϕ dibujado, las circulaciones positivas de las $\vec{E}$ irán en el mismo sentido que la corriente i ; de ahí que la integral calculada haya de tener signo menos.)

Pero, en virtud de la definición de L ,

$$L i = n \phi;$$

de donde:

$$L \frac{di}{dt} = n \frac{d\phi}{dt}.$$

Sustituyendo en [26], se obtiene:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{d\phi}{dt},$$

como debía ser.

Calculemos ahora el campo magnético. Dentro de nuestras hipótesis, éste será longitudinal (fig. 5.^a), y con un valor prácticamente constante en todos los puntos del núcleo

$$H = \frac{ni}{l}. \quad [26]$$

En un punto cualquiera de la superficie de dicho núcleo, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$ forman el ángulo α . El vector de Poynting es normal a esa superficie y apuntando hacia el interior. Su valor absoluto es:

$$E H \sin \alpha = \frac{1}{n d \cos \alpha} L \frac{di}{dt} \frac{ni}{l} \sin \alpha. \quad [27]$$

Poniendo en [27], en lugar de $\operatorname{tg} \alpha$, su magnitud $\frac{d}{c}$, y simplificando, se encuentra:

$$E H \sin \alpha = L i \frac{di}{dt} \frac{1}{cl} \quad (\text{vatios/cm}^2). \quad [28]$$

Por cada cm^2 de la superficie del núcleo entra en éste, por tanto, un flujo de energía por segundo constante, igual a la expresión que acabamos de calcular. A través de toda la superficie, $c \cdot l$, afluirá al campo magnético interior una corriente de energía

$$L i \frac{di}{dt} \quad (\text{W.}). \quad [29]$$

Ahora bien: en el instante t , la energía magnética almacenada en la inductancia es:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (\text{julios}). \quad [30]$$

En consecuencia: lo mismo que en el caso del condensador, la corriente total de energía [29] (julios/s.) que entra en el núcleo de la bobina de autoinducción es igual al incremento por segundo de la energía allí almacenada, es decir, igual a $\frac{\partial W_m}{\partial t}$. Esta corriente de energía se adentra por la superficie exterior del núcleo.

Nuestras hipótesis simplificadoras hacen el cálculo anterior algo esquemático, o ideal. La realidad es más compleja. En primer lugar, al no ser $\rho = 0$ en el hilo de la bobina, el campo eléctrico tiene una componente paralela a los hilos, dentro de éstos, y en el exterior, en su inmediata proximidad. Esto lo veremos, con más detalle, en el apartado próximo. En segundo lugar, si se tiene en cuenta el espesor de los hilos, la configuración de los campos, eléctrico y magnético, se complica extraordinariamente. De todos modos, nuestro caso ideal reproduce con suficiente fidelidad el fenómeno,

y en él, los valores de $\vec{E}$ y de $\vec{H}$ pueden considerarse, en cierto modo, como promedios de las intensidades de campo realmente existentes.

Conductor cilíndrico.

La ley de Ohm, expresada vectorialmente, es la siguiente:

$$\vec{E} = \rho \vec{G}. \quad [31]$$

$\vec{E}$ = intensidad del campo eléctrico en el punto considerado, en V/cm.

ρ = resistibilidad del material, en ohmios $\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$.

$\vec{G}$ = vector densidad de corriente en el mismo punto.

En un conductor filiforme, por ejemplo, la integral de $\vec{E} d\vec{s}$ entre dos secciones, siendo $d\vec{s}$ un elemento de la longitud, nos da la diferencia de potencial entre esas dos secciones. La integral de $\vec{G} d\vec{f}$ en una sección transversal — siendo $d\vec{f}$ el vector normal e igual al área elemental —, da la corriente total que por allí pasa, en el instante estudiado.

Los campos eléctricos $\vec{E}$ que existen en el interior de los conductores, cuando por ellos circula la electricidad, son pequeñísimos en comparación con los campos $\vec{E}$ en el aire (o en otros medios) que rodea a esos conductores. Vamos a darnos cuenta de este hecho importante con un sencillo ejemplo. Notemos, primeramente, que los hilos o cables de una transmisión de energía, en los que existe una corriente eléctrica, tienen sus puntos a potenciales eléctricos, más o menos altos, que varían de un lugar a otro. En su superficie hay cargas eléctricas, y de ellas nacen tubos de inducción, como en el campo electrostático, que terminan en los hilos o cables conductores de opuesta polaridad

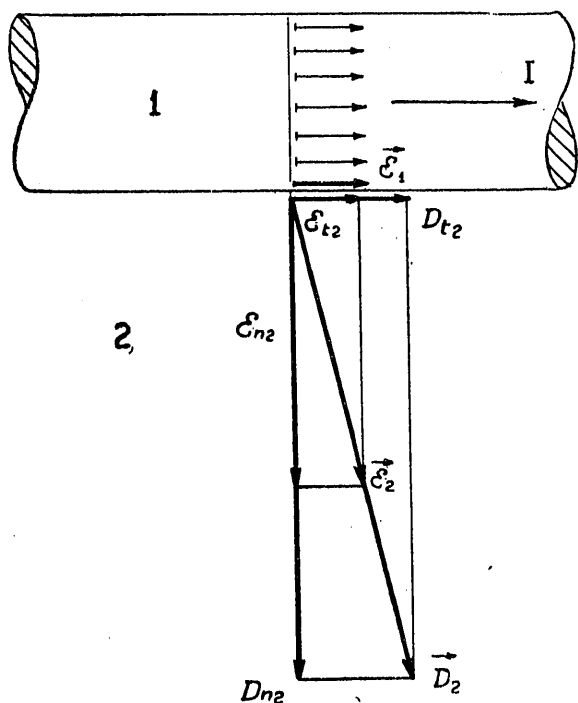


Figura 6.ª

o en la tierra. Si se trata — para fijar las ideas — de líneas aéreas, se produce así un campo eléctrico que puede asumir valores elevados. La tensión disruptiva del aire se alcanza, como es sabido, cuando $\vec{E}$ llega a ser unos 30 000 V/cm., presentándose entonces el llama-

mado "efecto corona". En las líneas de muy alta tensión existen, muchas veces, en la proximidad de los conductores, valores de $\vec{E}$ no muy alejados de este límite máximo. Por otra parte, la corriente en dichas líneas rara vez excede una densidad del orden de 200 A/cm.². Si los conductores son de cobre, con una resistibilidad ρ , aproximadamente igual a 2×10^{-6} ohmios $\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$, la igualdad [31] nos dice que la intensidad del campo en su interior será del orden de

$$2 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ V/cm.}$$

Vemos, pues, que mientras en el aire, cerca de los conductores, el campo eléctrico se mide en decenas de miles de voltios por centímetro, dentro de éstos es sólo de algunas diezmilésimas de voltios por centímetro. Claro está que en líneas de baja tensión el contraste no es tan marcado; pero sigue siendo siempre considerable.

En el tránsito de un medio 1 a otro medio 2, el campo eléctrico cumple siempre las dos condiciones siguientes:

$$E_{t_1} = E_{t_2}; \quad [32]$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = q. \quad [33]$$

E_{t_1} y E_{t_2} = componentes tangenciales de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

D_{n_1} y D_{n_2} = componentes de $\vec{D}_1$ y de $\vec{D}_2$, según la normal en el sentido de 1 a 2, a la superficie de separación de ambos medios.

q . . . = densidad de carga, en coulombios/cm.², en el punto considerado.

Apliquemos las igualdades [32] y [33] a un conductor cilíndrico, 1, por el que circula una corriente, I , uniformemente repartida, y al medio, 2, que le rodea (fig. 6.ª). El vector $\vec{E}$, en el interior del conductor, será en todos sus puntos de dirección axial, y tendrá el valor

$$E_1 = \rho G = \rho \frac{I}{F}. \quad [34]$$

F = sección transversal, en cm.².

Pasando al medio exterior, se tendrá:

$$E_{t_2} = E_1 = \rho \frac{I}{F}; \quad [35]$$

de donde:

$$D_{t_2} = 4 \pi \cdot 10^{-9} \epsilon \rho \frac{I}{F}, \quad [36]$$

y

$$D_{n_2} = q; \quad [37]$$

por ser $D_n = 0$. Consecuencia: la inducción eléctrica, $\vec{D}_2$, y el campo eléctrico, $\vec{E}_2$ (proporcional a ella y de la misma dirección), en la proximidad del conductor, *ya no son normales a éste*, como acontece en el campo electrostático; tienen una componente tangencial, aunque ésta sea muy pequeña, según hemos visto anteriormente, ya que si E_1 es pequeño frente a E_2 , lo mismo ocurrirá a $E_t = E_1$ frente a E_2 y a D_t frente a D_2 (fig. 6.^a). (Ni que decir tiene que en la figura 6.^a están exageradísimos los valores de todas las componentes tangenciales.) Una ligerísima, imper-

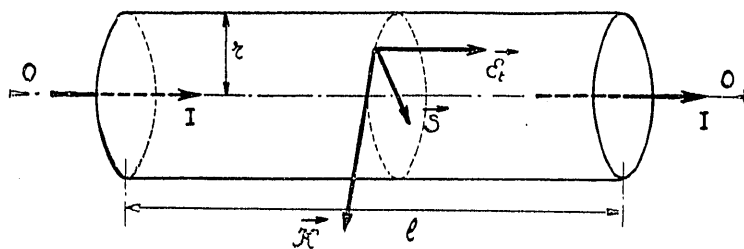


Figura 7.^a

ceptible, desviación de las líneas de fuerza y de inducción respecto a la normal, en la superficie de los conductores, pone en movimiento las cargas eléctricas en el interior de éstos.

Pero volvamos a nuestro vector de Poynting. En la proximidad del conductor cilíndrico (fig. 7.^a), el vector $\vec{H}$ es tangencial y situado en planos normales al eje $O O'$. Su valor es:

$$H = \frac{I}{2\pi r}; \quad [38]$$

siendo r , en cm., el radio del conductor cilíndrico.

El vector $\vec{E}$, en el mismo punto, tiene dos componentes, como hemos visto: $\vec{E}_t$ y $\vec{E}_n$. El producto vectorial de $\vec{E}_n$ y $\vec{H}$ da un vector de Poynting *paralelo al conductor*; corresponde al flujo de energía a lo largo del hilo, o sea a la transmisión de energía, que estudiaremos en el próximo apartado. El otro producto vectorial, de $\vec{E}_t$ por $\vec{H}$, nos da un vector de Poynting, $\vec{S}$, *normal a la superficie del cilindro conductor y dirigido hacia su interior*. El valor absoluto de $\vec{S}$ es:

$$E_t H = \rho \cdot \frac{I}{F} \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{\rho I^2}{2\pi r F} \quad (\text{W/cm.}^2) \quad [39]$$

En una longitud l cm., el flujo o corriente total de

energía que entra en el cilindro es, por tanto:

$$\rho \frac{I^2}{2\pi r F} \cdot 2\pi r l = \rho \frac{l}{F} I^2 = R I^2 \quad (\text{W.}) \quad [40]$$

llamando $R = \rho \frac{l}{F}$ (ohmios) a la resistencia eléctrica de los l cm. del conductor cilíndrico estudiado. En resumen: la corriente de energía, *que afluye al hilo por toda su superficie*, es igual a la potencia disipada en su seno y convertida en calor por el efecto Joule.

La componente $\vec{E}_t$ del campo eléctrico exterior, que sólo existe cuando circula una corriente por el hilo, proporciona el vector de Poynting necesario para cubrir las pérdidas por $R I^2$ en éste.

Línea eléctrica de dos conductores.

Consideremos una transmisión de energía eléctrica formada por dos hilos paralelos, a y b (fig. 8.^a). El conductor a lleva la corriente continua I , que retorna por el b . El plano del dibujo, transversal, corta a los hilos según los dos círculos dibujados. En dicho plano, supondremos que la diferencia de potencial entre los conductores es:

$$V_a - V_b = V_{ab} \quad (\text{voltios}). \quad [41]$$

¿Cuál es la potencia eléctrica que se transmite, por la línea, a través de la sección considerada, hacia el fondo? Es bien sabido que esa potencia tiene el valor

$$(V_a - V_b) I = V_{ab} I \quad (\text{W}). \quad [42]$$

Vamos a comprobar que el vector de Poynting nos conduce al mismo resultado. Estudiemos, para ello, el

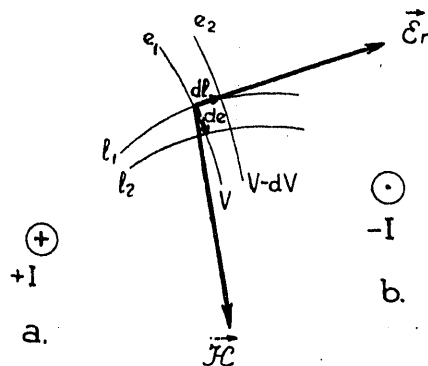


Figura 8.^a

campo electromagnético en el dieléctrico, en el plano de la figura.

El campo eléctrico, $\vec{E}$, tendrá una componente

principal, $\vec{E}_n$, en dicho plano (análoga a la que llamábamos $\vec{E}_n$, en la proximidad del conductor cilíndrico), y una pequeña componente, $\vec{E}_t$, perpendicular al plano, o sea paralela a los hilos (semejante a la que llamábamos $\vec{E}_t$). Esta última componente, $\vec{E}_t$, es la que, con $\vec{H}$, da el vector de Poynting normal a los conductores, que conduce a éstos la potencia disipada luego en su seno, en forma de calor. La otra componente, $\vec{E}_n$, única que ahora tendremos en cuenta, da, con $\vec{H}$, el vector de Poynting paralelo a los hilos, que produce la transmisión de la potencia eléctrica a lo largo de éstos.

En el campo de las $\vec{E}_n$ sean c_1 y c_2 dos líneas equipotenciales infinitamente próximas, envolviendo al conductor a y con los potenciales V y $V - dV$, y b_1 , b_2 , dos líneas de fuerza, también infinitamente próximas, las cuales, como sabemos, empezarán en el conductor a y terminarán en el b . Calculemos el flujo de energía por segundo en el rectángulo elemental $d l d c$ (fig. 8.^a). El vector $\vec{E}_n$ tendrá la misma dirección que el vector $\vec{d l}$. En cuanto a $\vec{H}$, aunque situado en el plano de la figura, formará un cierto ángulo con $\vec{d l}$. El vector de Poynting

$$\vec{S} = [\vec{E}_n \vec{H}];$$

es normal al plano de la sección transversal y dirigido hacia el fondo, sentido en el que se transmite, efectivamente, la energía. El flujo de $\vec{S}$ a través del área $d l \cdot d c$, vale

$$S d l d c = E_n H \sin(E_n, H) d l d c \quad (W.). \quad [43]$$

Pero

$$\sin(E_n, H) = \sin(d l, H) = \cos(H, d c).$$

Sustituyendo en [43] y reagrupando, se encuentra:

$$S d l d c = E_n d l H d c \cos(H, d c). \quad [44]$$

Ahora bien: $E_n d l$ es igual a $d V$, y este producto es constante para todos los elementos de línea de fuerza eléctrica comprendidos entre c_1 y c_2 . El flujo de energía entre esas dos líneas equipotenciales es, por tanto:

$$d V \oint H d c \cos(H, d c) = d V \oint H d c = d V I, \quad [45]$$

en virtud de la primera ecuación fundamental del electromagnetismo. Integrando ahora en todo el dieléctrico, desde la superficie del conductor a hasta la superficie del b , resulta, para la corriente total de energía a través del plano del dibujo:

$$2 \frac{(V_a - V_b)}{2} \cdot I = (V_a - V_b) I = V_{ab} I \quad (W). \quad [46]$$

La mitad de esta expresión corresponde a las líneas equipotenciales que envuelven el hilo a , y la otra mitad a las que envuelven el hilo b .

La aplicación del vector de Poynting a este caso particular nos conduce, como vemos, a la conocida fórmula [42] — que antes anticipamos —, para la transmisión de potencia en una línea de dos conductores.

Si se divide la diferencia de potencial V_{ab} en $2n$ partes iguales, mediante líneas equipotenciales, entre cada dos de éstas, pasa paralelamente a los hilos la misma cantidad de energía por segundo (fórmula [45]):

$$\frac{V_{ab}}{2n} I. \quad [47]$$

La teoría clásica del campo electromagnético nos conduce a la consecuencia de que, en un transporte eléctrico de energía, ésta se transmite por el dieléctrico y no por los hilos, como vulgarmente se cree. Los hilos sólo sirven para guiar la transmisión en el dieléctrico, y este servicio no lo hacen sin recibir por él un pequeño tributo: la energía disipada en su seno en forma calorífica.