

METODO ROENTGENOGRAFICO PARA LA MEDIDA DE TENSIONES

Por VICENTE DE CASTRO CUBELLS, Licenciado en Ciencias Físicas.

En el presente artículo, y en otro próximo, vamos a reproducir una interesante Publicación del Laboratorio Central de nuestra Escuela Especial, que da cuenta del estado de adelanto en el extranjero del asunto reseñado en el título, y que consideramos de interés para nuestros lectores.

I

El objeto de este trabajo es exponer, en castellano, un resumen de las investigaciones sobre el tema, que desde hace años se vienen realizando en distintos países. No pretende, pues, aportar ningún procedimiento original, sino preparar el camino para futuras investigaciones.

Introducción.

La medida de tensiones puede realizarse, a partir de la medida de deformaciones, aplicando las ecuaciones de la elasticidad. La medida de deformaciones implica la medida de longitudes. En los ensayos mecánicos, las longitudes medidas son del orden de los centímetros. En el método roentgenográfico, las longitudes medidas son las separaciones interatómicas del

orden del Ångström ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm.}$), separaciones que se repiten periódicamente en la estructura reticular de todas las materias cristalinas. El suponer que las ecuaciones elásticas siguen siendo válidas en esta escala, es la primera hipótesis del método.

Fundamentos roentgenográficos del método.

La difracción de los rayos X por la materia cristalina se aplica, como es sabido, a la determinación de la estructura cristalina de la misma. El primer paso en dicha determinación es la medida de la separación o espaciado, d , de los planos paralelos de la red cristalina. Esa medida es el fundamento del presente método y se hace, como veremos luego, por el procedimiento más preciso de los conocidos: la reflexión de retroceso, que no es más que un caso particular del método de Debye-Scherrer. La ecuación básica del estudio de la estructura cristalina es la de Bragg:

$$\lambda = 2d \sin \theta; \quad [1]$$

λ = longitud de onda de la radiación empleada.

d = espaciado de los planos reticulares.

θ = ángulo de difracción.

Aquí es también esta ecuación la clave del método. Medir d , antes y después de la aplicación de las tensiones, es el camino para obtener el valor de una deformación:

$$\epsilon = \frac{d - d_0}{d_0}. \quad [2]$$

Más adelante veremos cómo se evita la determinación de la longitud inicial d_0 , en el caso de tensiones residuales, en que no es posible, o por lo menos no segura, su medida.

Un haz de rayos X de longitud de onda λ , al incidir sobre un conjunto de cristales distribuidos al azar, se difracta o refleja selectivamente, sobre los planos reticulares de espaciado d , en direcciones que forman el ángulo 2θ con la dirección inicial. Los tres valores λ , d y θ , están ligados por la ecuación [1].

El valor de d no es único, sino que a cada serie de planos paralelos le corresponde uno, y, por tanto, un valor de θ . Por eso, en los diagramas Debye-Scherrer se obtienen distintos conos de semiángulo en el vértice 2θ , que producen las distintas series de planos paralelos en que se pueden considerar agrupados los átomos de los cristales. La interpretación del diagrama consiste en averiguar, por procedimientos geométricos, cuál es el ángulo θ correspondiente a cada anillo, cuál es la serie de planos que lo ha producido y cuál es el espaciado d de estos planos.

En el método que nos ocupa se eligen aquellos anillos que suministran sus correspondientes d con la máxima precisión. Los anillos que cumplen esta condición son los de mayor ángulo θ , como se demuestra a continuación:

Tomemos la ecuación de Bragg [1] en la forma

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}, \quad [3]$$

y diferenciémosla logarítmicamente, con lo que se tiene:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\cot \theta \cdot \Delta \theta. \quad [4]$$

De esta ecuación se deduce que el error relativo $\frac{\Delta d}{d}$ sobre d , para un error fijo, $\Delta \theta$, disminuye a medida que θ tiende a 90° , es decir, 2θ a 180° .

Por ello se ha dado a esta aplicación del método de Debye-Scherrer el nombre de reflexión de retroceso. Su esquema está representado, para el caso de

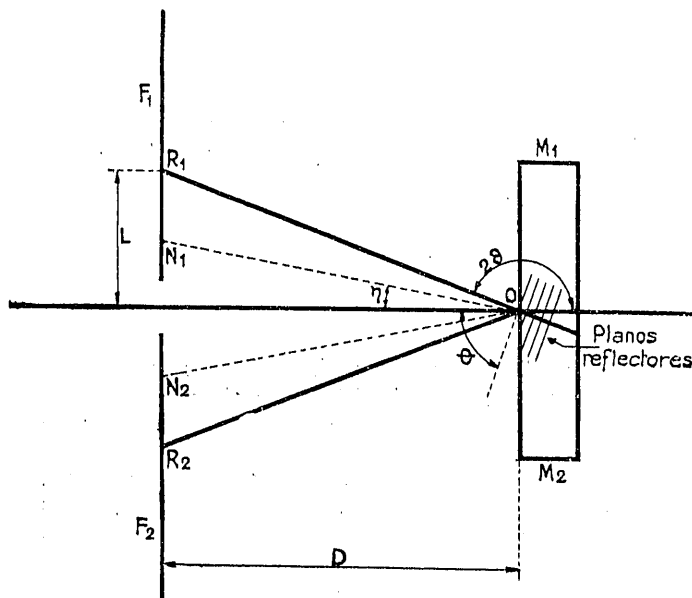


Figura 1.ª

incidencia normal, en la figura 1.ª, en la que puede verse la disposición relativa de la muestra M_1, M_2 , de los rayos incidentes XO y difractados OR_1 y OR_2 , y de la película plana F_1F_2 .

El cálculo del ángulo θ de difracción se hace, en este caso de película plana, a partir de la siguiente relación geométrica:

$$L = D \cdot \operatorname{tg}(\pi - 2\theta); \quad [5]$$

en la que D es la distancia película-muestra, y L , el radio del anillo de difracción obtenido sobre la película; este valor de θ es el que se lleva a la ecuación de Bragg [1].

Por lo tanto, el error $\frac{\Delta d}{d}$ dependerá de los errores de L y de D .

Estudiemos analíticamente esta dependencia:

Tomando incrementos en la [5], resulta:

$$\Delta L = -\operatorname{tg} 2\theta \cdot \Delta D + \frac{2D}{\cos^2 2\theta} \cdot \Delta \theta; \quad [6]$$

de donde:

$$\Delta \theta = (\Delta L + \operatorname{tg} 2\theta \cdot \Delta D) \cdot \frac{\cos^2 2\theta}{2D}. \quad [7]$$

Este valor de $\Delta \theta$ llevado a [2], da:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2D} \cdot \cot \theta \cdot \cos^2 2\theta (\Delta L + \operatorname{tg} 2\theta \cdot \Delta D).$$

Suponiendo que $\Delta D = 0$, el error relativo de d pasa por un máximo para $\theta = 70^\circ 40'$, como puede verse haciendo la construcción de la curva:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2D} \cot \theta \cos^2 2\theta \cdot \Delta L, \quad [8]$$

representada en la figura 2.ª.

Como ΔD será en general distinto de cero, este error relativo crecerá, pero el valor máximo del mismo corresponderá a valores de θ , cada vez más pequeños a medida que crezca ΔD .

El mismo razonamiento demuestra igualmente que para una variación Δd de la distancia reticular, la variación correspondiente del ángulo θ de Bragg, es tanto más marcada cuanto más se aproxime θ a 90° , y que es mínima para $\theta = 70^\circ 40'$. El método es, pues, muy sensible cuando las medidas se realizan sobre rayas que corresponden a ángulos de Bragg próximos a 90° , y en todo caso, superiores a 70° .

Si la medida de la distancia película-muestra no se hace con toda precisión, los errores ΔD introducidos en el cálculo de los espaciados reticulares d , harían imposible la aplicación del método.

Por ello se han ideado distintos procedimientos de determinación de D .

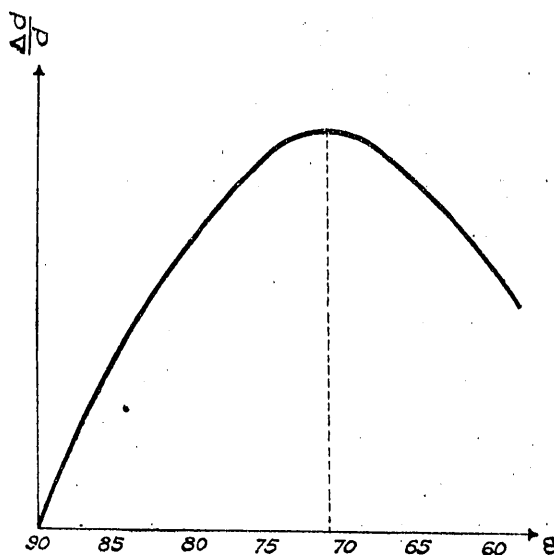


Figura 2.ª

Weber y Möller (10) propusieron determinar D , usando polvo de una substancia patrón elegida convenientemente, que se extiende en fina capa sobre la superficie del material examinado.

El polvo patrón da un anillo de radio L_0 conocido, correspondiente a un ángulo de difracción θ_0 , también conocido, y por la ecuación

$$L_0 = D \operatorname{tg} (\pi - 2 \theta_0), \quad [9]$$

se determina D :

$$D = \frac{L_0}{\operatorname{tg} (\pi - 2 \theta_0)}. \quad [10]$$

Para ver qué ángulo θ_0 de tarado es el más conveniente, tomemos incrementos en la [10], con lo que resulta:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta L_0}{L_0}. \quad [11]$$

La curva $L_0 \Delta D = D \cdot \Delta L_0 = \text{const.}$ es una hipérbola equilátera (fig. 3.^a), en la que se ve que ΔD es tanto menor cuanto mayor es L_0 , y, por lo tanto, cuanto más se aproxime θ_0 a 45° . Esto quiere decir que las rayas patrón deben estar alejadas del centro del cliché lo más posible. Pero como, por otra parte, hay que tener en cuenta la falta de uniformidad en la retracción de la película durante el secado, y además, que por debajo de 75° es insensible la disminución de ΔD , conviene usar valores de θ_0 superiores al así determinado. Como veremos luego, también obligan a ello las condiciones de focalización.

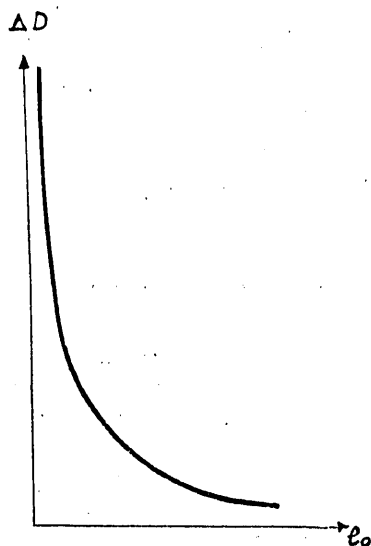


Figura 3.^a

La aplicación del polvo patrón a la determinación de la distancia película-muestra D no es única. Se usan también los anillos del polvo patrón para el calibrado de los clichés y para la medida de distancias relativas a los anillos de los materiales estudiados.

Distancias que, como luego veremos, intervienen en las ecuaciones que suministran el valor de las tensiones.

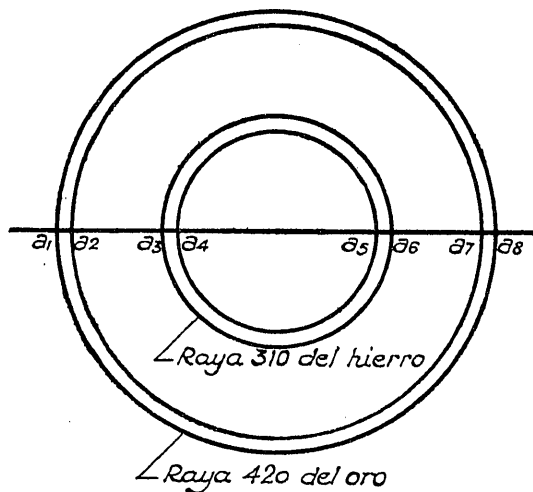


Figura 4.^a

Consideremos como ejemplo práctico el caso del acero, de red cúbica centrada, de malla $2,861 \text{ \AA}$ (Möller (50)), con las radiaciones $\text{Co K}_{\alpha_1 \alpha_2}$, que se emplean para no excitar la radiación de fluorescencia Fe K_{α} . La raya correspondiente al ángulo de difracción máximo, procede de los planos (310) de distancia reticular $\frac{2,861}{\sqrt{10}}$, para la cual θ es igual a

$80^\circ 37'$. Se usa como substancia patrón, polvo de oro. Este elemento es cúbico, de caras centradas y de parámetro $a = 4,0700 \text{ \AA}$, y da una raya (420), que es la que se utiliza para el tarado, muy cerca de la del Fe.

Midamos, desde un punto arbitrario del eje del diagrama, las distancias a dicho punto de las intersecciones del eje con los anillos de difracción (figura 4.^a).

De las rayas del oro se deduce la distancia D , tomando la media de las determinaciones correspondientes a las rayas K_{α_1} y K_{α_2} .

Para tener los valores numéricos de D_1 y D_2 hay que introducir en las fórmulas anteriores los valores:

$$\operatorname{tg} (\pi - 2 \theta_1) = 0,413543;$$

$$\operatorname{tg} (\pi - 2 \theta_2) = 0,387268;$$

correspondientes a los planos (420) del oro para radiaciones $\text{Co K}_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Otros investigadores (Thomas (62)), han preferido realizar la medida directa de D por el método que

se explica a continuación, basándose en el siguiente estudio de los errores.

En la siguiente tabla se dan los valores de los diámetros de los anillos de difracción que corresponden a distancias muestra-película variables y a retículas también variables.

Diámetros en mm.

Retícula	$D = 4,9$	$D = 5,0$	$D = 5,1$ cm.
2,8590 Å.....	32,328	32,988	33,648
2,8600 Å.....	32,799	33,468	34,138
2,8610 Å.....	33,266	33,945	34,624

En ella se puede ver que un cambio en el valor de la retícula de $1/2860$, produce aproximadamente un cambio de $0,48$ mm. en el valor del diámetro del anillo, por lo que, si ese diámetro se puede medir con un error menor de $0,05$ mm., la retícula se puede determinar con un error menor de $1/28000$. La misma tabla muestra que un error de 1 mm. en la medida de D , produce un cambio de $1,66$ mm. en el diámetro, que es el mismo error que el producido por un cambio de $1/2100$ en la retícula.

Con el método que ahora se explicará, la medida de D se obtiene con un error menor de $0,025$ mm., y el error de la retícula será menor que $1/84000$, que, como vemos, es inferior al producido por el error

de la idea de cómo se realiza el ajuste. El colimador C está rígidamente unido al tubo de rayos X. Sobre él se ajusta la pieza B , a la que se fija, mediante la arandela de goma, R , y la tuerca N , la bandeja portapelícula T . Sobre el extremo delantero de la pieza C del colimador, se atornilla el manguito L , en el que va ajustada una pieza, Q , en forma de bala. Así dispuesto este conjunto, se puede llevar, gracias al movimiento del tubo, a tocar con el extremo de la pieza Q , el punto que se quiere estudiar. Para que el ajuste sea más perfecto, se usa, además, una laminilla tarada, G . La distancia queda fijada cuando la laminilla es oprimida suavemente.

A continuación se desatornilla el manguito L y se separa del conjunto con la pieza Q . En lugar del manguito L se atornilla la pieza P del diafragma delantero del colimador, colocándose entre P y B un pequeño muelle (fig. 5.^a) para que la bandeja portapelícula no se mueva de su posición.

La distancia D así fijada, es conocida de una vez para siempre, ya que todas las piezas del dispositivo están calibradas y puede darse con un error menor de $0,025$ mm., que, como hemos dicho, equivale a determinar la retícula con un error menor de $1/84000$.

Una ventaja de este método estriba en que, por no usarse polvo patrón, se reduce aproximadamente a la mitad el tiempo de exposición.

La razón que se daba para la medida, sobre el mismo diagrama, del diámetro del anillo y de la distancia muestra-película, para evitar el error producido por la contracción de la película, no parece invalidar este método, ya que, medidas realizadas sobre película contraída, daban un error de $1/1600$, que representa un error de $0,021$ mm. en anillos de 34 milímetros de diámetro, que es menor que el de medida de los anillos mejor definidos.

Fundamentos elásticos teóricos del método.

Sea σ_x (fig. 6.^a) la tensión a medir sobre la superficie del metal, y φ el ángulo que forma con la tensión principal σ_1 . La segunda tensión principal σ_2 está también en el mismo plano de σ_x y σ_1 , y la tercera tensión principal podemos suponerla nula, $\sigma_3 = 0$, ya que, por no penetrar los rayos X más que a una profundidad de $\approx 0,1$ mm., el problema planteado corresponde a la Elasticidad plana. Sin embargo, en algunos casos no es esto rigurosamente cierto, y habrá de hacerse la correspondiente corrección. Las deformaciones principales correspondientes a las tensiones mencionadas serán ϵ_1 , ϵ_2 y $\epsilon_3 = \epsilon_p$. Esta última tendrá la dirección de la normal CL a la superficie.

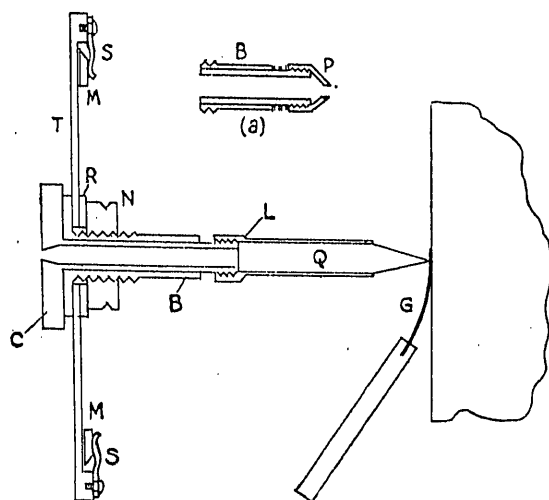


Figura 5.^a

en la medida del diámetro. Este método directo consiste en el ajuste mecánico de la distancia muestra-película, y tiene la ventaja de que dicha distancia es reproducible cuantas veces se quiera. La figura 5.^a

Se podrán aplicar las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x E &= \sigma_x - \nu \sigma_y; \\ \epsilon_y E &= \sigma_y - \nu \sigma_x; \\ \epsilon_p E &= -\nu (\sigma_x + \sigma_y) = -\nu (\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

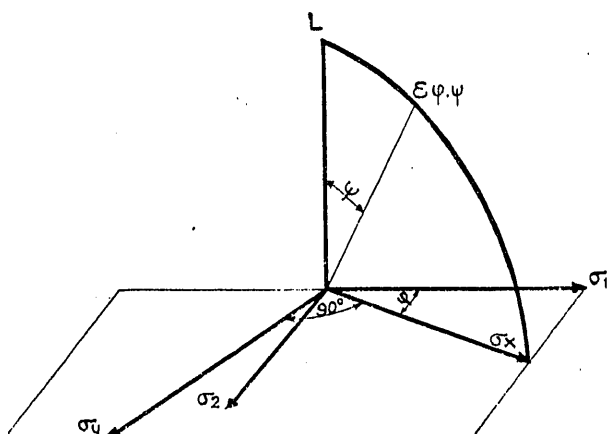


Figura 6.º

y para la deformación $\epsilon_{\varphi\psi}$ en una dirección (φ, ψ) , tendremos:

$$\epsilon_{\varphi\psi} = \epsilon_x \sin^2 \psi + \epsilon_p \cos^2 \psi = \epsilon_x \sin^2 \psi + \epsilon_p (1 - \sin^2 \psi), \quad [13]$$

y como:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \cos^2 \varphi + \epsilon_2 \sin^2 \varphi,$$

resulta:

$$\epsilon_{\varphi\psi} = \sin^2 \psi (\epsilon_1 \cos^2 \varphi + \epsilon_2 \sin^2 \varphi) + \epsilon_p (1 - \sin^2 \psi). \quad [14]$$

Las ecuaciones [13] y [14] se pueden escribir en tensiones mediante las ecuaciones [12], con lo que quedarán:

$$E \epsilon_{\varphi\psi} = \sigma_x [(1 + \nu) \sin^2 \psi - \nu] - \nu \sigma_y; \quad [13']$$

$$E \epsilon_{\varphi\psi} = -\nu (\sigma_1 + \sigma_2) + (1 + \nu) (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin \psi. \quad [14']$$

Restando de la [13'] la última de las [12], se elimina la componente σ_y ($\epsilon_{\varphi\psi}$ se designa ahora por ϵ_{ψ}) y queda una ecuación en σ_x :

$$E (\epsilon_{\psi} - \epsilon_p) = \sigma_x (1 + \nu) \sin^2 \psi, \quad [15]$$

que permite determinar una componente σ_x de tensión sobre la superficie, si se conocen dos deformaciones: una, ϵ_p , en la dirección normal a la superficie, y otra, ϵ_{ψ} , en el plano de la tensión σ_x y la normal, formando el ángulo ψ con esta última.

El ángulo ψ se toma próximo a 45° , por ser éste el valor más favorable.

La tensión σ_x puede expresarse en función de otras deformaciones cualesquiera sin que intervenga ϵ_p . Para ello no hay más que escribir la ecuación [13'] para dos valores de ψ distintos, y restarlas.

$$E (\epsilon_{\psi_1} - \epsilon_{\psi_2}) = \sigma_x (1 + \nu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2). \quad [16]$$

En esta ecuación han de introducirse, para el cálculo de σ_x , las deformaciones según las direcciones ψ_1 y ψ_2 . Para el conocimiento de las deformaciones sería preciso, teóricamente, el conocimiento de la longitud inicial d_0 del espaciado de los planos reticulares, pero en el cálculo se puede sustituir este valor por el hallado posteriormente, siendo la aproximación del orden de la milésima. La diferencia de deformaciones que se introduce en el primer miembro será, pues:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\psi_1} - \epsilon_{\psi_2} &= \frac{d_{\psi_1} - d_0}{d_0} - \frac{d_{\psi_2} - d_0}{d_0} = \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_0} \approx \\ &\approx \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}}. \end{aligned} \quad [17]$$

Las ecuaciones [15] y [16] hacen ver una diferencia esencial entre los métodos mecánicos y roentgenográficos. En los primeros, las deformaciones medidas están situadas en la superficie, y en los segundos, debajo de la misma.

En la determinación roentgenográfica de un espaciado hay que tener en cuenta que la dirección del espaciado medido no es la misma que la dirección de

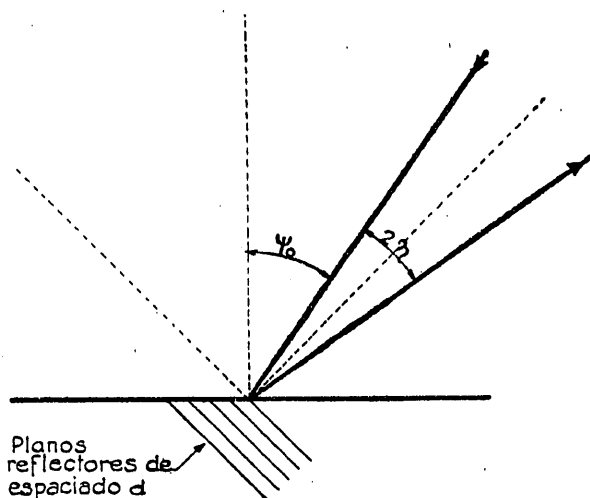


Figura 7.º

los rayos incidentes, sino que es la de la normal a los planos reflectores (fig. 7.º), y forma, por tanto, con ella, un ángulo $\eta = 90^\circ - \theta$. En los casos en que θ es muy próximo a 90° , este ángulo η es despreciable y la deformación medida se supone que está en la

dirección de irradiación. En otros casos, como luego veremos, la existencia de este ángulo sirve para sacar más conclusiones en un solo diagrama.

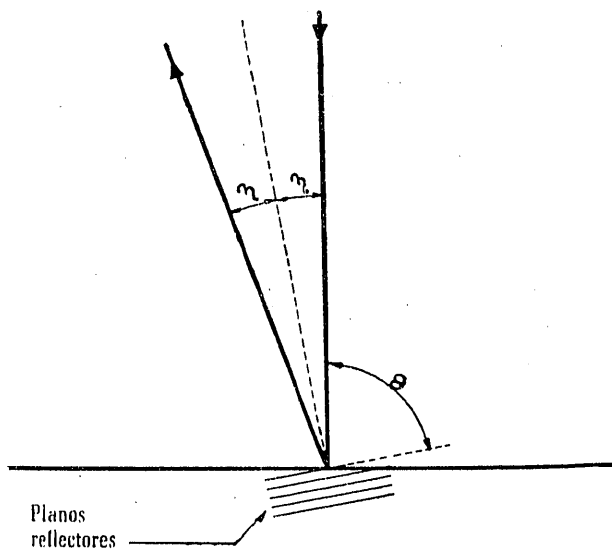


Figura 8.ª

En el caso de irradiación del material, según su normal, todos los puntos obtenidos del anillo Debye-Scherrer, corresponden a iguales espaciados, ya que

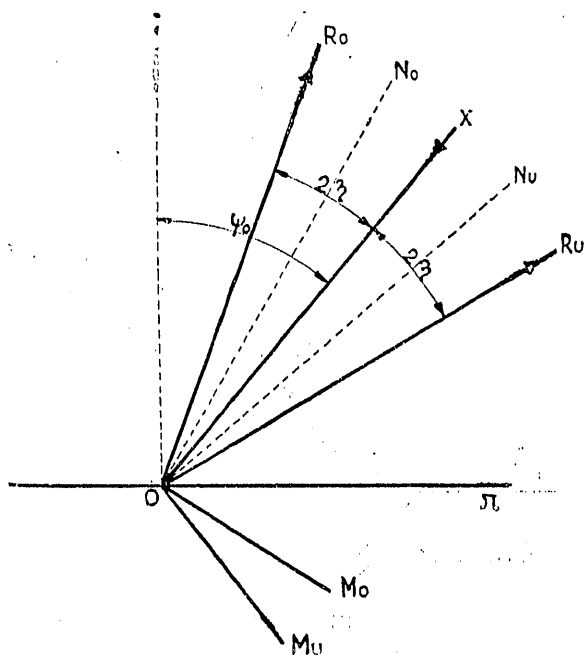


Figura 9.ª

la normal a la superficie es una dirección principal de deformación, y las direcciones que difieran de ella en el pequeño ángulo $\eta = 90^\circ - \theta$, corresponderán

a planos que sensiblemente tienen el mismo espaciado d_p (fig. 8.ª).

Por el contrario, en los diagramas con irradiación oblicua de dirección ψ_0 (fig. 9.ª), cada rayo reflejado corresponde a planos que, aunque sean cristalográficamente iguales, están orientados de distinta forma respecto a las deformaciones.

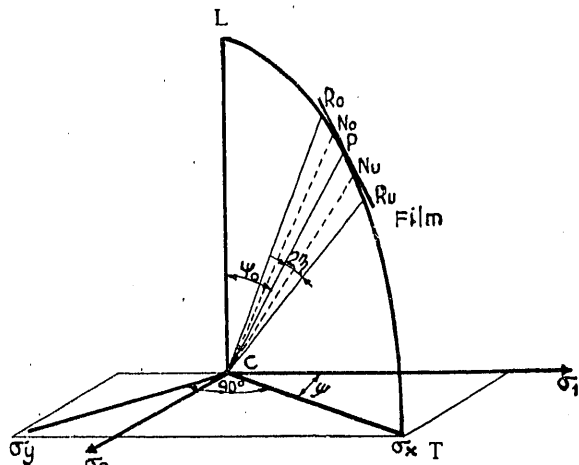


Figura 10.ª

En efecto: sea π (fig. 9.ª), el plano de la superficie del material; O , el punto de impacto del rayo incidente XO ; OR_0 y OR_u , los rayos reflejados a ambos lados y que forman con OX el ángulo $2\eta = 180^\circ - 2\theta$. Las normales ON_0 y ON_u a los planos reticulares interesados OM_0 y OM_u forman, pues, con la perpendicular a la superficie del material, los ángulos $\psi_0 - \eta$ y $\psi_0 + \eta$. Las dos rayas, derecha e izquierda del diagrama, corresponden, pues, a distintos ángulos de incidencia y representan, por tanto, los espaciados de planos perpendiculares a dos direcciones distintas. Para darse mejor

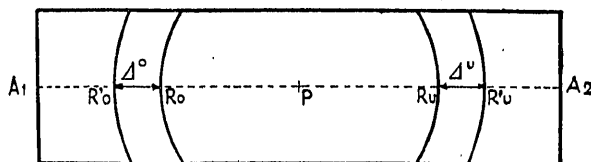


Figura 11.ª

cuenta de que estos espaciados, en distintas direcciones, son diferentes, puede hacerse una representación geométrica, como la de la figura 10, en la que el arco LPT es la intersección del plano vertical de la tensión σ_x que se quiere determinar con el elipsoide de deformaciones en esas direcciones, y se ve claramente que son distintas.

Las distancias de los puntos R_0 y R_u (fig. 11), de intersección de los anillos con el ecuador de la

película, al centro P del mismo, también serán distintas.

Como consecuencia, podemos decir que los dos lados de un diagrama oblicuo sirven para resolver la ecuación [16], sin más que sustituir en ella los valores $\psi_1 = \psi_0 - \eta$, $\psi_2 = \psi_0 + \eta$.

Número de diagramas necesario según el tipo de problemas de que se trate.

1.º Determinación de la suma de tensiones principales, según Sachs y Weerts (4) y (5), y Wever y Möller (10), (13) y (51), cuando se conoce el valor del espaciado d_0 en el caso libre de tensiones.

Una irradiación en la dirección de la normal basta para conocer el espaciado d_p y poder resolver la tercera de las ecuaciones [12], que se escribe así:

$$\frac{E(d_p - d_0)}{d_0} = -\nu(\sigma_1 + \sigma_2). \quad [18]$$

2.º Determinación de una componente de tensión σ_x , cuando no se conoce d_0 .

a) Según Gisen, Glocker y Osswald (21), (25) y (28), una irradiación normal y otra oblicua de ángulo ψ_0 con la normal, en el plano de σ_x , utilizando la ecuación [16], en la que se sustituyen los valores siguientes:

$$\psi_1 = \psi_0 + \eta; \quad \psi_2 = \eta; \quad \epsilon_{\psi_1} = \frac{d_{\psi_1} - d_0}{d_0};$$

con lo que queda:

$$E \left(\frac{d_{\psi_1} - d_0}{d_0} - \frac{d_p - d_0}{d_0} \right) = \sigma_x (1 + \nu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \eta) \quad [19]$$

y aproximadamente, puesto que $\sin \eta \approx 0$:

$$E \left(\frac{d_{\psi_1} - d_p}{d_0} \right) = \sigma_x (1 + \nu) \sin^2 \psi_1, \quad [20]$$

y todavía:

$$E \left(\frac{d_{\psi_1} - d_p}{d_p} \right) = \sigma_x (1 + \nu) \sin^2 \psi_1. \quad [21]$$

b) Según Glocker, Hess y Schaaber (39), mediante una irradiación oblicua de ángulo ψ_0 con la normal, en el plano de σ_x , utilizando la ecuación [16], en la que se sustituyen los valores siguientes:

$$\psi_1 = \psi_0 + \eta; \quad \psi_2 = \psi_0 - \eta; \quad \epsilon_{\psi_1} = \frac{d_{\psi_1} - d_0}{d_0};$$

$$\epsilon_{\psi_2} = \frac{d_{\psi_2} - d_0}{d_0};$$

con lo que queda:

$$E \left(\frac{d_{\psi_1} - d_0}{d_0} - \frac{d_{\psi_2} - d_0}{d_0} \right) = E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_0} = \sigma_x (1 + \nu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2), \quad [22]$$

y aproximadamente:

$$E \left(\frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} \right) = \sigma_x (1 + \nu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2). \quad [23]$$

Para $\psi_0 = 45^\circ$, que es lo que corrientemente se toma, resulta:

$$E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \sigma_x (1 + \nu) \sin 2\eta. \quad [24]$$

Schaal (61) demostró que errores de $\pm 5^\circ$ en el valor $\psi_0 = 45^\circ$, producen en la tensión σ_x , calculada por la última ecuación, errores menores de 1,5 %.

El procedimiento 2.º, b), es menos aproximado que el 2.º, a), pero tiene la ventaja de ser más rápido, pues no precisa más que una exposición.

Al estudiar las condiciones de focalización se ve que esta menor exactitud procede de que las dos mitades de los anillos Debye-Scherrer no queden igualmente definidos en la irradiación oblicua.

Tanto el procedimiento 2.º, a), como el 2.º, b), permiten calcular, además de las tensiones, el valor d_0 del espaciado de los planos reticulares en el estado inicial libre de tensiones, con tal de que se hayan aplicado a la determinación de las tensiones σ_x y σ_y en dos direcciones perpendiculares.

En efecto, consideremos el caso 2.º a): Representemos por d_x y d_y los valores de d_ψ , correspondientes a las dos direcciones perpendiculares. La ecuación [20], para cada uno de los dos casos, se escribirá:

$$E \frac{d_x - d_p}{d_0} = \sigma_x (1 + \nu) \sin^2 \psi_1,$$

y

$$E \frac{d_y - d_p}{d_0} = \sigma_y (1 + \nu) \sin^2 \psi_1,$$

que sumadas, y teniendo en cuenta la [18], nos conducen a:

$$d_0 = d_p + \frac{\nu}{(1 + \nu) \sin^2 \psi_1} (d_x + d_y - 2 d_p). \quad [25]$$

En el caso 2.º, b), se puede obtener del mismo modo la ecuación correspondiente.

3.º Determinación de las tensiones principales en magnitud y dirección, sin conocer d_0 .

Si se conocen *a priori*, por la forma de la pieza, las direcciones principales de tensión, estamos en el caso 2.º, pues se pueden medir las σ_1 y σ_2 , como hemos explicado que se medía una σ_x ó σ_y cualquiera.

Llamemos ahora ω al ángulo, desconocido de momento, que formarán las direcciones de σ_1 y σ_x (ya medida).

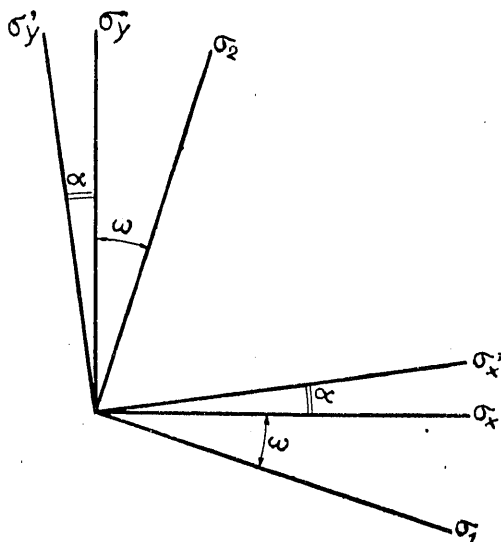


Figura 12.

Determinemos una tercera componente, de tensión σ'_x , que forme un ángulo α arbitrariamente elegido (fig. 12), con σ_x .

La componente σ'_y , perpendicular a σ'_x , no hay que determinarla, pues se deduce de la ecuación

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma'_x + \sigma'_y. \quad [26]$$

Entre estas cuatro componentes de tensión y las tensiones principales, existirán las siguientes relaciones:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \omega + \sigma_2 \sin^2 \omega; \quad [27]$$

$$\sigma_y = \sigma_2 \cos^2 \omega + \sigma_1 \sin^2 \omega; \quad [28]$$

$$\sigma'_x = \sigma_1 \cos^2 (\omega \pm \alpha) + \sigma_2 \sin^2 (\omega \pm \alpha); \quad [29]$$

$$\sigma''_y = \sigma_2 \cos^2 (\omega \pm \alpha) + \sigma_1 \sin^2 (\omega \pm \alpha). \quad [30]$$

Restando la [30] de la [29] y la [28] de la [27], se obtiene:

$$\sigma'_x - \sigma'_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos (2\omega \pm 2\alpha); \quad [31]$$

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\omega; \quad [32]$$

dividiendo la [32] por la [31], queda:

$$\nu = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma'_x - \sigma'_y} = \frac{\cos 2\omega}{\cos (2\omega \pm 2\alpha)}, \quad [33]$$

de donde:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \pm \frac{\nu \cos 2\alpha - 1}{\nu \sin 2\alpha}, \quad [34]$$

que permite calcular el ángulo desconocido ω . El signo $\pm$ se debe a que α y ω pueden tener sentidos opuestos.

Conocido ya ω , se pueden calcular los valores de σ_1 y σ_2 por las ecuaciones:

$$2\sigma_1 \cos 2\omega = \sigma_x (1 + \cos 2\omega) - \sigma_y (1 - \cos 2\omega), \quad [35]$$

y

$$2\sigma_2 \cos 2\omega = -\sigma_x (1 - \cos 2\omega) + \sigma_y (1 + \cos 2\omega). \quad [36]$$

A causa del signo $\pm$, colocado delante de la expresión de $\operatorname{tg} 2\omega$, los valores obtenidos para σ_1 y σ_2 son intercambiables. Para evitar esta incertidumbre, se puede hacer una última irradiación en una dirección contenida en un plano normal que contenga una de las tensiones. Este diagrama dará el valor de la tensión.

El número de diagramas en este tercer caso será, pues, de cuatro: los tres primeros para determinar σ_x , σ_y y σ'_x , y el último, para evitar la incertidumbre citada.

En los casos corrientes de la práctica, el número de diagramas es menor, porque de la forma de la pieza se pueden deducir las direcciones principales, y con dos irradiaciones oblicuas en los planos de estas direcciones, o con una normal y una oblicua, queda resuelto el problema.

Según se ha ido perfeccionando el método, se ha ido reduciendo el número de diagramas, con perjuicio de la precisión, naturalmente. Un anillo completo de Debye-Scherrer es suficiente para resolver el problema, ya que los distintos puntos del anillo corresponden a distintas direcciones de deformación (18) y (22). En el caso de irradiación normal no se puede seguir este camino, puesto que, como hemos dicho, la normal a la superficie es una dirección principal de la deformación, y las normales a los planos reflectores de la radiación (es decir, las direcciones de deformación correspondientes a los distintos puntos del anillo obtenido en este caso) pertenecen a deformaciones sensiblemente iguales, aunque no sea de revolución el elipsoide de deformación, por cortarle en puntos muy próximos al vértice. Las diferencias de deformación son, pues, excesivamente pequeñas en relación con la exactitud de los medios de medida.

En el caso de irradiación oblicua, estas diferencias

son mayores, y el procedimiento se puede aplicar con mayor probabilidad de éxito.

El procedimiento de Möller y Neerfeld (46), consiste en determinar la deformación en cuatro direcciones, correspondientes a cuatro puntos del anillo Debye-Scherrer, desfasados 90° entre sí. Estos puntos se eligen de modo que correspondan a las direcciones de deformación, que en la figura 13 están representadas por CO , CR , CU y CL . En general, la exactitud obtenida con un sólo cliché no suele ser suficiente para determinar simultáneamente la magnitud cuando se conocen sus direcciones. La máxima exactitud de σ_1 y σ_2 se logra (46), conocido φ , cuando se elige el ángulo $\psi_0 = 45^\circ$ para la dirección de los rayos.

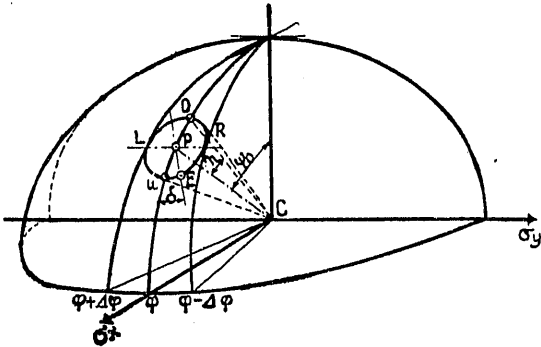


Figura 13.

Si con una inclinación de $\psi_0 = 45^\circ$ se hacen, siguiendo a Ståblein (52), dos irradiaciones de acimutes φ y $90^\circ + \varphi$, y se miden en los dos anillos las deformaciones correspondientes a los cuatro puntos dichos, distinguiendo con ' los del segundo diagrama, se llega, por el cálculo que damos a continuación, a poder determinar φ , σ_1 y σ_2 .

Según [17], tendremos:

$$\epsilon_u - \epsilon_0 = \frac{d^u - d^0}{d^0};$$

y como para ϵ_0 es $\psi = \psi_0 - \eta$, y para ϵ_u es

$\psi = \psi_0 + \eta$, podremos aplicar estos dos valores de ψ a la ecuación [14']:

$$\begin{aligned} E \epsilon_0 &= -\nu (\sigma_1 + \sigma_2) + (1 + \nu) (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 (\psi_0 - \eta); \\ E \epsilon_u &= -\nu (\sigma_1 + \sigma_2) + (1 + \nu) (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 (\psi_0 + \eta). \end{aligned}$$

Restando la primera de la segunda y teniendo en cuenta que $\psi_0 = 45^\circ$, se obtiene:

$$E \frac{d^u - d^0}{d^0} = (1 + \nu) (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin 2\eta. \tag{37}$$

Análogamente se obtendría para el otro cliché:

$$E \frac{d^{u'} - d^{0'}}{d^{0'}} = (1 + \nu) (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin 2\eta. \tag{38}$$

Por último, por ser para:

$$\epsilon_L \varphi_R = \varphi + \Delta x \quad \text{y} \quad \psi = \psi_0 = 45^\circ;$$

y para:

$$\epsilon_R \varphi_R = \varphi - \Delta x \quad \text{y} \quad \psi = \psi_0 = 45^\circ;$$

con $\Delta x = \sqrt{2\eta}$, se obtiene, por cálculo análogo al anterior, la ecuación

$$E \frac{d^L - d^R}{d^L} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\varphi \cdot \sin 2\sqrt{2}\eta. \tag{39}$$

Las ecuaciones [37], [38] y [39], permiten calcular φ , σ_1 y σ_2 . Por este procedimiento se determina, pues, la magnitud de las tensiones principales sin conocer sus direcciones, con una exactitud análoga a la lograda por la ecuación [23] para la determinación de una componente.