

CALCULO DE CABLES SUSTENTADORES

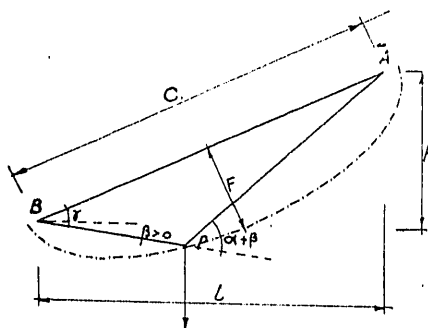
Por JOSÉ M.^a GONZÁLEZ DEL VALLE, Ingeniero de Caminos.

Se presenta a continuación un estudio completo del tema del epígrafe, en el que el autor llama la atención acerca de un error que se comete en los tratados sobre la materia, cuya importancia determina, por lo que lo consideramos de interés para quienes tengan ocasión, de desarrollar en sus trabajos cálculos de esta índole.

Cálculo de cables bajo la acción de una carga móvil aislada.

Un peso, P , recorre un cable, AB , de peso despreciable, desarrollo conocido y perfectamente flexible e inextensible. Se trata de averiguar la mayor tensión producida en él por acción de la fuerza P .

En la figura 1.^a se acotan las dimensiones y ángulos necesarios para el cálculo. Se han dibujado también la elipse que describe el punto P en su movimiento, y la curva que describe el vértice O , opuesto al lado P , base del triángulo de fuerzas.



Los dos vectores PA y PB forman, con el eje AB , ángulos iguales cuyo seno $= b$ y coseno $= e$, y tendremos:

$$\frac{T_{\max}}{P} = \frac{e \cos \gamma + b \sin \gamma}{2b \cdot e} = \frac{\cos \gamma}{2b} + \frac{\sin \gamma}{2e}.$$

Expresión sencilla que puede ponerse bajo la forma:

$$T_{\max} = P \left(\frac{\text{luz horizontal}}{4 \text{ flecha}} + \frac{\sin \gamma}{2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{4 \text{ flecha}}{\text{cuerda}} \right)^2}$$

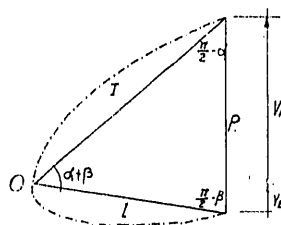


Figura 1.^a

De él se deduce inmediatamente:

$$\frac{T}{P} = \frac{\cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Los dos ángulos α y β son dependientes entre sí, y la determinación de su valor máximo con exactitud puede hacerse solamente por tanteos en una expresión muy complicada que carece de interés práctico. En un apéndice exponemos el procedimiento de cálculo.

Con objeto de simplificar las operaciones, supondremos que el máximo de la tensión T tiene lugar cuando P pasa por el extremo del eje menor de la elipse que describe. Hagamos:

$$\frac{\text{cuerda } AB = c}{\text{desarrollo}} = e \text{ (excentricidad de la elipse);}$$

$$\frac{2F}{\text{desarrollo}} = \frac{2F}{\sqrt{c^2 + 4F^2}} = b.$$

En la cual se echa de ver más fácilmente la influencia del desnivel de los puntos de retención.

Reacciones de los apoyos.

Del triángulo de fuerzas se deduce:

$$V_A = T \sin \alpha; \quad V_B = T \cos \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

La reacción en el apoyo superior no varía de signo. La del apoyo inferior es de signo contrario a la de A cuando $\beta < 0$.

La reacción en el apoyo inferior puede ser puesta también bajo la forma $V_B = t \sin \beta$.

Supongamos ahora que en el apoyo inferior se dispone un contrapeso, t , que fije el valor de la ten-

sión en dicho punto. Para la colocación del contrapeso suele elegirse el punto más bajo porque el ramal inferior presenta menor tensión que el superior. El estudio de este problema comprende tres partes: 1.^a, ecuación de la curva descrita por el punto móvil P ; 2.^a, tensión máxima en el ramal superior, y 3.^a, determinación del recorrido del contrapeso.

En la figura 2.^a se representan, a la izquierda, la disposición del sistema, y a la derecha, el triángulo

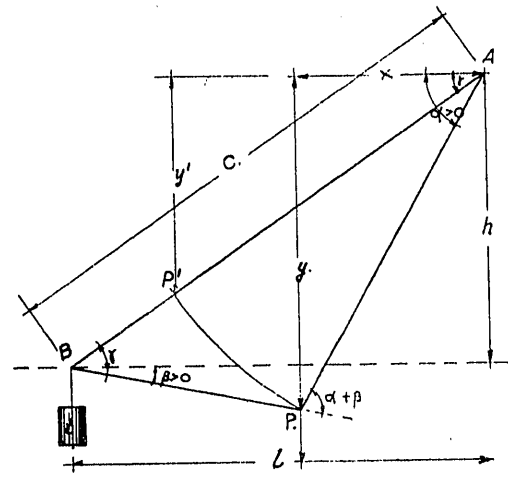


Figura 2.^a

de fuerzas. El vértice O , opuesto a la base P , describe un arco de círculo de radio t .

1.^o Ecuación de la trayectoria de P . — Del triángulo de fuerzas se deduce:

$$\frac{P}{T} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta.$$

La variable dependiente se elimina deduciendo su valor de la forma de equilibrio del cable:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{h + r \cdot \sin \beta}{1 - r \cdot \cos \beta};$$

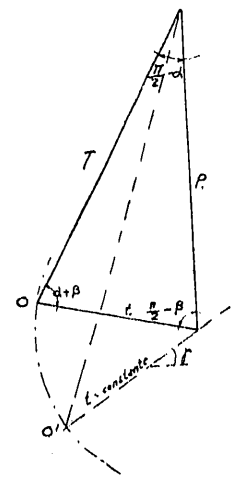
y llevando este valor a la ecuación anterior, tendremos:

$$\frac{P}{T} = \cos \beta \frac{h + r \cdot \sin \beta}{1 - r \cdot \cos \beta} - \sin \beta;$$

y despejando el valor de r , tendremos la ecuación polar:

$$r = l \left[\sec \beta - \frac{t}{P} (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \right].$$

Construcción gráfica de la curva por puntos (figura 3.^a). — Se traza una recta que pase por B y sobre ella se toma, a partir de la vertical de A , $CP = CA \cdot \frac{t}{P}$; el punto P es el de la curva buscada. En efecto: el triángulo APC es el polígono de fuerzas (la escala diferente para cada punto); pero la relación $\frac{t}{P} = \frac{CA}{CP}$ es constante.



La ecuación de la curva refleja exactamente esta construcción, ya que $r = BC - CP$.

El límite de la inclinación de PC corresponde al caso en que $\frac{LA}{LB} = \frac{t}{P}$; el peso móvil se encuentra en B . Esta posición límite se determina por la condición pre-

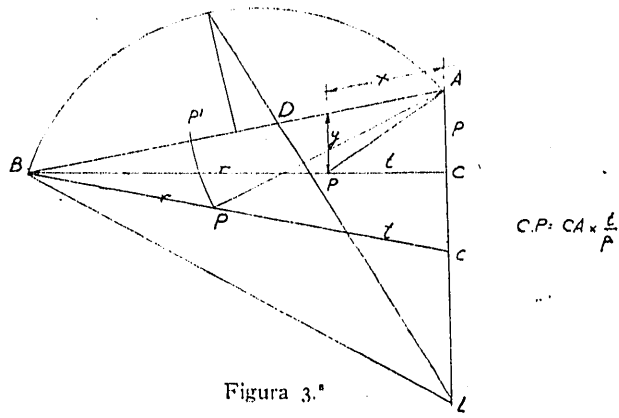


Figura 3.^a

dicha y se obtiene determinando el punto D que divide la cuerda AB en la relación $\frac{t}{P}$ y uniéndolo con el punto medio de cualquier arco de círculo que pase por

A y B . La recta LD será bisectriz del ángulo ALB y, por lo tanto, los lados LA y LB se encuentran en la relación $\frac{t}{P}$.

Si el punto L está por debajo de A , la construcción siempre es posible y el punto P puede recorrer todo el vano; pero si t es menor que P , el punto L cae por encima de A y el equilibrio solamente puede obtenerse en cierta zona a partir de A . Cuando BC se acerca a la vertical, la suma $BP + PA$ crece indefinidamente, el recorrido del contrapeso también y el sistema se desarmará si no se dispone tope que por reacción haga crecer el valor de t .

Determinación del contrapeso para una flecha dada.— Si se fija en un punto la flecha que ha de tomar el cable, se obtiene inmediatamente el valor de $\frac{t}{P}$ del triángulo APC . Numéricamente se obtiene de la ecuación de la trayectoria de P , en la cual se fijan los valores de r y β , y de ella se deduce el valor de $\frac{t}{P}$.

2.º **Tensión máxima en el ramal superior.**— A medida que P avanza de B hacia A , el lado t del triángulo de fuerzas gira en sentido descendente. La posición límite se alcanza cuando P está infinitamente próximo a A . El ángulo β tiende a $-\gamma$ y el máximo de T es:

$$T_{\max} = \sqrt{P^2 + t^2 + 2P \cdot t \sin \gamma}.$$

De esta expresión ha de deducirse el valor de t cuando los datos del problema son la tensión máxima y el peso P .

3.º **Recorrido del contrapeso.**— El extremo inferior de la carrera del contrapeso corresponde al cable descargado. Para averiguar el límite de la ascensión del contrapeso, obsérvese (fig. 2.ª) que si disponemos el peso en la cuerda AB en la posición P' , bajará hasta alcanzar la posición de equilibrio P , y en su movimiento describe un arco de círculo de centro A . El trabajo desarrollado por P en su descenso se emplea en subir el contrapeso t y su carrera será $= \frac{P}{t}(y - y')$. El problema se resuelve por tanteos.

Punto más bajo de la trayectoria de P .— El desnivel entre B y P es $r \cdot \sin \beta$; por lo tanto, hallaremos el valor que anula la derivada de esta expresión de la ecuación:

$$\frac{d(r \cdot \sin \beta)}{l \cdot d\beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{t}{P} (\sin \beta + \operatorname{tg} \sec \beta) = 0.$$

Ecuación cartesiana aproximada.

De la semejanza de triángulos en la figura 3.ª, se deduce:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BD}{AD} \quad y \quad \frac{AC}{y} = \frac{BC}{BP};$$

o sea:

$$\frac{r}{t} = \frac{c-x}{x} \quad y \quad \frac{P}{y} = \frac{r+t}{r};$$

si de la primera de estas igualdades deducimos el valor de r y lo sustituimos en el numerador de la segunda, tendremos:

$$y = \frac{P}{t} \cdot \frac{rx}{c}.$$

En muchos casos, y para ciertas posiciones de P , el valor de r difiere poco de $c - x$ y puede escribirse:

$$y = \frac{P}{t} \cdot \frac{x(c-x)}{c} (*);$$

fórmula aproximada que se empleará con las restricciones que el buen sentido dictare en cada caso.

Casos en que el peso del cable sea de importancia.

El peso P (fig. 4.ª) está equilibrado por las tensiones CA y CB , paralelas a las tangentes en P a las dos catenarias que se cortan allí y forman ángulo. Si sustituimos las catenarias por parábolas, las cuerdas PA y PB son paralelas a las tangentes en los puntos medios de los dos tramos en que se subdivide el vano estudiado. Ahora bien: $MP + mP$ componen la mi-

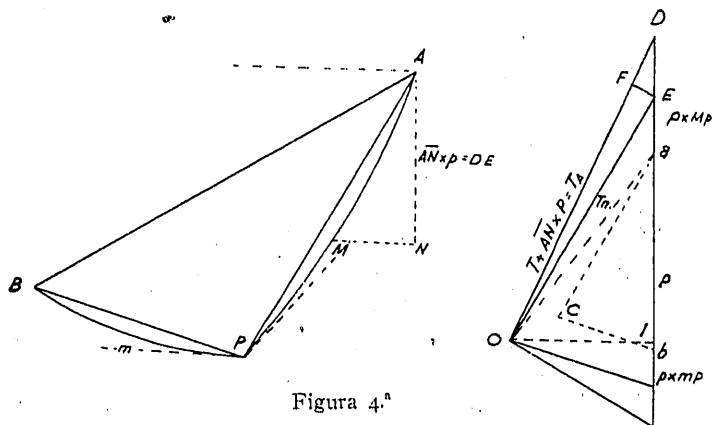


Figura 4.ª

(*) Esta fórmula se halla en el *Manual* de Hütte, si bien no indica que es solamente aproximada.

tad del desarrollo del cable y, por lo tanto, en todas las fórmulas establecidas ha de sustituirse el valor de P por su suma con la mitad del peso del cable, y los resultados que se obtienen de ellas corresponden a los puntos medios M y m .

La tensión en el punto más alto se obtiene de la tensión en M , sumándole el peso de la diferencia de ordenadas $AN \cdot p$ (p es el peso unitario del cable).

Medida directa de las tensiones de los cables.

Sea un trozo de cable de peso conocido, que se encuentra en equilibrio por la acción de las tensiones OA y OB (fig. 5.^a) en sus extremos. Estas tensiones difieren entre sí menos de 1 por 100, y por lo tanto puede suponerse que la cuerda AB es paralela a la bisectriz del ángulo AOB , cuya mitad es igual al ángulo en C inscrito en el círculo osculador BAC .

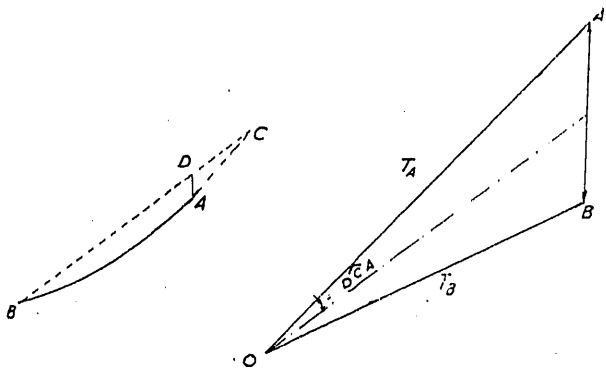


Figura 5.^a

Si se levanta en A la vertical que corta en D la cuerda AB , la semejanza de triángulos da:

$$\text{Tensión } OA = \frac{\text{peso de } AB}{2} \cdot \frac{AC}{AD}.$$

Una manera muy práctica de medir la tensión consiste en señalar en el cable los puntos A y B , distantes entre sí la longitud que pesa 20 Kg. En A se coloca una reglilla, que se mantiene vertical por medio de un pequeño contrapeso. La reglilla se gradúa con los números 4, 2, 1, a las distancias 2,5 cm., 5 centímetros y 10 cm. El observador busca en el cable el punto C , desde el cual se ve el B , enrasado con una de las divisiones. El producto del número de la división, multiplicado por la distancia AC en centímetros, da la tensión del cable en kilogramos.

La exactitud de los resultados obtenidos es grande, a pesar de la sencillez del procedimiento.

A P É N D I C E

Determinación exacta de la tensión máxima en cable con retenciones fijas.

La determinación de la tensión máxima es de utilidad práctica nula, por lo muy laboriosa que es y lo poco que el máximo teórico difiere del práctico. La marcha de su cálculo es así:

La ecuación

$$\frac{P}{T} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

ha de ser puesta en función de una sola variable, y para ello se deduce el valor de $\operatorname{tg} \beta$ en función de r y α , coordenadas polares de la elipse descrita, tomando como polo el punto A y como eje polar la cuerda AB . De la figura 1.^a se deduce inmediatamente:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \alpha - h}{l - r \cos \alpha};$$

y llevando este valor a la ecuación anterior, tendremos:

$$\frac{P}{T} = \sin \alpha - \cos \alpha \frac{h - r \sin \alpha}{l - r \cos \alpha};$$

en la cual, $r = f(\alpha)$.

La relación que liga r con α es la ecuación polar de la elipse descrita por P , y si designamos por e su excentricidad, dicha ecuación es:

$$r = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos(\alpha - \gamma)},$$

y por tanto:

$$\frac{P}{T} = \sin \alpha - \cos \alpha \frac{h[(1 - e \cos(\alpha - \gamma))] - b^2}{L[(1 - e \cos(\alpha - \gamma))] - b^2}.$$

Para hallar el máximo (mínimo de $\frac{P}{T}$), "basta" derivar esta expresión y hallar el valor de α que anula la derivada.

En los tratados suele decirse que el máximo real es el que hemos llamado "práctico", y aun puede citarse una "demostración" de que ambos máximos se confunden. Es curioso que se haya intentado demostrar cosa que fácilmente se ve que es falsa. En efecto: derivando la expresión fundamental, se tiene:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dT}{d\beta} = \frac{-\sin \beta \sin(\alpha + \beta) - \cos \frac{d \sin(\alpha + \beta)}{d\beta}}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

Cuando P pasa por el extremo del eje menor de la

elipse, la suma $(\alpha + \beta)$ es máxima y su seno también. Por lo tanto, el numerador de la derivada se anulará solamente en el caso particular en que el ramal inferior sea horizontal cuando P pasa por el extremo del eje menor. Los casos generales se reducen a dos:

1.º El extremo del eje menor está más bajo que la retención inferior (B).

El primer sumando es negativo; luego para que se anule el numerador ha de ser positivo el segundo. Ahora bien: $\cos \beta$ es siempre positivo; luego ha de ser negativo el segundo factor. Ordinariamente, $\beta + \alpha$ es menor de un cuadrante; luego $\sin(\beta + \alpha)$ es máximo y su diferencial de signo contrario a $d\beta$; luego para que el segundo sumando sea aditivo, es preciso que sea positivo $d\beta$, y la posición de P que produce el máximo estará más próxima a A que a B (y esto aunque el vano sea horizontal).

2.º El extremo del eje menor está más alto que la retención B .

El ángulo β es negativo; el primer sumando, también. Para que la suma sea nula, es preciso que sea positivo el segundo sumando, lo cual exige que sea negativo $d\beta$ y el máximo corresponde a un punto más próximo a B que a A .

Para dar idea del error, al tomar el máximo práctico por el exacto, hagamos un ejemplo numérico con una elipse de semieje mayor = 1, excentricidad $c = 0,98$, $b^2 = 0,0396$. Ecuaciones:

$$\rho = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \omega}; \quad \cos = \frac{\rho - 0,0396}{\rho \cdot 0,98};$$

$$\frac{T'}{P} = \frac{\cos(\omega - \gamma)}{\sin(\omega + \omega')}.$$

ρ	ρ'	$\cos \omega$	$\cos \omega'$	ω	ω'	$\sin(\omega + \omega')$	$\cos(50^\circ - \omega)$	$\gamma = 0$	$\gamma = 50^\circ$
1,000	1,000	0,98000	0,98000	12,75	12,75	0,39007	0,83364	2,51237	2,13715
1,005	995	98020	97980	12,69	12,82	39007		2,51288	
1,010	990	98040	97959	12,63	12,88	39007		2,51340	
1,015	985	98060	97938	12,56	12,95	39007		2,51391	
1,020	980	98079	97918	12,50	13,01	39007		2,51439	
1,030	970	98118	97875	12,37	13,15	39022			2,14520
1,040	960	98155	97832	12,25	13,28	39036			
1,070	930	98264	97696	11,88	13,69	39094	84171		2,15304
1,080	920	98299	97649	11,76	13,83	39123	84298		2,15469
1,100	900	98367	97551	11,52	14,12	39195	84534		2,15675
1,200	800	98673	96990	10,38	15,66	39772	85801		2,15732
1,300	700	98932	96268	9,31	17,45	40808	87211		2,13710

Con apoyos a nivel, el máximo tiene lugar a la fracción 0,5075 de la luz, y los máximos están en la relación $\frac{2\,513,39}{2\,512,37} = 1,0008$, error inferior a uno por mil.

Con inclinación de 50° , el máximo tiene lugar a 0,40 de la luz, y la relación de máximos $\frac{2\,517,32}{2\,137,15} = 1,0094$, próximamente 1 por 100.