

ABACO PARA EL CALCULO DE LA CARGA CRITICA EN EL BORDE

Por FERNANDO VALENCIANO POLACK, Ingeniero de Caminos.

El autor traduce en un ábaco la fórmula de Fröhlich para determinar la carga crítica en el borde y con ello el coeficiente de seguridad que conviene adoptar con respecto a los asientos de terrenos. Para ilustrar al lector, se presenta también en el presente artículo la deducción de la mencionada fórmula.

Uno de los problemas fundamentales de la Mecánica del Suelo es el de la carga unitaria práctica que puede aplicarse sobre el terreno, sin que se originen asientos excesivos.

El concepto de asiento excesivo no tiene evidentemente una definición invariable, sino que depende de las características de la estructura soportada por el terreno.

Una estructura hiperestática de edificación, muy rígida, puede sufrir averías graves a causa de los asientos correspondientes a la consolidación normal del terreno, y la determinación de la carga unitaria práctica deberá basarse, por lo tanto, en obras tales, en la consideración de estos asientos.

Es mucho más frecuente, sin embargo, el caso en el que la estructura soportada — que puede ser una edificación, un vehículo, una obra de tierra, etc. — no queda afectada en sus cualidades de estabilidad y resistencia por dichos asientos, relativamente pequeños. En estos casos, la carga unitaria práctica se fija, a veces, partiendo de la carga de rotura, es decir, de aquella que produciría un hundimiento brusco del cuerpo sustentado. La carga unitaria práctica es una fracción de la carga de rotura.

Con todo, queda pendiente el problema de fijar el denominador de esa fracción, es decir, el coeficiente de seguridad. Su valor depende de la importancia del caso, incertidumbre de las hipótesis de carga, características de la estructura soportada, etc., pero también habría de variarse teniendo en cuenta las características del suelo.

Examinando el proceso de asiento de un terreno, cuando la carga aplicada sobre él crece paulatinamente, se aprecia que, en una primera parte, los asientos producidos crecen de un modo aproximadamente proporcional a la carga aplicada.

Más tarde aparecen asientos mayores de los correspondientes a dicha proporcionalidad. En este momento, el equilibrio elástico anteriormente existente en todos los puntos del terreno, desaparece en algunas zonas, quedando sustituido por un equilibrio plástico. En estas zonas se presenta el fenómeno de fluencia, el terreno fluye.

En un área uniformemente cargada, esta zona plástica, como veremos más adelante, se inicia en el borde de aquella, y la carga correspondiente a la iniciación se llama "carga crítica en el borde".

Si, de manera análoga a lo que se busca en el examen de las condiciones de resistencia de otros materiales, pretendemos evitar la aparición de fenómenos plásticos, limitándonos a aplicar las solicitaciones que producen solamente deformaciones elásticas en cada uno de los puntos del sólido cargado, no cabe duda de que la "carga crítica en el borde" es el valor al que ha de referirse, por medio de un coeficiente de seguridad, la carga práctica que puede aplicarse. Este criterio ha sido enunciado por primera vez por Fröhlich (1).

La expresión de esta carga crítica de borde, es algo compleja. En el caso más general de un suelo con cohesión, adopta la forma:

$$q_{t,r} = \frac{\pi (\gamma t + p_k)}{\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right)},$$

en cuya fórmula:

$q_{t,r}$ = carga crítica de borde para una cimentación a la profundidad t .

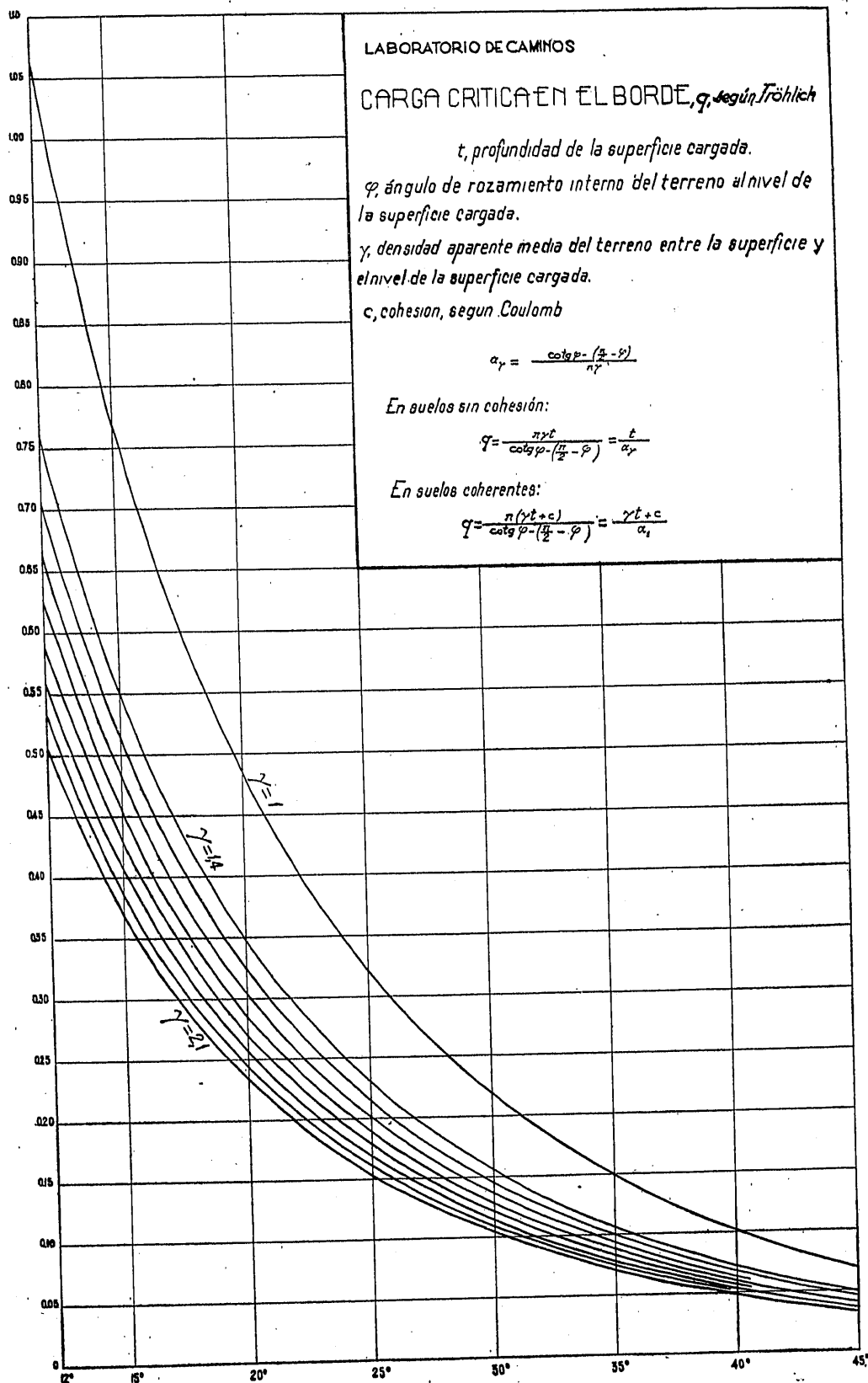
γ = peso específico del terreno sobre la solera del cimiento.

φ_r = ángulo de rozamiento interno del terreno debajo de la solera.

p_k = cohesión.

Como la aplicación de esta fórmula es laboriosa, por intervenir funciones circulares junto con arcos, y no ser, además, calculable directamente por logaritmos, resulta poco apta para tanteos rápidos de la profundidad a que se debe cimentar. Y por eso se han

(1) Dr. Ing. O. K. Fröhlich: "La repartición de presiones en el terreno de cimentación con especial examen del fenómeno de plasticidad". Traducción de Manuel Carrasco. Madrid, 1942.



elaborado los presentes ábacos que permiten rápidamente hacer el cálculo.

Vamos a explicar la deducción de la mencionada fórmula, debida a Fröhlich, sin pretender, de ningún modo, que su deducción sea original, con objeto de poder apreciar, conociendo su origen y desarrollo, su valor de aplicación.

La condición de fluxión para un cuerpo cualquiera, se expresa por una relación entre las tensiones principales en un punto del cuerpo y las constantes de la materia de que se trate. Esta relación ha de determinarse en cada caso, pero según Mises, ha de ser de la forma:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Si consideramos un estado plano de tensión, solamente habrá que considerar dos tensiones principales en cada punto, σ_1 y σ_3 .

Toda teoría sobre la distribución de tensiones en el interior de un terreno está basada en considerar a dicho terreno como una materia homogénea o isótropa. Boussinesq y Michell fueron los que establecieron la teoría de las tensiones producidas en el interior de un macizo semiindefinido por una fuerza aislada actuando en un punto del contorno. De las fórmulas a que llegaron pueden sacarse una serie de conclusiones prácticas, de las cuales las más importantes son:

1.ª Las tensiones son independientes del módulo de elasticidad del material e influye poco en su valor el módulo de Poisson.

2.ª Si la superficie exterior del cuerpo es horizontal, las tensiones en las secciones planas horizontales también son independientes del módulo de Poisson y son las mismas para todos los sólidos elásticos e isótropos, cualesquiera que sean sus características mecánicas.

3.ª En el caso de sólidos incompresibles, la tensión producida en un punto tiene dirección radial, tomando como centro el punto de aplicación de la carga, y los esfuerzos a lo largo de una isostática son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia al punto de aplicación de la carga.

Michell demuestra, además, que aun en el caso de cuerpos compresibles, esta última conclusión es aproximadamente verdadera.

La extensión de dichas conclusiones es válida si existe proporcionalidad entre cargas y deformaciones, aunque éstas no sean puramente elásticas, sino en parte permanentes, quedando en este último caso limitada la validez de las fórmulas al ensayo a que primeramente fué sometido el cuerpo. El módulo de elasticidad constante habría que sustituirlo entonces por un módulo constante de deformación.

Partiendo de estos principios, vamos a pasar a la deducción de la fórmula de Fröhlich.

Sea un terreno de cohesión, p_k ; φ_r , su ángulo de

rozamiento interno, y γ , su peso específico. El peso propio crea un campo de fuerzas, cuyas isostáticas son rectas, verticales y horizontales, y las tensiones vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{z, g} &= \gamma z; \\ \sigma_{h, g} &= \zeta \cdot \gamma \cdot z;\end{aligned}$$

siendo ζ el llamado coeficiente de compresión estática, que es la relación entre las tensiones producidas en la dirección normal a la carga y en la dirección de la misma. Si suponemos $\zeta = 1$ para mayor sencillez:

$$\sigma_{z, g} = \sigma_{h, g} = \gamma z.$$

El campo producido por la carga constante, g , es de dos dimensiones y viene determinado por las dos tensiones principales en cada punto:

$$\sigma_1 = \frac{g}{\pi} (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon);$$

$$\sigma_2 = \frac{g}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon).$$

La forma de deducir este campo es la siguiente: se parte de los valores de las tensiones debidas a una carga, g , vertical uniformemente repartida a lo largo de una recta. Si dividimos la faja uniformemente cargada en elementos infinitamente pequeños y hallamos las tensiones en cada punto debidas a cada uno de es-

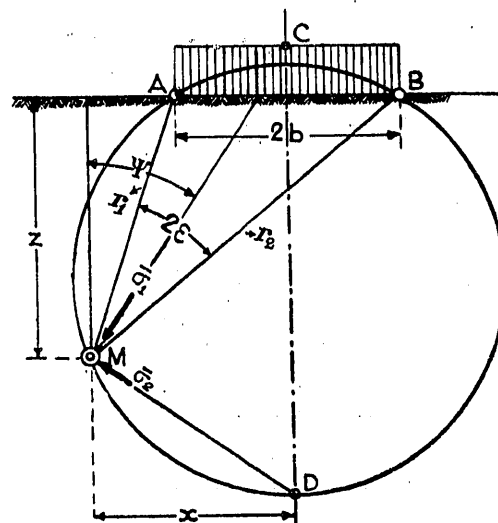


Figura 1.ª

tos elementos y luego integramos en toda la anchura de la faja, obtendremos las tensiones producidas en cada punto por la carga en faja. Y luego, por las conocidas fórmulas de la elasticidad, pasamos a hallar

las tensiones principales, que son las indicadas anteriormente y dirigidas según el esquema adjunto (fig. 1.^a) (1).

Conocidas, pues, las tensiones producidas por cada uno de los campos actuantes, podemos hallar las tensiones totales principales en cada punto, que son:

$$\sigma'_1 = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon) + \gamma z;$$

$$\sigma'_2 = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon) + \gamma z.$$

Si estas tensiones las sustituimos en la relación de Mises, obtenemos ya la condición de flujo.

Esta relación puede obtenerse por medio del diagrama de Möhr (fig. 2.^a).

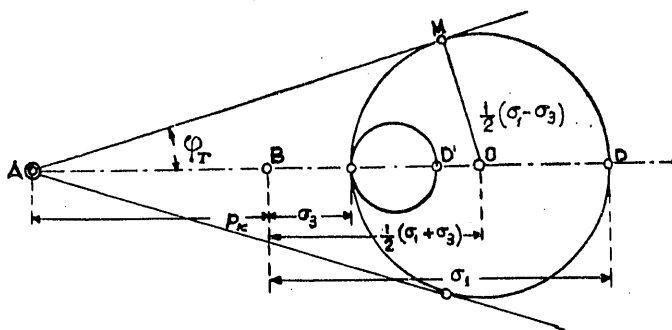


Figura 2.^a

Sean σ_1 y σ_2 las tensiones principales provocadas en un terreno en todas direcciones y que mide la fuerza de cohesión. Las tensiones totales serán:

$$\sigma'_1 = p_k + \sigma_1;$$

$$\sigma'_2 = p_k + \sigma_2.$$

Con estas tensiones dibujamos el diagrama de Mohr. Si suponemos un estado inicial en el que $\sigma_1 = \sigma_2$, el círculo de Mohr queda reducido a un punto. Si a partir de este instante, σ_1 va creciendo y σ_2 permanezca constante, el círculo va aumentando en diámetro y llega un momento en el que su circunferencia es tangente a una recta que, partiendo del origen de abscisas, forma con dicho eje el ángulo φ_r , de rozamiento interno de las tierras. Para este valor de σ_1 hay un plano de deslizamiento, que forma el ángulo $(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2})$ con el eje mayor de la elipse de tensiones, y para el cual la tensión en cuestión forma el ángulo φ_r , de rozamiento con la normal a la superficie. Por el más mínimo crecimiento de la tensión σ_1 , em-

pieza ya el deslizamiento en esta superficie, que es precisamente el comienzo de la fluencia. Por lo tanto, si logramos encontrar una relación entre las tensiones en ese momento y las constantes de la materia, tendremos establecida la condición de plasticidad. Esta relación se halla simplemente por el solo examen de la figura:

$$OM = OA \sin \varphi_r;$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \left[p_k + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \sin \varphi_r;$$

que es la condición de fluencia para terrenos con coherencia cuando se les somete a un crecimiento lento de carga.

Si sustituimos en esta condición las tensiones halladas anteriormente, obtenemos:

$$\frac{q}{\pi} \sin 2\varepsilon = \left[p_k + \gamma z + 2 \frac{q}{\pi} \varepsilon \right] \sin \varphi_r;$$

que es la ecuación buscada del límite entre la zona plástica y la elástica para la faja cargada uniformemente.

Si se considera ahora una masa sin cohesión y se resuelve según z , resulta:

$$z = \frac{q}{\pi \gamma} \left(\frac{\sin 2\varepsilon}{k} - 2\varepsilon \right).$$

El valor máximo de z se obtiene, como es natural, de hacer:

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = 0;$$

$$\frac{2 \cos 2\varepsilon}{K} - 2 = 0;$$

o sea:

$$\cos 2\varepsilon = K = \sin \varphi_r;$$

y por lo tanto:

$$2\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi_r;$$

y sustituyendo en el valor de z se obtiene:

$$z_{\max} = \frac{q}{\pi \gamma} \left[\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right) \right].$$

Si el cimiento está situado a una profundidad t , evidentemente el campo producido por el peso de las tierras no será γz , sino $\gamma(z + t)$ (1), y sustituyendo

(1) Puesto que empiezan a medirse las ordenadas desde la superficie libre del terreno.

(1) Para este desarrollo véase la obra citada de Fröhlich.

en la condición de plasticidad y procediendo como anteriormente, obtenemos para este caso:

$$z_{\max} = \frac{q_t}{\pi \gamma} \left[\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right) \right] - t.$$

Conocida esta ecuación, vamos a determinar la carga uniforme de una faja para la cual la zona de plasticidad sea nula. En este caso se ha de tener:

$$z_{\max} = 0;$$

o sea:

$$\frac{q_t}{\pi \gamma} \left[\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right) \right] - t = 0;$$

$$q_{t,r} = \frac{\pi \gamma t}{\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right)},$$

que es la carga crítica de borde. Este valor resulta independiente de la anchura de la faja. Fué obtenido en el supuesto del problema plano, pero como se refiere al momento en el que la zona plástica puede ser considerada como infinitamente pequeña, vale igualmente para superficies cargadas, tanto circulares como en faja, independientemente del diámetro de la misma e incluso para superficies elípticas. El cálculo conduce a esta misma ecuación, aunque se suponga que la carga $q_{t,r}$ obtenida sólo existe en los bordes, creciendo o decreciendo hacia dentro.

Si se trata de terrenos coherentes, la presión al nivel de la solera será $(\gamma t + p_k)$, en lugar de γt , y, por lo tanto, la carga crítica de borde será:

$$q_{t,r} = \frac{\pi (\gamma t + p_k)}{\cot \varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r \right)}.$$

Sobre el eje de abscisas vienen representados ángulos de rozamiento desde 12° a 45° , gama más que suficiente para los terrenos que normalmente se encuentran. En el de ordenadas se encuentran los valores de α . Estos α valen:

$$\alpha = \frac{\cot \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\pi \gamma};$$

es decir, el inverso de q para profundidad de 1 m. Se han hallado los valores inversos de q por comodidad de representación.

Para cada densidad de terreno variando entre

$\gamma = 1,4$ y $\gamma = 2,1$, existe una curva. También se ha dibujado otra para $\gamma = 1$, que sirve para hallar la carga crítica de borde en aquellos terrenos que tengan cohesión. En efecto, si $\gamma = 1$:

$$\alpha_1 = \frac{\cot \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\pi};$$

y por lo tanto:

$$q = \frac{\gamma t + C}{\alpha_1}.$$

Ejemplos:

1.º Hallar la carga crítica de borde en una cimentación a 3,50 m. de profundidad sobre el terreno cuyo ángulo de rozamiento interno vale $\varphi = 32^\circ$, y cuya densidad $\gamma = 1,7$.

Por el punto de abscisa $\varphi = 32^\circ$, trazamos una vertical hasta cortar a la curva $\gamma = 1,7$, y trazando una horizontal por ese punto, obtenemos:

$$\alpha = 0,112;$$

y, por lo tanto:

$$q_{t,r} = \frac{3,5}{0,112} = 31,24 \text{ Tn./m.}^2 = 3,125 \text{ Kg./cm.}^2.$$

2.º El caso anterior, pero con cohesión $c = 5$ toneladas por metro cuadrado. Por el punto de abscisa $\varphi = 32^\circ$, trazamos una vertical hasta cortar a la curva $\gamma = 1$, y trazando una horizontal por ese punto, obtenemos:

$$\alpha_1 = 0,19;$$

y por lo tanto:

$$q_{t,r} = \frac{1,7 \cdot 3,50 + 5}{0,19} = \frac{10,95}{0,19} = 65,10;$$

es decir:

$$q_{t,r} = 6,51 \text{ Kg./cm.}^2.$$

3.º ¿A qué profundidad hay que cimentar en un terreno sin cohesión de $\varphi = 28^\circ$ y $\gamma = 1,6$ para que la carga crítica de borde sea igual a 3 Kg./m.²?

Para:

$$\varphi = 28^\circ; \gamma = 1,6; \alpha = 0,16; q = \frac{t}{0,16}.$$

Por lo tanto, si:

$$q = 30 \text{ Tn./m.}^2; t = 0,16 \times 30 = 4,8 \text{ m.}$$