

SINTESIS DEL PROCEDIMIENTO ORIGINAL PARA EL CALCULO DE ESTRUCTURAS RETICULARES

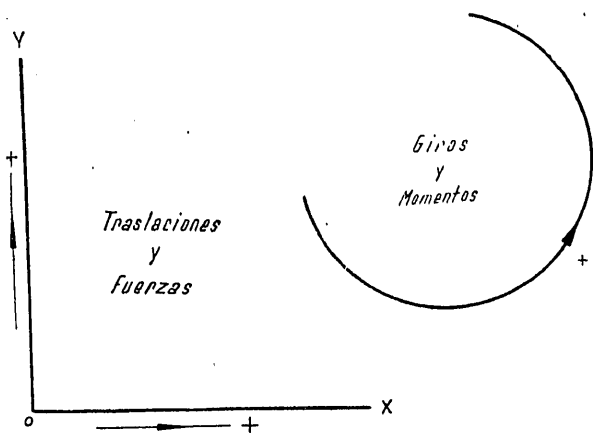
LECCIONES EXPLICADAS EN LA ESCUELA DE CAMINOS

Por MIGUEL GARCIA ORTEGA, Ingeniero de Caminos.

Nos complace dar a conocer a nuestros lectores una síntesis del notable trabajo de nuestro compañero Sr. García Ortega, que fué objeto del premio "Francisco Franco", y que en la forma que transcribimos a continuación fué expuesto por el propio autor en nuestra Escuela Especial.

Estudiaremos primero la barra aislada y después aplicaremos los resultados obtenidos a la barra considerada como elemento de la estructura.

Adoptaremos como valores positivos los siguientes:



Además, suponemos positivos los acortamientos y las compresiones, y por consiguiente, los valores negativos indicarán tracciones y alargamientos.

Barra aislada.

Representaremos por:

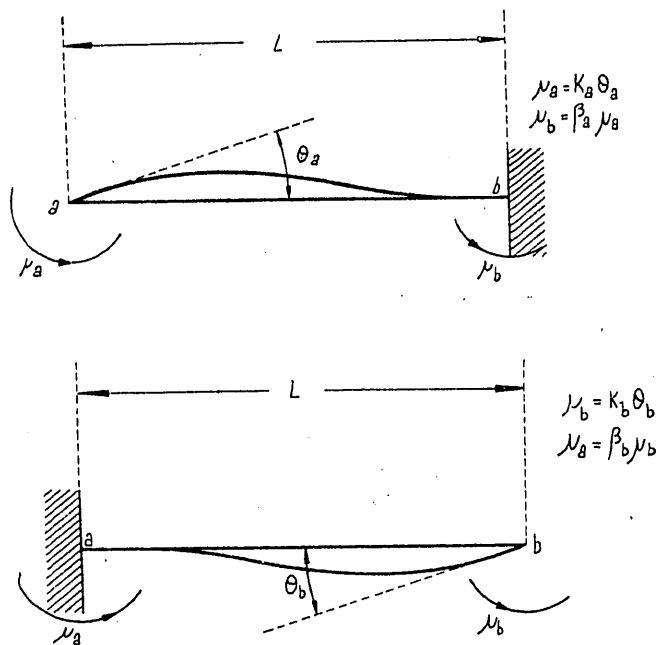
k_a la rigidez correspondiente al nudo a .

k_b la rigidez correspondiente al nudo b .

β_a el coeficiente de transmisión de momentos correspondiente al nudo a .

β_b el coeficiente de transmisión de momentos correspondiente al nudo b .

verificándose, según sabemos:

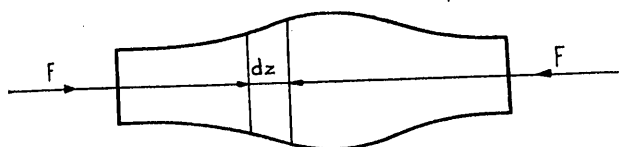


Nos interesa conocer los efectos producidos por los movimientos de cada uno de los extremos de la barra, considerando sucesivamente el giro, y el desplazamiento según la paralela y la normal a la directriz, introduciendo un solo grado de libertad, distinto en cada caso, en la barra con extremos completamente inmóviles.

Mediante la aplicación de los teoremas de Mohr y de la ley de Hooke, se obtienen fácilmente las reacciones producidas en uno de los extremos, el a , por ejemplo, por los movimientos de a y de b , resultando el siguiente cuadro:

MOVIMIENTOS		REACCIONES UNITARIAS EN a		
		Momentos	FUERZAS	
			Paralelas a la directriz (H)	Normales a la directriz (V)
En a .	Giro: $\theta_a = 1$	k_a	—	$\frac{k_a(1 + \beta_a)}{L}$
	Traslación. . .	—	$\frac{E_0 S_0}{L}$	—
		Paralela a la directriz: $\delta_a = 1$	$\frac{k_a(1 + \beta_a)}{L}$	$\frac{k_a(1 + \beta_a) + k_b(1 + \beta_b)}{L^2}$
		Normal a la directriz: $\Delta_a = 1$	—	$\frac{k_b(1 + \beta_b)}{L}$
En b .	Giro: $\theta_b = 1$	$k_b \beta_b$	—	—
	Traslación. . .	—	$-\frac{E_0 S_0}{L}$	—
		Paralela a la directriz: $\delta_b = 1$	$-\frac{k_a(1 + \beta_a)}{L}$	$-\frac{k_a(1 + \beta_a) + k_b(1 + \beta_b)}{L^2}$
		Normal a la directriz: $\Delta_b = 1$	—	—

La determinación de k_a , k_b , β_a y β_b , es un problema conocido, cuya resolución no ofrece dificultad, y en cuanto a S_0 , su significado y determinación resultan de las siguientes consideraciones:



Una pieza prismática cualquiera, sometida a compresión simple, sufre un acortamiento:

$$\delta = F \int_0^L \frac{dz}{Es};$$

y si la barra fuera homogénea a lo largo de la directriz, con coeficiente de elasticidad E_0 y sección constante S_0 , el acortamiento valdría:

$$\delta = F \frac{L}{E_0 S_0}.$$

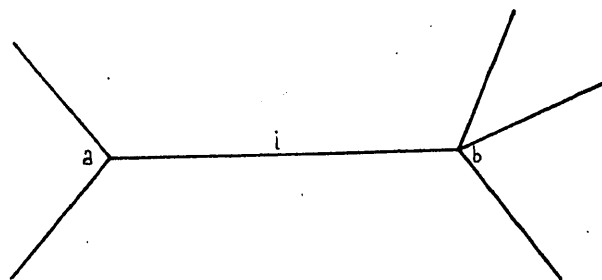
El acortamiento será el mismo en el caso general que en el particular, considerado cuando se verifique:

$$S_0 = \frac{L}{E_0 \int_0^L \frac{dz}{Es}};$$

valor que denominaremos *sección virtual*, correspondiente al coeficiente de elasticidad E_0 , y que nos permite resolver el caso general de compresión simple como el particular de barra homogénea a lo largo de la directriz y de sección constante.

La barra como elemento de la estructura.

Para claridad en la exposición, teniendo en cuenta que han de figurar varias barras y nudos, emplearemos la siguiente notación, con la que fácilmente se indica la barra o nudo de que se trata.



Consideremos la barra i comprendida entre los nudos a y b .

El valor V del nudo a se representa por V_a .

El valor V del nudo b se representa por V_b .

El valor V de la barra i , correspondiente al nudo a , por $V_{a/b}$.

El valor V de la barra i , correspondiente al nudo b , por $V_{b/a}$.

El valor V de la barra i , independiente de los nudos, o que valga lo mismo cualquiera que sea el nudo que se considere, por V_i , o también por $V_{a/b}$ o $V_{b/a}$.

Para simplificar, emplearemos también la siguiente notación:

$$\left(\frac{E_0 S_0}{L} \right)_i = t_i = t_{a/b} = t_{b/a},$$

que representa la fuerza correspondiente a un acortamiento de valor uno.

$$(k_a \beta_a)_i = (k_b \beta_b)_i = c_i = c_{a/b} = c_{b/a}$$

que representa el momento en la extremidad empotrada, correspondiente a un giro de valor uno en la otra, libertad para el giro. La igualdad $k_a \beta_a = k_b \beta_b$ es una consecuencia inmediata del teorema de Maxwell.

$$\frac{k_a (1 + \beta_a)}{L} = \frac{k_a + c_i}{L} = \varphi_{a/b},$$

que representa el cociente resultante de dividir por la luz, la suma de los momentos en la extremidad b empotrada y en la a libre, correspondientes a un giro de valor uno en ésta.

$$\frac{k_b (1 + \beta_b)}{L} = \frac{k_b + c_i}{L} = \varphi_{b/a},$$

con significación análoga a la anterior.

$$\frac{k_a (1 + \beta_a) + k_b (1 + \beta_b)}{L^2} = \frac{k_a + k_b + 2 c_i}{L^2} =$$

$$= \frac{1}{L} (\varphi_{a/b} + \varphi_{b/a}) = f_i = f_{a/b} = f_{b/a},$$

que representa el cociente resultante de dividir por el cuadrado de la luz la suma de los momentos en la extremidad b empotrada y en la a libre, más la de los momentos en la a empotrada y en la b libre, correspondientes a giros de valor uno en los extremos libres.

Cuando la barra sea homogénea a lo largo de la directriz y de sección constante, resulta:

$$t_i = \frac{ES}{L};$$

$$k_i = k_{a/b} = k_{b/a} = 4 \frac{EI}{L};$$

$$\beta_i = \beta_{a/b} = \beta_{b/a} = \frac{1}{2};$$

$$c_i = 2 \frac{EI}{L};$$

$$\varphi_i = \varphi_{a/b} = \varphi_{b/a} = 6 \frac{EI}{L^2};$$

$$f_i = 12 \frac{EI}{L^3}.$$

Conviene notar que:

β , es un número abstracto.

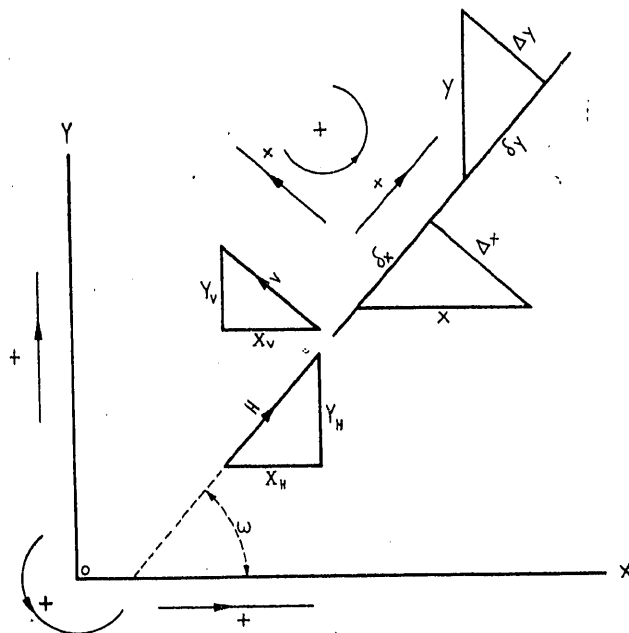
k , tiene las dimensiones de un momento.

c , tiene las dimensiones de un momento.

φ , tiene las dimensiones de una fuerza.

f , tiene las dimensiones de una fuerza por unidad de longitud.

t , tiene las dimensiones de una fuerza por unidad de longitud.



Si referimos la estructura a dos ejes coordenados rectangulares y designamos por X e Y las componentes de las fuerzas sobre los ejes, para una barra cualquiera puede escribirse:

$$X_H = H \cos w \quad X_V = -V \sin w$$

$$Y_H = H \sin w \quad Y_V = V \cos w$$

y mediante estas fórmulas, las reacciones unitarias en a pueden referirse a las componentes X e Y , resultando, al emplear la notación convenida, el siguiente cuadro:

Movimientos	REACCIONES UNITARIAS EN a		
	Momentos	Componentes X	Componentes Y
En a $\left\{ \begin{array}{l} \theta_a = 1 \\ \delta_a = 1 \\ \Delta_a = 1 \end{array} \right.$	$k_{a/b}$	$-\varphi_{a/b} \sin w_{a/b}$	$\varphi_{a/b} \cos w_{a/b}$
	t	$t \cos w_{a/b}$	$t \sin w_{a/b}$
	$\varphi_{a/b}$	$-f \sin w_{a/b}$	$f \cos w_{a/b}$
En b $\left\{ \begin{array}{l} \theta_b = 1 \\ \delta_b = 1 \\ \Delta_b = 1 \end{array} \right.$	c	$-\varphi_{b/a} \sin w_{a/b}$	$\varphi_{b/a} \cos w_{a/b}$
	t	$-t \cos w_{a/b}$	$-t \sin w_{a/b}$
	$-\varphi_{a/b}$	$f \sin w_{a/b}$	$-f \cos w_{a/b}$

Por tanto, las reacciones producidas en a por los movimientos $\theta_a, \delta_a, \Delta_a, \theta_b, \delta_b$ y Δ_b , son:

$$\begin{aligned} Md_{a/b} &= k_{a/b} \theta_a + c \theta_b + \varphi_{a/b} (\Delta_a - \Delta_b); \\ Xd_{a/b} &= -\varphi_{a/b} \theta_a \operatorname{sen} w_{a/b} - \varphi_{b/a} \theta_b \operatorname{sen} w_{a/b} + \\ &+ t (\delta_a - \delta_b) \cos w_{a/b} - f (\Delta_a - \Delta_b) \operatorname{sen} w_{a/b}; \\ Yd_{a/b} &= \varphi_{a/b} \theta_a \cos w_{a/b} + \varphi_{b/a} \theta_b \cos w_{a/b} + \\ &+ t (\delta_a - \delta_b) \operatorname{sen} w_{a/b} + f (\Delta_a - \Delta_b) \cos w_{a/b}. \end{aligned}$$

Considerando que $\delta = \delta_a - \delta_b$ es el acortamiento de la barra, si Nd es la compresión correspondiente, se verifica:

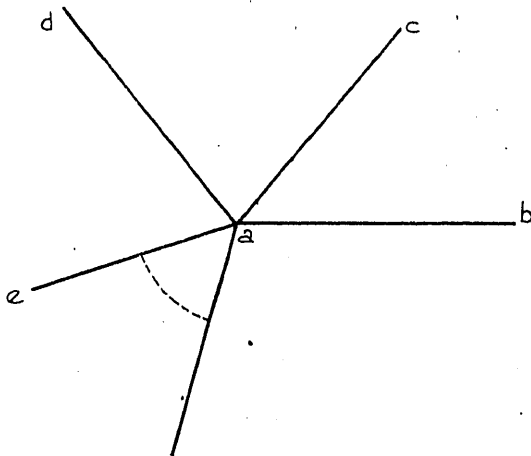
$$Nd = t \delta = \frac{E_0 S_0}{L} \delta;$$

y si representamos por $\Delta = \Delta_a - \Delta_b$ la componente de la deformación normal a la directriz, se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} Md_{a/b} &= k_{a/b} \theta_a + c \theta_b + \varphi_{a/b} \Delta; \\ Xd_{a/b} &= -(\varphi_{a/b} \theta_a + \varphi_{b/a} \theta_b) \operatorname{sen} w_{a/b} - \\ &\quad - f \Delta \operatorname{sen} w_{a/b} + Nd \cos w_{a/b}; \\ Yd_{a/b} &= (\varphi_{a/b} \theta_a + \varphi_{b/a} \theta_b) \cos w_{a/b} + \\ &\quad + f \Delta \cos w_{a/b} + Nd \operatorname{sen} w_{a/b}. \end{aligned} \right\} [1]$$

Estudio de la estructura.

Consideremos un nudo, a , en el que concurren las barras $a b, a c, a d, a e, \dots$



Para que este nudo esté en equilibrio, es preciso que sea nula la resultante de todas las reacciones que sobre él actúan y que dividimos en dos grupos: las debidas a las fuerzas exteriores, suponiendo completamente inmóviles los nudos $a, b, c, d, e, \dots$; es decir, perfectamente empotradas las barras $a b, a c, a d,$

$a e, \dots$, y las debidas a los movimientos de los nudos $a, b, c, d, e, \dots$. Las primeras, para una barra cualquiera, $a i$, las representaremos por $Me_{a/i}, Xe_{a/i}, Ye_{a/i}$, y las segundas son $Md_{a/i}, Xd_{a/i}, Yd_{a/i}$.

Las ecuaciones de equilibrio del nudo a son:

$$\begin{aligned} Md_a + Me_a &= 0; \\ Xd_a + Xe_a &= 0; \\ Yd_a + Ye_a &= 0; \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} Md_a &= \Sigma Md_{a/i} = Md_{a/b} + Md_{a/c} + Md_{a/d} + Md_{a/e} + \dots \\ Xd_a &= \Sigma Xd_{a/i} = Xd_{a/b} + Xd_{a/c} + Xd_{a/d} + Xd_{a/e} + \dots \\ Yd_a &= \Sigma Yd_{a/i} = Yd_{a/b} + Yd_{a/c} + Yd_{a/d} + Yd_{a/e} + \dots \\ Me_a &= \Sigma Me_{a/i} = Me_{a/b} + Me_{a/c} + Me_{a/d} + Me_{a/e} + \dots \\ Xe_a &= \Sigma Xe_{a/i} = Xe_{a/b} + Xe_{a/c} + Xe_{a/d} + Xe_{a/e} + \dots \\ Ye_a &= \Sigma Ye_{a/i} = Ye_{a/b} + Ye_{a/c} + Ye_{a/d} + Ye_{a/e} + \dots \end{aligned}$$

En definitiva, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse así:

$$\left. \begin{aligned} K_a \theta_a + \Sigma c \theta_i + \Sigma \varphi_{a/i} \Delta + Me_a &= 0; \\ \Sigma Nd \cos w_{a/i} - \Sigma f \Delta \operatorname{sen} w_{a/i} - \Sigma (\varphi_{a/i} \theta_a + \\ &\quad + \varphi_{i/a} \theta_i) \operatorname{sen} w_{a/i} + Xe_a = 0; \\ \Sigma Nd \operatorname{sen} w_{a/i} + \Sigma f \Delta \cos w_{a/i} + \Sigma (\varphi_{a/i} \theta_a + \\ &\quad + \varphi_{i/a} \theta_i) \cos w_{a/i} + Ye_a = 0; \end{aligned} \right\} [2]$$

comprendiendo las sumas representadas por Σ los valores correspondientes a todas las barras concurrentes en a y representando por K_a la suma $\Sigma k_{a/i}$.

Si en el nudo a hubiera una sustentación que produjera determinados movimientos, serían conocidos θ_a, x_a ó y_a — nulos en las sustentaciones corrientes —, en cuyo caso, en el sistema [2] se prescindiría de la primera, segunda o tercera ecuación, respectivamente.

Estas ecuaciones de las cuales se prescinde, modificadas, sirven para determinar las reacciones producidas por la sustentación, una vez conocidos los movimientos de los nudos.

Efectivamente: si en el nudo a hay una sustentación, debe producir la reacción de empotramiento más la de deformación, y, por lo tanto, si las reacciones producidas por la sustentación las representamos por Mr_a, Xr_a, Yr_a , la primera, segunda o tercera ecuación del sistema [2] debe ser sustituida por:

$$\left. \begin{aligned} Mr_a &= Md_a + Me_a \\ Xr_a &= Xd_a + Xe_a \\ Yr_a &= Yd_a + Ye_a \end{aligned} \right\} [3]$$

según que el movimiento determinado sea θ_a, x_a ó y_a , respectivamente.

La determinación de las reacciones en los extremos de las barras, supuestas perfectamente empotradas, no ofrece dificultad, ni, por lo tanto, la de Me_a , Xe_a e Ye_a .

Suponemos, por el momento, conocido el acortamiento de las barras que, teniendo en cuenta que:

$$\delta_x = x' \cos w,$$

$$\delta_y = y \sin w,$$

vale:

$$\delta = \delta_a - \delta_b = (x_a - x_b) \cos w_{a/b} + (y_a - y_b) \sin w_{a/b} \quad [4]$$

En la mayor parte de los casos pueden suponerse acortamientos nulos, porque esta hipótesis se aparta muy poco de la realidad y el error que produce es despreciable; sin embargo, más adelante estudiaremos los casos en que se deban considerar los acortamientos.

Si se disponen sustentaciones que ocasionen en los nudos n_s movimientos determinados, se obtienen n_s ecuaciones análogas a las [3], que deben sustituir a las correspondientes de los sistemas [2].

Por consiguiente, en una estructura de n nudos y n_b barras, el número total de ecuaciones es:

De los sistemas [2].....	$3n - n_s$
De las sustentaciones—sistemas [3]—.....	n_s
De los acortamientos—ecuaciones [4]—...	n_b
Total.	$3n + n_b$

Las ecuaciones [2] y [3] relacionan las condiciones geométricas y mecánicas de la estructura; las [4], solamente condiciones geométricas.

Teniendo en cuenta que:

$$\Delta_x = -x \sin w,$$

$$\Delta_y = y \cos w,$$

resulta:

$$\Delta = \Delta_a - \Delta_b = (y_a - y_b) \cos w_{a/b} - (x_a - x_b) \sin w_{a/b} \quad [5]$$

Si suponemos expresadas las Δ en función de las traslaciones, por medio de las relaciones [5], y representamos por n'_θ y n'_t el número de giros y traslaciones, respectivamente, determinados por las sustentaciones, el número de incógnitas es:

Reacciones	$n_s = n'_\theta + n'_t$	} $3n - n_s$
Giros.	$n_\theta = n - n'_\theta$	
Traslaciones.	$n_t = 2n - n'_t$	
Compresiones.	n_b	
Total.	$3n + n_b$	

Las n_s reacciones se calculan por las n_s ecuaciones [3], una vez conocida la deformación, puesto que entonces son conocidas Md , Xd e Yd por las relaciones [1]; los giros, las traslaciones y las compresiones,

se calculan por medio de las ecuaciones [2] y [4]. Como ni los giros ni las compresiones forman parte de las ecuaciones [4], han de calcularse por los sistemas [2], que proporcionan, además,

$$n_{x+y} = [3n - (n'_\theta + n'_t)] - [(n - n'_\theta) + n_b] = n_t - n_b$$

traslaciones, calculándose las restantes por las ecuaciones [4].

Si $n_b = n_t$, $n_{x+y} = 0$, y las n_t traslaciones se calculan por medio de las ecuaciones [4], es decir, considerando solamente las condiciones geométricas; la situación de los nudos está determinada sin necesidad de acudir a las ecuaciones de deformación, tratándose, por lo tanto, de una estructura isostática.

Si $n_b < n_t$, hay que determinar $n_{x+y} = n_t - n_b$ traslaciones por medio de las ecuaciones de deformación, tratándose de una estructura hipostática de grado $n_t - n_b$.

Si $n_b > n_t$, $n_{x+y} = -(n_b - n_t)$, es negativo, lo que nos dice que en los sistemas [2] faltan $n_b - n_t$ ecuaciones; como compensación, en el formado por las ecuaciones [4] hay $n_b - n_t$ ecuaciones más que incógnitas. Concretándonos a las expresiones [4], $n_b - n_t$ ecuaciones del sistema que forman, o son incompatibles con las n_t restantes, en cuyo caso la estructura no puede existir, o son consecuencia de ellas, y entonces no hay, en realidad, más que n_t relaciones diferentes. En resumen, faltan en el sistema general $n_b - n_t$ ecuaciones, y para resolverlo es preciso considerar los acortamientos como desconocidos y expresarlos en función de las compresiones; pero el procedimiento que entonces debe seguirse no lo explicaremos en estas lecciones, porque corresponde al método que, en nuestra exposición general del cálculo de estructuras, denominamos riguroso, y que no tenemos ahora tiempo para desarrollar.

Por consiguiente, sólo consideraremos las estructuras isostáticas o hipostáticas. Veamos la manera de resolver el sistema de ecuaciones rápidamente y con facilidad.

Prescindiremos, de momento, de las ecuaciones [3], que no nos interesan para conocer la deformación, operando con el sistema formado por las [2] y [4], y determinando, por medio de las [4], n_b traslaciones en función de las restantes, denominando a estas últimas *traslaciones principales*; mediante las oportunas sustituciones, resultan las ecuaciones [2] expresadas en función de las traslaciones principales, con exclusión de las restantes, sustituciones que son facilísimas dada la sencillez de las expresiones [5], y también es muy sencilla la determinación de n_b traslaciones en función de las principales, por serlo igualmente las ecuaciones [4], y la facilidad de ambas operaciones

aumenta cuando se trata de barras horizontales o verticales.

A continuación, como entre las segundas y terceras ecuaciones [2] suman $2n - n'_t = n_t$ ecuaciones, y hay n_b compresiones, podemos eliminar éstas en $n_t - n_b$ ecuaciones, resultando el sistema siguiente:

n_θ ecuaciones de la forma:

$$K_a \theta_a + \sum c \theta_i + Q_a(\rho, \rho', \rho'', \dots) + Me_a = 0$$

$n_t - n_b$ ecuaciones de la forma:

$$\Omega'(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \rho, \rho', \rho'', \dots, Xe_1, Xe_2, Xe_3, \dots, Ye_1, Ye_2, Ye_3, \dots) = 0$$

[6]

n_b ecuaciones de la forma:

$$\Omega''(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \rho, \rho', \rho'', \dots, Xe_1, Xe_2, Xe_3$$

$$\dots, Ye_1, Ye_2, Ye_3, \dots, Nd_j, Nd_{j'}, Nd_{j''}, \dots) = 0 \quad [7]$$

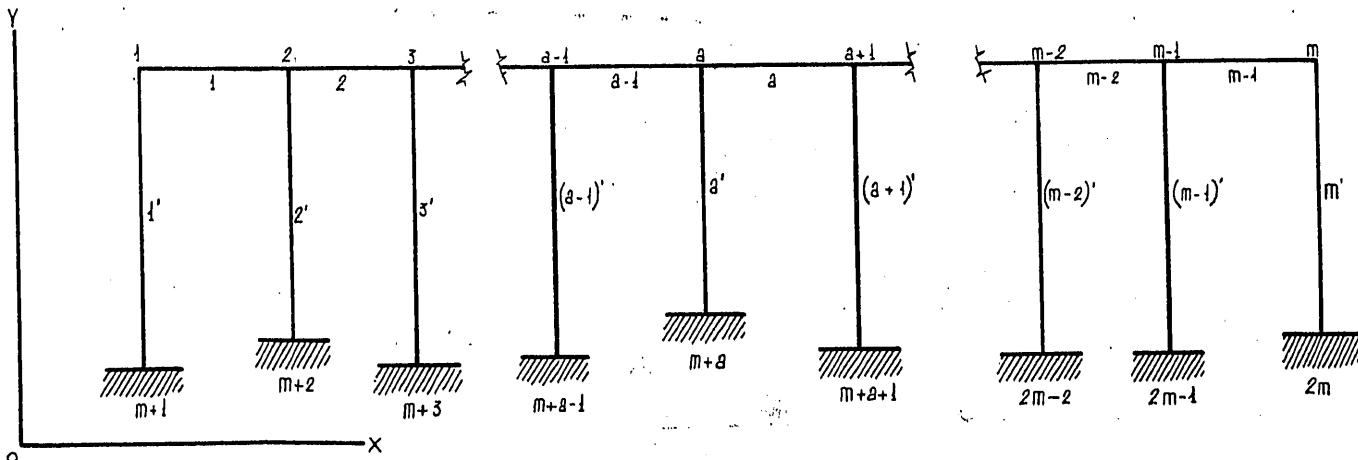
siendo Ω_a , Ω' y Ω'' , funciones lineales; ρ , ρ' , ρ'' , ..., las traslaciones principales, y Nd_j , $Nd_{j'}$, $Nd_{j''}$, ... las compresiones.

La eliminación de las Nd es muy sencilla en las estructuras empleadas corrientemente en la construcción.

El problema se reduce ahora a resolver el sistema formado por las ecuaciones [6], con lo que resultarán conocidos los n_θ giros y las $n_t - n_b$ traslaciones principales; después, por medio de las expresiones [4], determinaremos las n_b traslaciones restantes, y sirviéndonos de las ecuaciones [7], las compresiones, si nos interesan.

Para fijar ideas, y antes de exponer el procedimiento a seguir para resolver de una manera práctica el sistema [6], vamos a considerar un pórtico múltiple y una estructura de edificio.

Supongamos un pórtico de pilares empotrados, designando cada nudo y cada barra por un número, de la manera que se indica:



El dintel $a/a + 1$, comprendido entre los nudos a y $a + 1$, lo designaremos por a y un valor $V_{a/a+1} = V_{a+1/a}$, correspondiente a esta barra, por V_a . El pilar $a/m + a$, comprendido entre los nudos a y $m + a$ lo designaremos por a' y un valor $V_{a/m+a} = V_{m+a/a}$, correspondiente a esta barra, por V'_a .

Las expresiones [4] toman la forma:

$$\delta_a = x_a - x_{a+1} \text{ para el dintel } a;$$

$$\delta'_a = -y_a \text{ para el pilar } a';$$

y las [5]:

$$\Delta_a = y_a - y_{a+1} \text{ para el dintel } a;$$

$$\Delta'_a = x_a \text{ para el pilar } a'.$$

Como el número de traslaciones principales es:

$$n_{x+y} = n_t - n_b = 2n - n'_t - n_b = 4m - 2m - (2m - 1) = 1;$$

se trata de una estructura hipostática de primer orden, y tomando como única traslación principal la x del nudo 1, $x_1 = x$; la x de un nudo cualquiera, a , puede expresarse inmediatamente en función de la traslación principal:

$$x_a = x_{a-1} - \delta_{a-1} = x_{a-2} - \delta_{a-2} - \delta_{a-1} = \dots = x - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_{a-1}),$$

y la y es conocida:

$$y_a = -\delta'_a;$$

valores que, suponiendo acortamientos nulos, se convierten en los siguientes:

$$x_a = x;$$

$$y_a = 0,$$

con cuyas relaciones tenemos expresadas todas las traslaciones en función de las principales.

Las ecuaciones [2], expresadas en función de las traslaciones principales, con exclusión de las restantes, para acortamientos nulos, teniendo en cuenta que

$\Delta_a = 0$ y $\Delta'_a = x$, toman la siguiente forma, aplicadas al nudo a :

$$\left. \begin{aligned} K_a \theta_a + c_{a-1} \theta_{a-1} + c_a \theta_{a+1} + \varphi_{a/m+a} x + M e_a &= 0; \\ - N d_{a-1} + N d_a + f'_a x + \varphi_{a/m+a} \theta_a + X e_a &= 0; \\ - N' d_a + (\varphi_{a/a+1} - \varphi_{a/a-1}) \theta_a - \varphi_{a-1/a} \theta_{a-1} + \varphi_{a+1/a} \theta_{a+1} + Y e_a &= 0. \end{aligned} \right\} [2']$$

$$\left. \begin{aligned} n_\theta &= m \text{ ecuaciones de la forma: } K_a \theta_a + c_{a-1} \theta_{a-1} + c_a \theta_{a+1} + \varphi_{a/m+a} x + M e_a = 0 \\ n_t - n_b &= 2m - (2m - 1) = 1; \text{ ecuación de la forma: } x \sum f'_i + \sum \varphi_{i/m+i} \theta_i + \sum X e_i = 0 \end{aligned} \right\} [6']$$

$$n_b = 2m - 1 \left\{ \begin{aligned} m-1, & \text{ ecuaciones de la forma: } -N d_{a-1} + N d_a + f'_a x + \varphi_{a/m+a} \theta_a + X e_a = 0; \\ m, & \text{ ecuaciones de la forma: } -N' d_a + (\varphi_{a/a+1} - \varphi_{a/a-1}) \theta_a - \varphi_{a-1/a} \theta_{a-1} + \varphi_{a+1/a} \theta_{a+1} + Y e_a = 0, \end{aligned} \right\} [7']$$

Comprendiendo las Σ desde $i = 1$ a $i = m$.

Resuelto el sistema formado por las ecuaciones [6'], resultan conocidos los giros y la traslación principal, y como $x_a = x$ y $y_a = 0$, son conocidas todas las traslaciones.

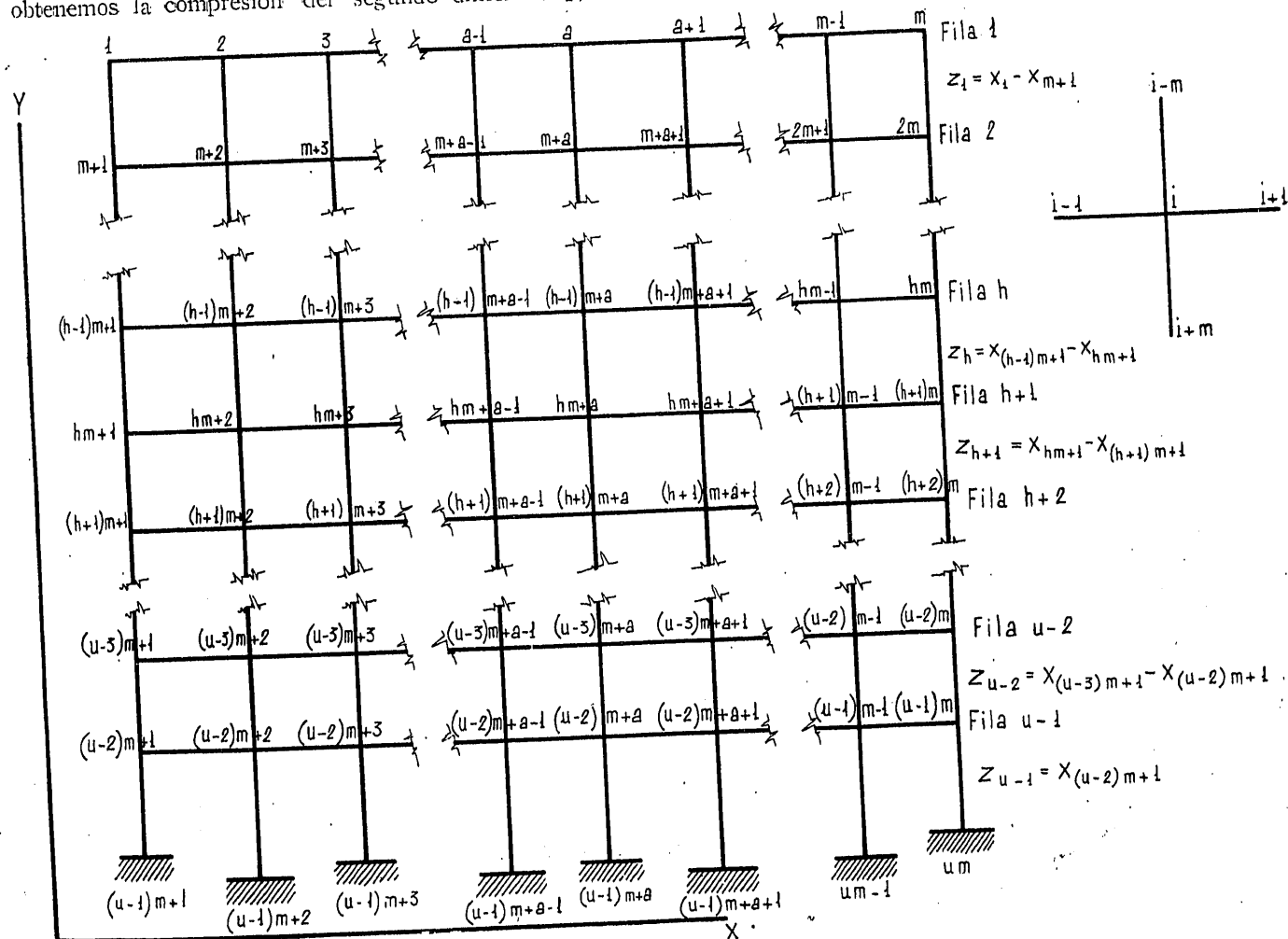
La primera ecuación [7'], aplicada al nudo 1, nos proporciona la compresión del primer dintel, $N d_1$; conocida ésta, aplicada la misma ecuación al nudo 2, obtenemos la compresión del segundo dintel, $N d_2$;

Para eliminar las compresiones entre las segundas y terceras ecuaciones [2'], no hay más que sumar, miembro a miembro, las segundas aplicadas a los m primeros nudos, y como la ecuación resultante puede sustituir a cualquiera de las que se han sumado, por ejemplo, a la correspondiente al nudo m , dicho sistema se convierte en el siguiente, que es equivalente a aquél:

determinada $N d_2$, y aplicando dicha ecuación al nudo 3, obtenemos $N d_3$, y así sucesivamente, hasta aplicar la ecuación citada al nudo $m-1$, resultando conocidas las compresiones de todos los dinteles. Las segundas ecuaciones [7'] nos proporcionan inmediatamente las compresiones de todos los pilares.

Para obtener las reacciones de empotramiento, no hay más que emplear las fórmulas [3].

Consideremos ahora una estructura de edificio:



Con una notación análoga a la empleada para el pórtico, las expresiones [4] se convierten en:

$$\begin{aligned}\delta_i &= x_i - x_{i+1} \text{ para el dintel } i; \\ \delta'_i &= y_{i+m} - y_i \text{ para el pilar } i';\end{aligned}$$

y las [5] en:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= y_i - y_{i+1} \text{ para el dintel } i; \\ \Delta'_i &= x_i - x_{i+m} \text{ para el pilar } i' .\end{aligned}$$

Como el número de traslaciones principales es:

$$\begin{aligned}n_{x+y} &= n_t - n_b = 2n - n'_t - n_b = 2um - 2m - \\ &- [(u-1)m + (u-1)(m-1)] = u-1;\end{aligned}$$

se trata de una estructura hipostática de orden $n-1$, y tomando como traslaciones principales:

$$x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \dots, x_{(u-2)m+1},$$

la x de un nudo cualquiera, $hm+a$, puede expresarse inmediatamente en función de las traslaciones principales:

$$\begin{aligned}x_{hm+a} &= x_{hm+1} - (\delta_{hm+1} + \delta_{hm+2} + \\ &+ \delta_{hm+3} + \dots + \delta_{hm+a-1}),\end{aligned}$$

y la y es conocida:

$$\begin{aligned}y_{hm+a} &= -(\delta'_{(u-2)m+a} + \delta'_{(u-3)m+a} + \\ &+ \delta'_{(u-4)m+a} + \dots + \delta'_{hm+a});\end{aligned}$$

valores que, suponiendo acortamientos nulos, se convierten en los siguientes:

$$\begin{aligned}x_{hm+a} &= x_{hm+1}; \\ y_{hm+a} &= 0;\end{aligned}$$

con cuyas relaciones pueden expresarse todas las traslaciones en función de las principales.

Si, para simplificar, convenimos en que:

$$\begin{aligned}x_1 - x_{m+1} &= z_1 \\ x_{m+1} - x_{2m+1} &= z_2 \\ x_{2m+1} - x_{3m+1} &= z_3 \\ &\vdots \\ x_{(h-1)m+1} - x_{hm+1} &= z_h \\ x_{hm+1} - x_{(h+1)m+1} &= z_{h+1} \\ &\vdots\end{aligned}$$

las ecuaciones [2], expresadas en función de las traslaciones principales, con exclusión de las restantes, para acortamientos nulos, toman la siguiente forma, aplicadas al nudo i de la fila $h+1$:

$$\left. \begin{aligned}K_i \theta_i + c'_{i-m} \theta_{i-m} + c_{i-1} \theta_{i-1} + c_i \theta_{i+1} + \\ + c'_i \theta_{i+m} + \varphi_{i/m} z_h + \varphi_{i/i+m} z_{h+1} + Me_i = 0; \\ -Nd_{i-1} + Nd_i - f'_{i-m} z_h + f'_i z_{h+1} - \\ - (\varphi_{i/i-m} - \varphi_{i/i+m}) \theta_i - \varphi_{i-m/i} \theta_{i-m} + \\ + \varphi_{i+m/i} \theta_{i+m} + Xe_i = 0; \\ N'd_{i-m} - N'd_i - (\varphi_{i/i-1} - \varphi_{i/i+1}) \theta_i - \\ - \varphi_{i-1/i} \theta_{i-1} + \varphi_{i+1/i} \theta_{i+1} + Ye_i = 0.\end{aligned} \right\} [2']$$

Para eliminar las compresiones entre las segundas y terceras ecuaciones [2'], no hay más que sumar, miembro a miembro, las segundas aplicadas a los m nudos de la fila $h+1$, dando a h todos los valores, desde 0 a $u-2$, y como la ecuación resultante puede sustituir a cualquiera de las que se han sumado, por ejemplo, a la correspondiente al nudo $(h+1)m$, dicho sistema se convierte en el siguiente, que es equivalente a aquél:

$$\begin{aligned}n_0 &= (u-1)m, \text{ ecuaciones de la forma: } K_i \theta_i + c'_{i-m} \theta_{i-m} + c_{i-1} \theta_{i-1} + c_i \theta_{i+1} + \\ &+ c'_i \theta_{i+m} + \varphi_{i/i-m} z_h + \varphi_{i/i+m} z_{h+1} + Me_i = 0; \\ n_t - n_b &= u-1, \text{ ecuaciones de la forma: } -z_h \Sigma f'_{i-m} + z_{h+1} \Sigma f'_i - \Sigma \varphi_{i-m/i} \theta_{i-m} - \\ &- \Sigma (\varphi_{i/i-m} - \varphi_{i/i+m}) \theta_i + \Sigma \varphi_{i+m/i} \theta_{i+m} + \Sigma Xe_i = 0.\end{aligned}$$

[6']

$$n_b = (u-1)(2m-1) \left\{ \begin{aligned} &(u-1)(m-1), \text{ ecuaciones de la forma: } -Nd_{i-1} + Nd_i - f'_{i-m} z_h + f'_i z_{h+1} - \\ &- (\varphi_{i/i-m} - \varphi_{i/i+m}) \theta_i - \varphi_{i-m/i} \theta_{i-m} + \varphi_{i+m/i} \theta_{i+m} + Xe_i = 0; \\ &(u-1)'m, \text{ ecuaciones de la forma: } N'd_{i-m} - N'd_i - (\varphi_{i/i-1} - \varphi_{i/i+1}) \theta_i - \\ &- \varphi_{i-1/i} \theta_{i-1} + \varphi_{i+1/i} \theta_{i+1} + Ye_i = 0.\end{aligned} \right\} [7']$$

Comprendiendo las Σ desde $i = hm + 1$ a $i = (h + 1)m$.

Resuelto el sistema [6'], la determinación de las traslaciones no principales, las reacciones de empotramiento y las compresiones, se realiza de la forma expuesta en el pórtico, sin más diferencia que calcular las compresiones de los pilares de una manera análoga a la empleada para calcular las de los dinteles, en vez de obtenerlas inmediatamente de las segundas ecuaciones [7].

Veamos ahora la manera de resolver los sistemas [6].

Supongamos ahora, solamente con el objeto de facilitar la explicación, que se trata de una estructura isostática, es decir, que $n_t - n_b = 0$, y, por lo tanto, las dos ecuaciones [6] se reducen a una sola y no hay traslaciones principales, por lo que, en este caso, el problema se reduce a resolver las n_0 ecuaciones de la forma:

$$K_a \theta_a + \Sigma c \theta_i + Me_a = 0; \quad [8]$$

puesto que en las estructuras isostáticas, con las sustentaciones corrientes, cuando los acortamientos son nulos, las Δ lo son también, por serlo las traslaciones, según se deduce de las ecuaciones [4].

A cada uno de los nudos de la estructura se le asigna un número de orden.

Admitamos que hemos logrado expresar los giros $\theta_{a'}$ de todos los nudos de orden inferior al a en función lineal de los momentos de empotramiento de a y de los nudos de orden inferior, y de los giros de los de orden superior; es decir, que designando por $\theta'_{a'}$ el valor así expresado:

$$\theta'_{a'} = R_{a'} (Me_1, Me_2, Me_3, \dots, Me_{a'-1}, Me_{a'}) + F_{a'} (\theta_{a'+1}, \theta_{a'+2}, \theta_{a'+3}, \dots); \quad [9]$$

siendo $R_{a'}$ y $F_{a'}$ funciones lineales.

Si entre los nudos contiguos al a hay alguno de orden inferior a éste y el de orden más bajo es el b , sustituyendo en la primera expresión [1] θ_b por el valor θ'_b , el nudo de orden más bajo cuyo giro figure

en la expresión obtenida será de orden superior al b , pero si aun es inferior al a , podemos operar con él como con el b , hasta que todos los giros que formen parte de la ecuación correspondan a nudos de orden no inferior al a ; es decir, hasta que tome la forma:

$$Md_a = P_a (Me_1, Me_2, Me_3, \dots, Me_{a-1}) + P_a \theta_a + \Phi_a (\theta_{a+1}, \theta_{a+2}, \theta_{a+3}, \dots); \quad [10]$$

y como $Md_a + Mc_a = 0$, resulta:

$$\theta_a = -\frac{1}{P_a} P_a (Me_1, Me_2, Me_3, \dots, Me_{a-1}) - \frac{1}{P_a} Mc_a - \frac{1}{P_a} \Phi_a (\theta_{a+1}, \theta_{a+2}, \theta_{a+3}, \dots). \quad [11]$$

Las funciones P_a y Φ_a son lineales, puesto que lo han sido todas las transformaciones efectuadas, y la expresión [11] demuestra que si se cumple la hipótesis admitida en los $a - 1$ primeros nudos, puede lograrse que se cumpla también en el a , puesto que el valor de θ_a obtenido es el particular representado por θ'_a .

Ahora bien: la primera ecuación [1], aplicada al nudo 1, produce una expresión análoga a la [10] y, por tanto, podemos obtener el valor θ'_1 , análogo al [11], y entonces la hipótesis admitida se cumple para el nudo 1 y, en consecuencia, para el 2, y, por consiguiente, para el 3, y en definitiva, para todos los de la estructura.

Como en la función R de la fórmula [9] intervienen solamente cantidades conocidas, y en el último nudo, n , el valor de F es nulo, el de θ'_n es conocido, o sea el de θ_n que buscamos; en el nudo $n - 1$, como están determinados los giros de los nudos de orden superior, conocemos θ_{n-1} ; por el mismo sistema, es conocido θ_{n-2} y, en definitiva, continuando el procedimiento, los giros de todos los nudos.

Obsérvese la sencillez de las ecuaciones [8] en las estructuras corrientemente empleadas en la construcción, puesto que no intervienen más que el nudo a y los unidos a él por medio de una barra.

El procedimiento de sustitución explicado se simplifica extraordinariamente con el empleo de cuadros, como el que exponemos a continuación, para la determinación del giro θ_a , en función de los momentos de empotramiento.

Con la notación:

$$\begin{array}{l} A_1 = \begin{vmatrix} A & B & C & D & \dots \\ -\times & -\times & -\times & -\times & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots \end{vmatrix} \\ A_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots \end{vmatrix} \\ \vdots \end{array}$$

indicamos que:

$$\begin{array}{l} A_1 = a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D + \dots \\ A_2 = a_2 A + b_2 B + c_2 C + d_2 D + \dots \\ \vdots \end{array}$$

Representamos por un punto, (.), los coeficientes que corresponden a Me , es decir, a términos conocidos, y por un aspa, (X), los que corresponden a θ , o sea a términos desconocidos.

Para mejor comprensión del cuadro, en la columna de observaciones se indican las diferentes partes en que se descompone la operación, que son las siguientes:

I. Expresión del momento de deformación, deducida de la primera relación [1], en la que $\Delta = 0$, por tratarse de una estructura isostática con acortamientos nulos, suponiendo que los nudos contiguos al a son $a - c$, $a - c + 1$, ..., $a - 1$, $a + 1$, ...

II. Eliminación sucesiva de los giros de los nudos de orden inferior a a .

III. Obtención de la expresión $P_a + \Phi_a$, de la fórmula [10].

IV. Obtención de θ'_a , según la fórmula [11].

V. Sustitución de los giros de los nudos de orden superior al a , por sus valores en función de los momentos de empotramiento.

VI. Obtención de θ_a .

Cuando los giros se calculan numéricamente, es decir, cuando se considera una hipótesis de carga y, por lo tanto, los momentos de empotramiento tienen valores numéricos conocidos, las operaciones se simplifican porque en cada horizontal se resumen todos los términos conocidos en un sólo número, que es su suma, y es conveniente modificar las partes I y III de la siguiente forma:

I. Expresión del primer término de la primera ecuación [2].

III. Obtención de la expresión $P_a + Me_a + \Phi_a$, estando la suma $P_a + Me_a$ resumida en un sólo número, colocado en la columna de términos conocidos.

El cuadro correspondiente a la obtención de θ_a , numéricamente, es el de la página siguiente.

Al ordenar la estructura, debe procurarse que el número de sustituciones de la parte II sea el menor posible.

El valor de θ'_a es función de los momentos de empotramiento del nudo a y de orden inferior, y de giros de nudos, de orden superior; pero a medida que dos nudos son más alejados, es decir, están unidos por intermedio de mayor número de barras, su influencia mutua decrece notablemente, por lo que, admitiendo un grado de aproximación suficiente, el número de términos de θ'_a es bastante reducido, lo que simplifica mucho las operaciones.

El procedimiento explicado no varía esencialmente para las estructuras hipostáticas. En efecto: las segundas y terceras ecuaciones [2] son de la forma:

$$Xd_a + Xe_a = 0;$$

$$Yd_a + Ye_a = 0;$$

y como efectuando en ellas transformaciones lineales se han deducido las segundas [6], éstas podrán escribirse así:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 Xd_1 + \alpha_2 Xd_2 + \alpha_3 Xd_3 + \dots + \\ & + \alpha'_1 Yd_1 + \alpha'_2 Yd_2 + \alpha'_3 Yd_3 + \dots + \\ & + \alpha_1 Xe_1 + \alpha_2 Xe_2 + \alpha_3 Xe_3 + \dots + \\ & + \alpha'_1 Ye_1 + \alpha'_2 Ye_2 + \alpha'_3 Ye_3 + \dots = 0; \end{aligned}$$

o bien:

$$Fd + Fe = 0;$$

suponiendo:

$$\begin{aligned} Fd &= \alpha_1 Xd_1 + \alpha_2 Xd_2 + \alpha_3 Xd_3 + \dots + \\ & + \alpha'_1 Yd_1 + \alpha'_2 Yd_2 + \alpha'_3 Yd_3 + \dots \\ Fe &= \alpha_1 Xe_1 + \alpha_2 Xe_2 + \alpha_3 Xe_3 + \dots + \\ & + \alpha'_1 Ye_1 + \alpha'_2 Ye_2 + \alpha'_3 Ye_3 + \dots \end{aligned}$$

siendo, por consiguiente, Fd una función lineal de los giros y las traslaciones principales y, en consecuencia, por el procedimiento de sustituciones sucesivas explicado, considerando, al ordenar la estructura, no solamente los giros, sino también las traslaciones principales, pueden determinarse todas estas incógnitas en función de los momentos y de las funciones Fe de las fuerzas reacciones de empotramiento, correspondiendo a cada giro, θ_i , un momento de deformación, Md_i , y una ecuación $Md_i + Me_i = 0$, y a cada traslación principal, x_i ó y_i , una función de deformación Fd_i y una ecuación $Fd_i + Fe_i = 0$.

Observación		I	II	III	IV	V	VI
θ_n	x		x	x	-----	x	
θ_{a+1}	x		x	x	-----	x	
θ_a	x		x	x	-----	x	
θ_{a-1}	x		x	x	-----	x	
θ_{a-c+1}	x		x	x	-----	x	
θ_{a-c}	x		x	x	-----	x	
θ_1	x		x	x	-----	x	
Terminos conocidos							
M_a							
$M_a + M_{a-1}$							
$C_{a/a-c} \theta'_{a-c}$							
$P_{a-c+1} \theta'_{a-c+1}$							
$P_{a-1} \theta'_{a-1}$							
Sumas $\times \left(\frac{1}{P_a}\right)$							
θ'_a							
$P_{a+1} \theta_{a+1}$							
$P_n \theta_n$							
Suma θ_a							

En una estructura de edificio, la ordenación debe ser la siguiente:

Incógnitas	Ecuaciones
θ_1	$Md_1 + Me_1 = 0$
θ_2	$Md_2 + Me_2 = 0$
θ_3	$Md_3 + Me_3 = 0$
$\vdots$	$\vdots$
θ_m	$Md_m + Me_m = 0$
z_1	$Xd_1 + Xd_2 + \dots + Xd_m + Xe_1 + Xe_2 + \dots +$ $+ Xe_m = 0$
θ_{m+1}	$Md_{m+1} + Me_{m+1} = 0$
θ_{m+2}	$Md_{m+2} + Me_{m+2} = 0$
θ_{m+3}	$Md_{m+3} + Me_{m+3} = 0$
$\vdots$	$\vdots$
θ_{2m}	$Md_{2m} + Me_{2m} = 0$
z_2	$Xd_{m+1} + Xd_{m+2} + \dots + Xd_{2m} + Xe_{m+1} +$ $+ Xe_{m+2} + \dots + Xe_{2m} = 0$
θ_{2m+1}	$Md_{2m+1} + Me_{2m+1} = 0$
θ_{2m+2}	$Md_{2m+2} + Me_{2m+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$

La determinación de los giros y las traslaciones principales es mucho más breve numéricamente que en función de las reacciones de empotramiento. Cuando se estudien varias hipótesis de carga, dicha determinación numérica se hace correspondiendo a cada hipótesis una columna de términos conocidos y siendo común el resto del cálculo, por lo que, generalmente, es preferible el cálculo numérico, salvo los casos en que sea elevado el número de hipótesis a considerar, y en cambio pequeño el de nudos, pues entonces puede ser preferible efectuar el cálculo en función de las reacciones de empotramiento y después sustituir éstas por los valores particulares correspondientes a cada hipótesis.

Si determinamos los giros y las traslaciones principales en función de las reacciones de empotramiento, los coeficientes serán constantes para cualquier valor de carga, formando un *invariante*, que denominaremos *absoluto*, aunque, en realidad, sólo sea invariante cuando se adopten las mismas traslaciones como principales. Conocido este invariante, para determinar los giros y traslaciones principales producidos por un sistema de cargas, basta sustituir los valores generales de las reacciones de empotramiento por los numéricos correspondientes.

En el cálculo numérico, los coeficientes correspondientes a giros y traslaciones principales son constantes para cualquier sistema de cargas, formando, por lo tanto, un *invariante* que denominaremos *relativo*,

porque sólo lo es cuando se fija la ordenación de la estructura; en el estudio de varias hipótesis de carga, sólo es variable la columna correspondiente a las reacciones de empotramiento, es decir, a los términos conocidos.

Los acortamientos, δ , de las barras, suelen tener poca importancia en la deformación de la estructura, por lo que empezamos suponiéndolos nulos, y una vez conocidas las compresiones, podemos calcular los acortamientos correspondientes, y con éstos como base, efectuar un nuevo cálculo, que resultará más aproximado que el anterior, siendo posible verificar, por este procedimiento, nuevas aproximaciones cuantas veces se considere necesario, pero en la mayoría de los casos basta con el cálculo primitivo.

Cuando se tengan en cuenta los acortamientos, debe efectuarse el cálculo según las consideraciones siguientes:

De las relaciones [4] se deduce que los valores de Δ son de la forma:

$$\Delta = q\delta + q'\delta' + q''\delta'' + \dots + a\rho + a'\rho' + a''\rho'' + \dots$$

siendo δ , δ' , δ'' ..., los acortamientos, y ρ , ρ' , ρ'' ..., las traslaciones principales.

O sea:

$$\Delta = \Delta_a + \Delta_0;$$

siendo:

$$\Delta_a = q\delta + q'\delta' + q''\delta'' + \dots$$

el valor de Δ correspondiente a los acortamientos, y

$$\Delta_0 = a\rho + a'\rho' + a''\rho'' + \dots$$

el correspondiente a acortamientos nulos.

Por lo tanto, las ecuaciones [2] pueden escribirse así:

$$K_a \theta_a + \Sigma c \theta_i + \Sigma \varphi_{aji} \Delta_0 + Me_a + \Sigma \varphi_{aji} \Delta_a = 0;$$

$$\Sigma Nd \cos w_{aji} - \Sigma f \Delta_0 \sin w_{aji} - \Sigma (\varphi_{aji} \theta_a + \varphi_{i/a} \theta_i) \sin w_{aji} + Xe_a - \Sigma f \Delta_a \sin w_{aji} = 0;$$

$$\Sigma Nd \sin w_{aji} + \Sigma f \Delta_0 \cos w_{aji} + \Sigma (\varphi_{aji} \theta_a + \varphi_{i/a} \theta_i) \cos w_{aji} + Ye_a + \Sigma f \Delta_a \cos w_{aji} = 0.$$

Estas ecuaciones demuestran que cuando se consideran los acortamientos, puede efectuarse el cálculo como si fueran nulos, con tal de sustituir:

$$Me_a, Xe_a \text{ e } Ye_a \text{ por } Me_a + \Sigma \varphi_{aji} \Delta_a, Xe_a - \Sigma f \Delta_a \sin w_{aji} \text{ e } Ye_a + \Sigma f \Delta_a \cos w_{aji},$$

Nudos	Factores	M_{21}	M_{22}	M_{23}	-----	M_{2n-2}	M_{2n-1}	M_{2n}	Factores
1	$x_{p_2 c_1}$ Sumas θ_1	p_1 • •	• •	• •	-----	• •	• •	• •	$x_{p_1 c_1}$ $x_{p_2 c_2}$
2	$x_{p_3 c_2}$ Sumas θ_2	• •	p_2 • •	• •	-----	• •	• •	• •	$x_{p_1 c_1}$ $x_{p_2 c_2}$
3	$x_{p_4 c_3}$ Sumas θ_3	• •	• •	p_3 • •	-----	• •	• •	• •	$x_{p_1 c_1}$ $x_{p_2 c_2}$

$n-2$	$x_{p_{n-1} c_{n-2}}$ Sumas θ_{n-2}	• •	• •	• •	-----	p_{n-2} • •	• •	• •	$x_{p_{n-3} c_{n-3}}$ $x_{p_{n-2} c_{n-2}}$
$n-1$	$x_{p_n c_{n-1}}$ Sumas θ_{n-1}	• •	• •	• •	-----	• •	p_{n-1} • •	• •	$x_{p_{n-3} c_{n-3}}$ $x_{p_{n-2} c_{n-2}}$
n	θ_n	• •	• •	• •	-----	• •	• •	p_n	$x_{p_{n-1} c_{n-1}}$

DETERMINACIÓN DE LOS GIROS

respectivamente; es decir, como si se tratara de un caso particular de carga.

Conocida la deformación de la estructura, por las relaciones [1] se obtienen las reacciones correspondientes en cada barra, y las totales, por las fórmulas:

$$Mt_{a/i} = Me_{a/i} + Md_{a/i};$$

$$Xt_{a/i} = Xe_{a/i} + Xd_{a/i};$$

$$Yt_{a/i} = Ye_{a/i} + Yd_{a/i}.$$

Obtenidas las reacciones totales, la determinación de los esfuerzos en las distintas barras no ofrece dificultad.

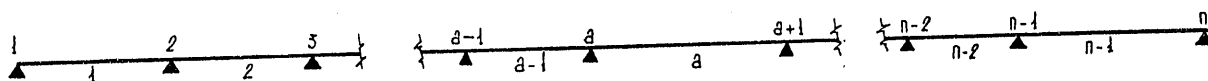
Las reacciones producidas por la deformación se obtienen, para cada nudo, sumando algebricamente las

correspondientes a ese nudo, de las barras concurrentes, y como comprobación, cada reacción así obtenida ha de ser igual y de signo contrario a la de empotramiento.

Los cuadros empleados para la determinación de los giros y las traslaciones principales, pueden irse comprobando a medida que se efectúan las operaciones, mediante relaciones sencillas entre los coeficientes que deben verificarse en virtud del teorema de Maxwell.

Determinando la deformación en función de las reacciones de empotramiento, pueden estudiarse las leyes de formación de los coeficientes correspondientes, y, si son sencillas, hacer uso de ellas para el cálculo de aquéllos.

Así, por ejemplo, en una viga de varios tramos:



No hay traslaciones, y los n giros se determinan por medio de las primeras ecuaciones [2], cuya aplicación al nudo a da:

$$K_a \theta_a + c_{a-1} \theta_{a-1} + c_a \theta_{a+1} + Me_a = 0. \quad [12]$$

Según el procedimiento de sustitución explicado, el valor θ'_{a-1} del giro θ_{a-1} será de la forma:

$$\theta_{a-1} = q_{a-1} \theta_a + R_{a-1};$$

siendo R_{a-1} una función lineal de $Me_1, Me_2, Me_3, \dots, Me_{a-1}$.

Eliminando θ_{a-1} entre las dos ecuaciones, resulta:

$$(K_a + c_{a-1} q_{a-1}) \theta_a + c_a \theta_{a+1} + c_{a-1} R_{a-1} + Me_a = 0;$$

de donde se deduce:

$$\theta_a = - \frac{c_a}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}} \theta_{a+1} - \frac{c_{a-1}}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}} R_{a-1} - \frac{1}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}} Me_a;$$

y como el valor de θ_a es de la forma:

$$\theta_a = q_a \theta_{a+1} + R_a,$$

debe verificarse:

$$q_a = - \frac{c_a}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}};$$

$$R_a = - \frac{c_{a-1}}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}} R_{a-1} - \frac{1}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}} Me_a.$$

Y haciendo:

$$p_a = - \frac{1}{K_a + c_{a-1} q_{a-1}}$$

se obtiene:

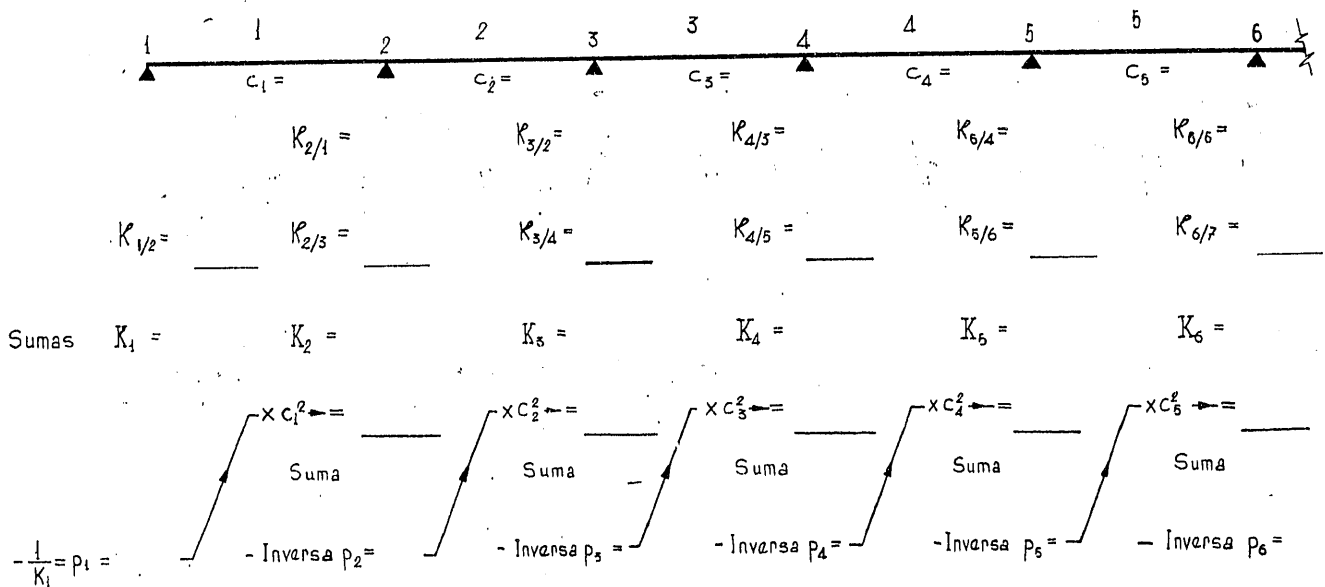
$$q_a = p_a c_a;$$

$$R_a = p_a c_{a-1} R_{a-1} + p_a Me_a.$$

Como $q_{a-1} = p_{a-1} c_{a-1}$, resulta:

$$p_a = - \frac{1}{K_a + c_{a-1}^2 p_{a-1}};$$

fórmula que nos da la ley de formación de las p , basándose en la cual pueden calcularse de la siguiente forma:



Conocidas las p , se obtienen los giros, en función de los momentos de empotramiento, por medio del cuadro titulado "determinación de los giros".

Obsérvese que de los dos sumandos que componen cada giro, se determinan primero los valores:

$$\begin{aligned} R_1 &= p_1 Me_1 \\ R_2 &= p_2 c_1 R_1 + p_2 Me_2 \\ R_3 &= p_3 c_2 R_2 + p_3 Me_3 \\ &\vdots \\ R_{n-2} &= p_{n-2} c_{n-3} R_{n-3} + p_{n-2} Me_{n-2} \\ R_{n-1} &= p_{n-1} c_{n-2} R_{n-2} + p_{n-1} Me_{n-1} \\ \theta_n &= R_n = p_n c_{n-1} R_{n-1} + p_n Me_n \end{aligned}$$

y después, sucesivamente:

$$\begin{aligned} q_{n-1} \theta_n &= p_{n-1} c_{n-1} \theta_n \\ q_{n-2} \theta_{n-1} &= p_{n-2} c_{n-2} \theta_{n-1} \\ q_{n-3} \theta_{n-2} &= p_{n-3} c_{n-3} \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ q_3 \theta_4 &= p_3 c_3 \theta_4 \\ q_2 \theta_3 &= p_2 c_2 \theta_3 \\ q_1 \theta_2 &= p_1 c_1 \theta_2 \end{aligned}$$

Los coeficientes correspondientes a los valores de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$, forman el invariante absoluto, que debe ser simétrico.

En el tramo a , los momentos totales valen:

$$\begin{aligned} Mt_{a/a+1} &= Me_{a/a+1} + k_{a/a+1} \theta_a + c_a \theta_{a+1} \\ Mt_{a+1/a} &= Me_{a+1/a} + k_{a+1/a} \theta_{a+1} + c_a \theta_a \end{aligned}$$

Como aplicación del procedimiento expuesto, se estudiaron algunos tipos de estructuras y se calcularon varios ejemplos.

El conferenciante terminó manifestando que en tan breves lecciones no había pretendido enseñar el procedimiento de manera que los alumnos lo dominaran y pudieran aplicarlo a los diferentes tipos de estructuras que tuvieran que resolver; que sólo había pretendido dar una síntesis de aquél, explicando únicamente la parte esencial del mismo, fijando conceptos y aclarando ideas por medio de ejemplos, y que la teoría completa, con el estudio de diferentes tipos de estructuras y la aplicación a varios ejemplos, sería publicado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.