

PLANOS DE OLEAJE

INFLUENCIA DE LA PENDIENTE DEL FONDO
EN LA ALTURA DE LA OLA

Por FERNANDO RODRÍGUEZ PÉREZ, Ingeniero de Caminos.

Comentario, por RAMÓN IRIBARREN, Prof. de la Escuela de Caminos.

El interés de las observaciones que hace el autor al notable estudio de "Planos de oleaje", del Profesor Iribarren, al aplicarlo en la desembocadura del Guadalquivir, se pone de manifiesto en el comentario con que dicho Profesor prologa el presente artículo, que califica de inteligente cooperación al método que tanto se ha venido aplicando.

COMENTARIO

Al redactar el artículo publicado en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de 1.º de enero de 1941, y en el que se expuso el método de los planos de oleaje, se introdujeron algunas fundadas simplificaciones para facilitar y hacer posible su aplicación ya desde aquel entonces.

Una de dichas simplificaciones es la condensada en los siguientes párrafos, que literalmente reproducimos:

"Si la energía E_0 se conservase en el avance de la ola, los acortamientos de L_0 , que se reducen a la L correspondiente al punto considerado, implicarían un aumento de h_0 , que se transformaría en la h correspondiente.

"Aunque todavía no disponemos del número de datos necesarios para precisarlo, podemos admitir que el consumo de energía causado por el avance de la onda compensa, aproximadamente, ese aumento de la semialtura h , producido por el acortamiento de la semilongitud L en las pendientes, frecuentes en las plataformas costeras, que se aproximan al 1 por 100, y siempre que la ola no esté próxima a su rotura.

"Si bien pendientes más fuertes pueden aumentar algo esas alturas y pendientes más suaves pueden disminuirlas sensiblemente, y en la forma que se precisará cuando sea posible recopilar los datos necesarios, mucha mayor importancia tiene, en relación con la variación de altura de propagación de la onda, su expansión, en sentido transversal a su avance y que puede determinarse por la divergencia de las líneas normales, antes precisadas. A esta expansión la denominaremos frontal, para distinguirla de la lateral, de la que luego nos ocuparemos."

Ya entonces se habían comenzado a desarrollar los cálculos en que se basaban ésta y otras simplificaciones, y aunque posteriormente se ha avanzado más en su desarrollo, manteniéndose siempre el prudente criterio expuesto en el citado artículo, se ha optado por

no publicarlos hasta que, como allí textualmente se indicaba, "sea posible recopilar los datos necesarios que sirvan para su comprobación o afino mediante mediciones directas en la naturaleza, o, en su defecto, utilizando los modelos reducidos de que en breve se espera disponer".

Como consecuencia de observaciones efectuadas en la desembocadura del Guadalquivir, nuestro compañero D. Fernando Rodríguez Pérez ha desarrollado un interesante estudio, que ha tenido la amabilidad de enviarnos antes de su publicación, en el que muy gustosamente hemos colaborado, y sobre el cual nos vamos a permitir hacer algunas consideraciones.

A base de análogos razonamientos, y mediante cálculos aun algo más sencillos, por admitirse ya previamente que $dx \simeq dx_0$ (1), se había llegado ya a la expresión de la energía similar a la

$$E = E_1 \cdot e^{-\frac{2\xi}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{t}{T}} = E_1 \cdot e^{-\frac{2\xi}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{x}{L}}$$

Esta simplificación previa $dx \simeq dx_0$, es lícita en las olas que generalmente nos interesan para la aplicación del método, no demasiado próximas a la rotura, en las que $\frac{\pi z}{L} \ll \frac{\pi h K}{L}$ es muy pequeña.

A esta fracción $\frac{\pi h K}{L}$ la denominamos fracción de rotura precisamente porque, como es fácil ver, solamente en rotura y en la superficie se aproxima a la unidad, siendo muy pequeña en los demás casos de aplicación corriente.

Además, no hay que olvidar tampoco que dicha

(1) Las notaciones son las del citado artículo de la REVISTA y las de los folletos denominados Cálculos de diques verticales y Una fórmula para el cálculo de los diques de escollera.

simplificación, basada en que la fracción de rotura sea pequeña, lógicamente se admite en las aplicaciones de la teoría trocoidal que, muy aproximadas en las olas no demasiado próximas a la rotura, lo son menos en las proximidades de ésta, en las que, como consecuencia, conviene aplicarlas con mayores márgenes de seguridad.

No es preciso indicar que, en todo esto, más que utópicas exactitudes teóricas, buscamos lógicas aproximaciones prácticas.

Interesante resulta el cuadro mediante el cual se comprueba que, si suponemos que hay una pendiente α conservadora de alturas, el que pudiéramos denominar coeficiente cinemático de rozamiento (o, mejor dicho, π veces dicho coeficiente cinemático $\frac{\mathcal{H}}{\rho}$),

$\xi = \frac{\pi \mathcal{H}}{\rho}$ es constante para profundidades relativas comprendidas entre $\frac{H}{L} = 1$, o sea, la profundidad a partir de la cual la ola comienza a ser modificada por la presencia del fondo, hasta la reducida profundidad $\frac{H}{L} = 0,10$.

Es fácil ver, a base de cuadros similares, que este valor constante de $\xi = 0,0314$ no varía si el número de semiperíodos o avances del plano de oleaje m varía, siempre que no sea demasiado grande, si no se varía la supuesta pendiente conservadora de alturas $\alpha = 0,01$, y que, en cambio, varía proporcionalmente a otros valores, distintos a 0,01, que se pudieran suponer para dicha pendiente conservadora.

Estos resultados, corroborados por la demostración que a continuación se hace de que $\xi = \pi \alpha$, comprueban fehacientemente, dentro del grado de aproximación en que nos desenvolvemos, que para un determinado coeficiente de rozamiento corresponde, como se había indicado ya en el año de 1941, una determinada pendiente conservadora de altura de olas.

Aunque no para las olas, que ya habrán roto para dicha relación extrema del cuadro $\frac{H}{L} = 0,10$, resulta curioso comprobar que, incluso, para la enorme extrapolación que supone la larguísima onda de marea, el coeficiente de rozamiento sigue siendo $\xi \approx 0,0314$, si se sigue suponiendo que la pendiente conservadora de alturas es $\alpha = 0,01$, por pequeña que llegue a ser la relación $\frac{H}{L}$, o sea, la profundidad relativa de propagación de dicha onda de marea.

En efecto: la fórmula básica del cuadro que nos ocupa:

$$\xi = \frac{1}{2m} \left(\rho_n \frac{L_1}{L_0} - \rho_n \frac{L_2}{L_0} \right) \text{Sh} \frac{2\pi H}{L};$$

siendo:

$$\begin{cases} \frac{L_1}{L_0} = \frac{1}{K_1} = \tau h \frac{\pi H_1}{L_1}, \\ \frac{L_2}{L_0} = \frac{1}{K_2} = \tau h \frac{\pi H_2}{L_2}, \end{cases}$$

se transforma en:

$$\xi = \frac{\pi}{m} \left(\rho_n \frac{H_1}{L_1} - \rho_n \frac{H_2}{L_2} \right) \frac{H}{L},$$

para valores de las relaciones $\frac{H}{L}$ suficientemente pequeñas, como sucede en la onda de marea, para poder sustituir el seno y tangente hiperbólicos por sus argumentos.

Si, para operar en estas reducidísimas profundidades relativas, y siempre conservando $\alpha = 0,01$, sustituimos el $m = 10$ del cuadro que nos ocupa, por $m = 10 \times 10^{-n}$, siendo n todo lo grande que queramos, los valores de $\frac{H_1}{L_1}$ y $\frac{H_2}{L_2}$ diferirán en $m \alpha = 10 \times 10^{-n} \times 0,01 = 0,1 \times 10^{-n}$, y de su valor medio $\frac{H}{L}$ en $0,005 \times 10^{-n}$.

En estas condiciones, e incluso para el último intervalo del cuadro correspondiente, para el que las reducidísimas profundidades unitarias serían $\frac{H_1}{L_1} = 0,2 \times 10^{-n}$, y $\frac{H_2}{L_2} = 0,1 \times 10^{-n}$, y el valor medio $\frac{H}{L} = 0,15 \times 10^{-n}$, obtenemos $\xi = \frac{\pi}{10 \times 10^{-n}} (\ln 0,2 \times 10^{-n} - \ln 0,1 \times 10^{-n}) = \frac{\pi}{10} \times 0,15 \ln 2 \approx 0,01 \pi = 0,0314$, o sea, el mismo valor constante del coeficiente de rozamiento.

Visto todo esto, que comprueba que, aun en enormes extrapolaciones, si el coeficiente de rozamiento fuese fijo y constante, existente una pendiente conservadora de las alturas, también constante y definida, queda por determinar cuál es este coeficiente y cuál su pendiente conservadora correspondiente.

Para ello, y como hace ya varios cursos se viene indicando en la Escuela de Caminos, lógicamente surge la idea de recurrir a la fórmula de Chézy, del movimiento uniforme, $v_0 = C \sqrt{R \cdot i}$.

A base de ella y de la ley parabólica de Bazin, de distribución de velocidades según la vertical $\frac{v_s - v}{\sqrt{H \cdot L}}$

$= 20 \left(\frac{i}{H} \right)^{3/2}$, se llega fácilmente, adoptando el coeficiente $C = 50$, correspondiente, aproximadamente, a varios grandes ríos, a determinar el coeficiente de rozamiento dinámico $\xi = 0,023$.

¿Cuál de los coeficientes obtenidos, $\xi = 0,0314$ ó $\xi = 0,023$, se debe adoptar?

Como acertadamente se indica, no hay excesiva discrepancia entre ellos, si se tiene en cuenta que corresponden a dos fenómenos tan aparentemente distintos como son el movimiento uniforme en un canal y la propagación de las olas marinas, y la diferencia parece aún menor si comparamos los coeficientes C , de Chézy, que son, respectivamente, 45 y 50, o bien sus correspondientes pendientes conservadoras de alturas, que son el 1 por 100 ó el 0,73 por 100.

Dentro de un grado de aproximación aceptable, excepto para algunos casos extremos, y siempre que nos quedásemos del lado de la seguridad, cabría adoptar una pendiente conservadora de alturas intermedia y juiciosamente elegida, pero vamos a tratar de afinar aún más la cuestión.

Indudablemente, el mejor y más fehaciente procedimiento para conseguirlo consiste en la observación directa del fenómeno y, como también acertadamente se indica, ésta parece confirmar que las pendientes del fondo β , frecuentes en las plataformas costeras, del 1 por 100 son conservadoras de alturas, y su coeficiente medio se aproximará a $\xi = 0,0314$.

También la observación confirma que pendientes β mucho más fuertes aumentan, aunque no excesivamente, dichas alturas, lo que indica que su coeficiente será superior a $\xi = 0,0314$, con lo que su correspondiente pendiente ficticia, conservadora de alturas, será superior a $\alpha = 0,01$.

Por el otro extremo, o sea el de las pendientes suaves o disminuidoras de alturas, son interesantísimas las observaciones en la desembocadura del Guadalquivir, que claramente indican que para pendientes del fondo β , cuyo valor medio es del orden del

0,0025, en las profundidades relativas $\frac{H}{L_0} < 0,3$, real-

mente eficaces en lo que a la variación de alturas se refieren, su coeficiente de rozamiento ξ es incluso menor que 0,023, o sea su correspondiente pendiente conservadora ficticia será también menor que:

$$\alpha = \frac{0,023}{\pi} = 0,0073.$$

Esta variación de los coeficientes de rozamiento en casos tan extremos como los reseñados es lógica, por las razones que se exponen, principalmente por la remoción de los materiales sólidos del fondo que, como es sabido, tanto los hacen aumentar, así como también por la disminución de los radios hidráulicos o profundidades en nuestro caso de las olas indefinidamente anchas, en las que dichas olas son todavía altas en las pendientes que conservan o más aún si aumentan sus alturas.

Como se ve, aunque no son muchos ni muy precisos los datos, obtenidos mediante la difícil observación directa del fenómeno, de que por ahora disponemos, nos permiten ya ir definiendo la cuestión siempre a reserva de ulteriores afinos que se efectuarán cuando sea posible recopilar mayor número de dichos datos.

Prácticamente, el problema se reduce a definir una expresión que, en función de las pendientes β del fondo, nos determine sus coeficientes ξ , o, más cómodamente aún, sus pendientes conservadoras ficticias α correspondientes.

Después de tanteadas varias expresiones se ha comprobado que la ecuación $\alpha = \frac{1 + 2\beta^2}{2 + \beta^2}$, en las que β y α se expresan en por cientos, cumple acepta-

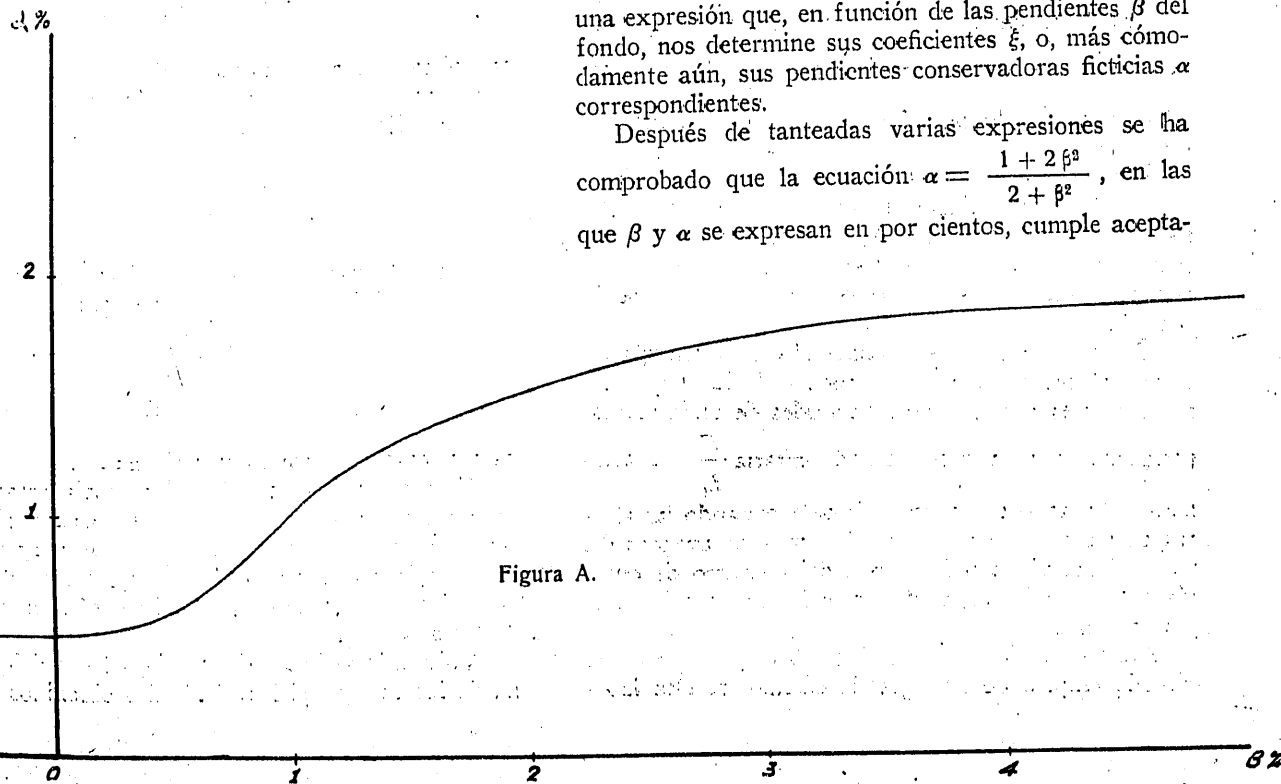


Figura A.

blemente, y quedándose del lado de la seguridad, las reseñadas condiciones, incluso extrapolando las pendientes costeras β hasta o é ∞ , pues da los siguientes valores:

β ‰	0	0,25	1	∞
α ‰	0,5	0,545	1	2

Pero no es esto todo, sino que de las expresiones:

$$\begin{aligned} v_s - v_f &= 20 \sqrt{Hl} \\ v_0 &= C \sqrt{Hi} = \frac{2}{3} v_s + \frac{1}{3} v_f \end{aligned} \left\{ v_f = \frac{3C - 40}{3} \sqrt{Hi}, \right.$$

$$\mathcal{H} = \frac{\rho g}{v_f^3} H \cdot i; \quad \xi = \frac{\pi}{\rho} \mathcal{H}; \quad \alpha = \frac{\xi}{\pi},$$

inmediatamente deducimos el coeficiente de Chézy:

$$C = \frac{40 + \sqrt{\frac{9g}{d}}}{3};$$

que, no olvidando que aquí el valor de las pendientes α y β vienen aquí expresados por unidad y no por ciento, nos permite completar el cuadro anterior en la siguiente forma:

β	0	0,0025	1	∞
α	0,005	0,00545	1	0,02
C	59	56	45	39

Por lo que no siendo, en realidad, el coeficiente de Chézy en los grandes ríos constantemente igual a 50 ni a 45, sino que variando su orden de magnitud entre 56 y 30, para radios hidráulicos o profundidades algo menores que los de las olas, nos confirma que, mientras datos más precisos no la permitan afinar mejor, la citada expresión $\alpha = \frac{1+2\beta^2}{2+\beta^2}$ es aceptable, aumentando probablemente algo el margen de seguridad.

Para mayor comodidad, en los casos particulares en que se desee utilizar directamente, la representamos en la adjunta figura A, lógicamente prolongada por la recta $\alpha = 0,5$ por 100 para las pendientes β negativas, en las que las remociones del fondo serán pequeñas.

Con ella y a base de la expresión de la energía indicada al principio y tomada cuenta de las expansiones frontales y de las semilongitudes de onda correspondientes a cada profundidad unitaria $\frac{H}{L_0}$, se establece un cuadro que permite ir determinando las alturas de ola correspondientes a los mismos avances del plano de oleaje, tomada cuenta del consumo de energía por rozamientos, o mejor dicho por rozamientos y viscosidad.

Aunque este cuadro está incluso dispuesto para el cómodo empleo de la regla de cálculo, resulta labo-

rioso de utilización, por lo que, mediante ingenioso procedimiento llega a la expresión:

$$\frac{h_N}{h_M} = \frac{K_M \frac{\alpha - \beta}{2\beta}}{K_N \frac{\alpha - \beta}{2\beta}},$$

que permite determinar la semialtura de ola h_N correspondiente al final del tramo de pendiente β en función de la semialtura h_M correspondiente al principio del mismo y de las K correspondientes.

Para mayor comodidad aun establece un ábaco en el que entrando con la pendiente β y con las profundidades unitarias $\frac{H}{L_0}$, en lugar de las $K = \cot h \frac{\pi H}{L}$ correspondientes, se determinan inmediatamente los

valores de las $K \frac{\alpha - \beta}{2\beta}$ correspondientes al final y al principio de la pendiente β , cuya relación permite determinar la semialtura final buscada.

Dibujado este ábaco a escala logarítmica permite incluso representar una transformada del perfil del fondo submarino, para determinar, cómodamente, las alturas correspondientes a cada punto de dicho perfil o al final del mismo.

Además de comprobar que la expresión determinada:

$$\frac{h_N}{h_M} = \frac{K_M \frac{\alpha - \beta}{2\beta}}{K_N \frac{\alpha - \beta}{2\beta}}$$

es aplicable incluso para pendientes descendientes β la extrapola, al caso de la larguísima onda de marea, llegando inmediatamente a la fórmula:

$$h_N = h_M \left(\frac{H_M}{H_N} \right)^{\frac{\beta - \alpha}{4\beta}};$$

que, señala, coincide con la publicada en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de julio de 1942:

$$h_N = h_M \sqrt[4]{\frac{H_M}{H_N}},$$

para el caso de rozamiento nulo $\alpha = 0$.

Cóviene aclarar que la coincidencia no solamente se verifica para el rozamiento nulo $\alpha = 0$, sino también para pendientes conservadoras, α , muy pequeñas en relación con las rápidas pendientes, β , de subida desde las profundidades abismales oceánicas a las plataformas costeras.

Volviendo al interesante caso del Guadalquivir, se ha de indicar que si los resultados obtenidos son aún

algo excesivamente prudentes, ello es debido probablemente a que las fórmulas que nos dan las características de las máximas olas originarias en mar profundo en función del *fetch*, línea de agua o largo, suponen, en este caso, de avance contrario a la circulación general atmosférica o tendencia al régimen permanente de vientos un mayor margen de seguridad.

Sin entrar en más detalles, que alargarian aún más este excesivamente largo comentario, sólo indicaremos que al igual que las fórmulas fijadas, no ya técnicas, sino hasta legalmente en las instrucciones para determinar las sobrecargas dinámicas del viento en las obras terrestres, en las que las diferencias serán aún mayores que en el mar, en el que no hay tan variables accidentes topográficos, las fórmulas basadas en el *fetch* determinan, con el conveniente margen de seguridad, los máximos efectos que se puedan producir en los casos peores, o sea en aquellos en que la causa permanente, originaria de dicha circulación general atmosférica, se suma a las accidentales que pueden originar los máximos vientos.

Así resulta, que en casos como el que nos ocupa, excepcional en las costas españolas, en el que la circulación general se opone a la dirección del *fetch* considerado, el margen de seguridad será grande, y para tratar de afinarlo, con carácter general, se están haciendo las recopilaciones necesarias de datos que permitan determinar, con suficiente garantía, la dirección e intensidad de esas causas permanentes de dicha circulación general para poderlas tener en cuenta en cada caso particular que interese, disminuyendo, con las debidas garantías, las características que resulten de las olas de cálculo.

Al dibujar un plano de oleaje se admite que la energía que pierde la onda en cada avance se compensa con la reducción de longitud debida a la disminución de calado; es decir, que la altura sólo se modifica cuando hay expansión, frontal o lateral. Esto es cierto, aproximadamente, para pendientes próximas al 1 por 100, frecuentes en las plataformas costeras, pero si la pendiente de fondo es menor — y mucho más si el fondo está en contrapendiente —, la altura de onda debe disminuir, ya que la reducción — o aumento inclusive — de longitud no llega a representar la pérdida de energía, e inversamente, con pendientes más fuertes, aumentará la altura de onda.

Esta variación de altura puede, muchas veces, pasar inadvertida por la dificultad de medir exactamente las alturas de las olas en puntos de una misma trayectoria o línea normal a las de onda; pero en otros casos es evidente, por ejemplo, en la desembocadura de un río importante, donde las pendientes, debido al

Quizás, aun antes de terminar esa laboriosa y larga recopilación, se publicará un estudio que se está ultimando referente a la justificación y afino de dichas fórmulas en función del largo.

De todos modos, no es necesario repetir aquí los párrafos dedicados a los coeficientes de seguridad, terrestres y marítimos, que se publicaron en el artículo de Enero de 1941.

Conviene, en cambio, indicar que las pendientes β no son las máximas de la plataforma costera, sino las correspondientes al avance de la ola, o sea las que van correspondiendo a las normales del plano de oleaje.

En los casos corrientes, en que estas pendientes no difieran demasiado del 1 por 100, no es necesario efectuar la corrección de altura de olas por ellas originada. Por el contrario, en algunos casos extremos excepcionales, quizás fuese conveniente tener en cuenta, además de la acción principal de la pendiente, la de las demás variables secundarias que pueden influir en el complejo fenómeno.

Antes de terminar se ha de manifestar que, como compensación a infundadas críticas que pudieran hacerse incluso en casos en que el método sea confirmado por la observación, gran satisfacción producen tan inteligentes cooperaciones como la presente que, fundadas precisamente en casos excepcionales en que el método requiere afinos, van colmando nuestro ideal de que la solución de estos interesantes temas marítimos sea una labor de conjunto del Cuerpo de Caminos que, si es posible, satisfaga nuestros anhelos de que, aunque modestamente, pueda cooperar al prestigio nacional.

R. I.

trabajo de sedimentación, pueden ser reducidísimas; así, por ejemplo, en la desembocadura del Guadalquivir la pendiente es, como máximo, del 1 0/00, y frecuentemente, menor e incluso negativa.

Vamos, a continuación, a intentar traducir en cifras esta influencia de la pendiente sobre la altura. Consideramos un ancho, A , y suponiendo primeramente que no hay expansión, tratemos de expresar la energía que una onda pierde en un avance. Esta pérdida es debida a dos causas: el rozamiento en el fondo y la viscosidad; el primero será, aproximadamente, proporcional al cuadrado de la velocidad en el fondo, y análogamente el rozamiento interno podría admitirse proporcional al cuadrado de la velocidad media; mas como este segundo término es mucho menor (salvo en profundidades muy grandes), no hay inconveniente en admitir que el esfuerzo total que se opone al avance sea proporcional al cuadrado de la velocidad en el fondo, pues en todo caso, todo se re-

duciría a aumentar un poco el coeficiente de rozamiento.

Así, en una franja de ancho A y longitud dx , el esfuerzo que se opone al movimiento será:

$$dR = \mathcal{H} \cdot A \cdot V_f^2 \cdot dx.$$

Siendo $\mathcal{H}$ el coeficiente de rozamiento y V_f la velocidad en el fondo. El camino recorrido por la onda en dt es $C dt$, y el trabajo del rozamiento, o sea la energía perdida por una onda completa en un intervalo dt , valdrá:

$$-dE = dt \int_0^{2L} \mathcal{H} \cdot C \cdot A \cdot V_f^2 \cdot dx.$$

Y como:

$$V_f = \frac{h}{\text{Sh} \frac{\pi H}{L}} \cdot \frac{\pi}{T} \cdot \cos \pi \left(\frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{L} \right);$$

$$dx = dx_0 \left[1 - \frac{\pi}{L} \cdot \cos \pi \left(\frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \right].$$

Se tendrá, sustituyendo:

$$\begin{aligned} -dE &= dt \cdot \frac{L}{T} \cdot \mathcal{H} \cdot A \cdot \frac{h^2}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \int_0^{2L} \left[\cos^2 \pi \left(\frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{L} \right) - \frac{\pi h}{L \text{Sh} \pi \frac{H}{L}} \cdot \cos^3 \left(\frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{L} \right) \right] dx_0 = \\ &= \mathcal{H} \cdot \pi \cdot g \cdot A \cdot h^2 \cdot \frac{1}{\text{Sh}^2 \frac{\pi H}{L} \text{Ct} h \frac{\pi H}{L}} \cdot \frac{dt}{T} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \pi = \\ &= 2 \mathcal{H} \cdot \pi \cdot g \cdot A \cdot L \cdot h^2 \cdot \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{dt}{T}. \quad [1] \end{aligned}$$

Nótese que el segundo término de la integral representa la diferencia entre dx y dx_0 , y que su integral definida, siendo nula, puede sustituirse una diferencial por otra.

La energía de la onda en un instante es, como sabemos:

$$E = A \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot h^2.$$

Y, por tanto, la ecuación diferencial de la energía será:

$$-\frac{dE}{E} = \frac{2 \mathcal{H} \pi}{\rho} \cdot \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{dt}{T} = \frac{2\xi}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot \frac{dt}{T}. \quad [2]$$

Siendo $\xi = \frac{\mathcal{H} \pi}{\rho}$. Si $\frac{H}{L}$ no varía mucho en el intervalo considerado, o si sustituimos la variable $\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}$ por su valor medio, la ecuación anterior

es integrable y da:

$$E = E_1 e^{\frac{-2\xi}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \cdot t} \quad [3]$$

Considerando los puntos 1 y 2 separados por un avance (un semiperíodo), para los que conocemos $A_1 L_1$, $A_2 L_2$, y tomando para $\frac{H}{L}$ el valor medio correspondiente al cuadrilátero de avance, la semialtura h_2 vendrá dada en función de h_1 por:

$$h_2 = h_1 \left[\sqrt{\frac{A_1 L_1}{A_2 L_2}} e^{-\frac{\xi}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}} \right]. \quad [4]$$

Y en un punto situado a n avances del origen $H = L_0$ (para el que $\frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \simeq 0$);

$$h_n = h_0 \left[\sqrt{\frac{A_0 L_0}{A_n L_n}} e^{-\sum_0^n \xi \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}} \right]. \quad [5]$$

Todo quedará, pues, resuelto, si se conoce el valor de ξ ligado al coeficiente de rozamiento $\mathcal{H}$ por $\xi = \frac{\pi}{\rho} \cdot \mathcal{H}$. Claro es que ξ y $\mathcal{H}$ varían con la naturaleza del fondo, y su determinación exacta es difícil, pero sí podemos encontrar un valor medio aceptablemente aproximado, o que, cuando menos, nos dé idea de su orden de magnitud. Y esto puede intentarse por distintos métodos. Si hay una pendiente de fondo α que tenga la propiedad de conservar la altura cuando A es constante, se tendrá, para dos puntos, 1 y 2, separados m avances:

$$\begin{aligned} 2\xi &= \frac{1}{m} \ln \frac{E_1}{E_2} \cdot \text{Sh} \frac{2\pi H}{L} = \\ &= (\ln L_1 - \ln L_2) \text{Sh} \frac{2\pi H}{L} \cdot \frac{1}{m}; \end{aligned}$$

siendo $\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}$ el valor medio correspondiente al intervalo, o aproximadamente el valor correspondiente al punto medio situado a $\frac{m}{2}$ avances. Como en un avance el valor de $\frac{H}{L}$ varía en $\frac{L\alpha}{L} = \alpha$, en los m avances variará en $m\alpha$, y el valor medio será el correspondiente a $\frac{H_1}{L_1} + \frac{m}{2} \alpha$. Pareciendo lógico que la aproximación obtenida sea del mismo orden que la que corresponde al plano de oleaje dibujado con un avance de m semiperíodos. $m = 10$ y $\alpha = 0,01$, los valores de $\frac{H_1}{L_1}$ y $\frac{H_2}{L_2}$ diferirán en 0,10, y el valor medio, $\frac{H}{L}$ en 0,05, y puede hallarse ξ mediante los valores

de la Tabla de Iribarren, de características de las ondas en profundidades reducidas (REV. DE O. P., 1941, página 15), teniéndose así:

Y comparando esta expresión con la [1] se tiene $\mathcal{H} = \rho \alpha$, y por tanto, $\xi = \pi \alpha$; y si la pendiente conservadora de la altura es del 1 por 100, se tendrá

$\frac{H}{L}$ (1)	L (2)	$l_n 1000 L$ (3)	$l_n \frac{L^2}{L_1}$ (4)	$\frac{2 \pi H}{L}$ (5)	$\text{Sh} \frac{2 \pi H}{L}$ (6)	$\xi = \frac{(6) \times (4)}{20}$
1	0,996	6.90375				
0,95			0,00302	5,96	193,75	0,030
0,90	0,993	6.90073				
0,85			0,00606	5,34	104,17	0,031
0,80	0,987	6.89467				
0,75			0,01121	4,72	55,65	0,031
0,70	0,976	6.88346				
0,65			0,02175	4,08	29,56	0,032
0,60	0,955	6.86171				
0,55			0,04060	3,46	15,88	0,032
0,50	0,917	6.82111				
0,45			0,07470	2,82	8,36	0,031
0,40	0,851	6.74641				
0,35			0,14654	2,20	4,46	0,032
0,30	0,735	6.59987				
0,25			0,27551	1,58	2,30	0,031
0,20	0,558	6.32436				
0,15			0,62038	0,94	1,08	0,033
0,10	0,300	6.70378				

Media 0,0315

La columna final parece indicar que el valor de ξ es una constante, y que las pequeñas diferencias obtenidas débense a acumulación de errores, y efectivamente, vamos a comprobar que para cada valor de ξ hay una pendiente que conserva las alturas. La pérdida de energía, puesto que la altura se conserva, será:

$$-dE = A \rho \cdot g \cdot h^2 \cdot dL.$$

Si hacemos $\frac{\pi H}{L} = \mu$, se tiene:

$$L = L_0 \text{Tah } \mu;$$

$$\frac{dL}{d\mu} = L_0 \frac{1}{\text{Ch}^2 \mu} = \frac{L}{\text{Th } \mu \text{Ch}^2 \mu} = \frac{2L}{\text{Sh}^2 \mu}.$$

Pero por ser α la pendiente de fondo, el decremento de $\mu = \frac{\pi H}{L}$ en un semiperíodo, es $\pi \alpha$ (despreciando términos de grado superior), y en dt :

$$d\mu = \pi \alpha \frac{dt}{T};$$

$$dL = \frac{2L}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \pi \alpha \frac{dt}{T}$$

Y por tanto:

$$-dE = A \cdot \rho \cdot g \cdot h^2 \cdot \frac{2L}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \pi \alpha \frac{dt}{T}.$$

$\xi = 0,01 \pi = 0,0314$, que, como es lógico, coincide con el que acaba de obtenerse.

Otra posibilidad de obtener el valor de ξ es deducirlo del coeficiente de rozamiento hidráulico, tal como se aplica en el caso de movimiento uniforme. Sean para ello: V , la velocidad en un punto cualquiera; V_s y V_f , las de superficie y de fondo, y V_0 , la velocidad media en una vertical. En un cauce de anchura

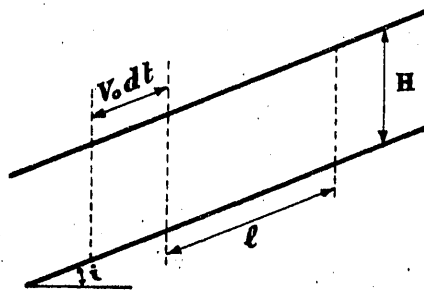


Figura 1.ª

indefinida destaquemos un paralelepípedo de longitud l y ancho A ; el camino recorrido en dt es $V_0 dt$, y la pérdida de altura de cada molécula, $i V_0 dt$. La energía perdida (sólo potencial, ya que la cinética es constante), valdrá (fig. 1.ª):

$$-dE = \rho \cdot g \cdot A \cdot l \cdot H \cdot i V_0 dt.$$

El rozamiento en el fondo valdrá $\mathcal{H} A l v_f^2$, y el trabajo de este rozamiento:

$$-dE = \mathcal{H} \cdot A \cdot l \cdot V_0 \cdot V_f^2 \cdot dt.$$

E igualando estas expresiones:

$$\mathcal{H} = \frac{\rho \cdot g \cdot H \cdot l}{V_f^2}.$$

La velocidad media vale $V_0 = C \sqrt{H i}$, siendo C el coeficiente de Chézy, que para cauces naturales de gran anchura vale, aproximadamente, 50 (según la fórmula de Eytelwein o Tadini; y, efectivamente, puede verse que los valores experimentales de C , para distintos ríos, publicados en la *Hidráulica*, de Forchheimer, no difieren gran cosa de él). Por otra parte, las velocidades en una vertical están relacionadas por la fórmula de Bazin:

$$\frac{V_s - V}{\sqrt{H i}} = 20 \left(\frac{Z}{h} \right)^2.$$

Para $Z = h$, se tiene $V_s - V_f = 20 \sqrt{H i}$. Y como, además, la expresión anterior es parabólica, la velocidad media vale:

$$V_0 = 50 \sqrt{H i} = \frac{2}{3} V_s + \frac{1}{3} V_f.$$

Obteniéndose así:

$$V_s = 36,6 \sqrt{H i}.$$

Y por tanto:

$$\mathcal{H} = \frac{\rho g}{36 \cdot 6^2};$$

$$\xi = \frac{\mathcal{H} \pi}{\rho} = \frac{9,80 \times 3,14 \times 1,018}{36 \cdot 6^2} = 0,023.$$

No hay excesiva discrepancia entre los valores de ξ obtenidos (0,0314 y 0,023), que corresponden a dos fenómenos aparentemente tan distintos como son el movimiento uniforme en un canal y la propagación de olas en la costa. Y menor nos parecerá la diferencia si en vez de comparar los valores de ξ o de las "pendientes compensadoras de alturas", nos fijamos en los coeficientes de Chézy correspondientes, que son 45 y 50, respectivamente.

Por otra parte, el coeficiente de rozamiento no es constante, pues depende de la naturaleza del fondo y de la profundidad relativa (por la distinta influencia de la viscosidad respecto al rozamiento propiamente dicho); recordamos que el coeficiente de Chézy también depende de estas circunstancias. Sin embargo, la influencia predominante sobre el valor de dicho coeficiente

es la propia pendiente de la plataforma costera. Efectivamente, si la pendiente es muy rígida, el fondo está formado por elementos más gruesos que si es muy tendida (puede comprobarse teóricamente por aplicación de la fórmula de Iribarren para los diques de escollera), y, por consiguiente, el rozamiento en aquella será mayor. Y cuando estos elementos del fondo sean comparables, dado que a igualdad de las demás condiciones la altura de ola es mayor con pendiente grande, también lo será la velocidad en el fondo, y, por consiguiente, mayor la remoción de la arena, lo que trae consigo un aumento del rozamiento. Por último, la teoría trocoidal supone que las elipses orbitarias tienen sus ejes horizontal y vertical, mas la elipse inferior se reduce a una recta paralela al fondo, y, por tanto, no horizontal si éste está pendiente. Los ejes de las órbitas en una vertical no pueden, pues, ser exactamente paralelos entre sí sino con solera horizontal, y ese giro relativo de los ejes produce una pérdida de energía que se traduce en un aumento del rozamiento aparente, tanto mayor cuanto más rígida sea la pendiente.

La determinación del valor del coeficiente de rozamiento por observación de casos reales es difícil, por los inevitables errores de medición de longitudes y alturas de ola inicial y final. Dentro de esta imprecisión, los datos de la observación que, con análoga aproximación que muchos coeficientes hidráulicos, confirman la pendiente conservadora del 1 por 100 señalada por Iribarren en 1941, parecen indicar que es aceptable, en una primera aproximación, tomar como valor de ξ la expresión:

$$\xi = \frac{\pi}{100} \frac{1 + 2\beta^2}{2 + \beta^2}.$$

O, lo que es igual, que a cada pendiente β de la plataforma costera corresponde una pendiente compensadora, α , dada por:

$$\alpha = \frac{1 + 2\beta^2}{2 + \beta^2}. \quad [6]$$

En ambas expresiones, α y β , medidas en centésimas. Para pendientes negativas puede admitirse el mismo valor de α que para pendientes nulas, es decir, $\alpha = 0,5 \%$ (1).

Si se estudian las alturas de ola teóricas que resultan con coeficientes de rozamiento distintos — dentro del orden de magnitud indicado — y diferentes pendientes costeras, se ve que la influencia de un error en la estimación del coeficiente de rozamiento no es grande para pendientes relativamente fuertes (caso en

(1) Estos valores numéricos sólo son aproximadamente válidos para longitudes del orden de las olas de temporal. Para grandes longitudes, como en el caso de la onda de marea, α es muchísimo menor.

que hay incrementos de altura), y para pendientes no muy alejadas del 1 %, es del orden del margen de precisión a que podemos aspirar al dibujar un plano de oleaje y del grado de aproximación de la teoría trocoidal y de las fórmulas del *fetch*. Sólo con pendientes muy suaves y con pequeñas profundidades relativas, las diferencias pueden ser de cierta consideración; mas, precisamente en estos casos, el método que vamos a exponer conduce a reducciones de alturas aun en el caso en que el coeficiente adoptado estuviera, por razones de seguridad, más bien aproximado por defecto. Una mayor aproximación sólo será posible mediante ensayos sobre modelos, y entonces será ocasión de retocar, en su día, los cuadros y ábacos que siguen.

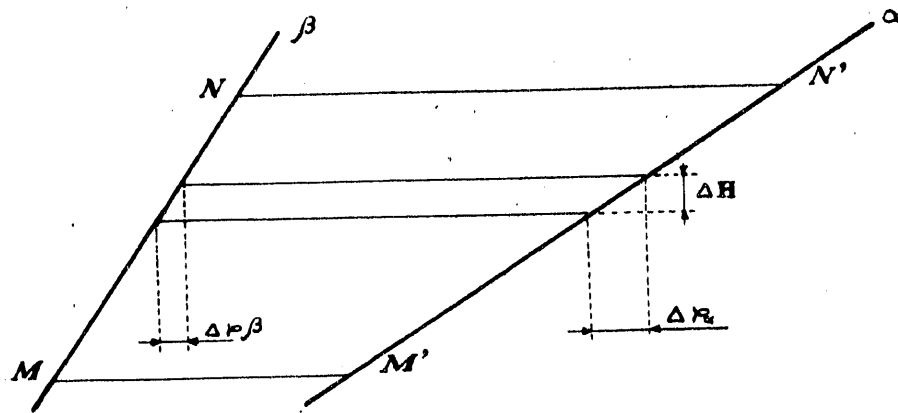


Figura 2.ª

El cálculo de la altura puede llevarse a cabo, analíticamente, por aplicación de la fórmula [5]. Para ello se ha calculado la adjunta tabla que da los valores de $\frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}$ en función de $\frac{H}{L_0}$, por considerar más

cómoda para las aplicaciones entrar con ellos que con los de $\frac{H}{L}$ (siendo para ello $\frac{L}{L_0} = \text{Sh} \frac{\pi H}{L}$, o sea $\frac{H}{L_0} = \frac{H}{L} \text{Ph} \frac{\pi H}{L}$, basta resolver esta ecuación para cada valor de $\frac{H}{L_0}$). Se tienen también, en dicha tabla, los valores de K y $1/K$.

Multiplicando los valores de $R = \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}$ de

la quinta columna por los que se adopten para ξ , y sumados los valores correspondientes a los avances sucesivos, la diferencial de la fórmula [5] se obtiene inmediatamente con una tabla de neperianos. Final-

mente, la última columna da los valores de los loga-

ritmos decimales de $c^{-\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} = \frac{-0,4343}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}$ para

hacer el cálculo con el solo auxilio de la regla.

Este método de cálculo, teóricamente satisfactorio, es, sin embargo, muy laborioso y expuesto a errores; afortunadamente, en el caso de fondo plano puede simplificarse notablemente. Hacemos notar que las expresiones que siguen no dependen de los métodos seguidos para la deducción del coeficiente de rozamiento; para que sean aplicables, basta que se verifique que para una determinada pendiente de fondo el coeficien-

te de rozamiento pueda admitirse que se mantiene constante.

Sean dos pendientes de fondo, α y β , recorridas por ondas de igual longitud inicial (fig. 2.ª), y consideremos sobre ellas pares de puntos a la misma altura.

La ecuación de energía [3], puede también escribirse en función de la semilongitud de onda y la distancia recorrida:

$$E = E_1 e^{-2\xi/\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \times \frac{x}{L}.$$

Para un pequeño intervalo ΔH , se tendrá sobre la pendiente α :

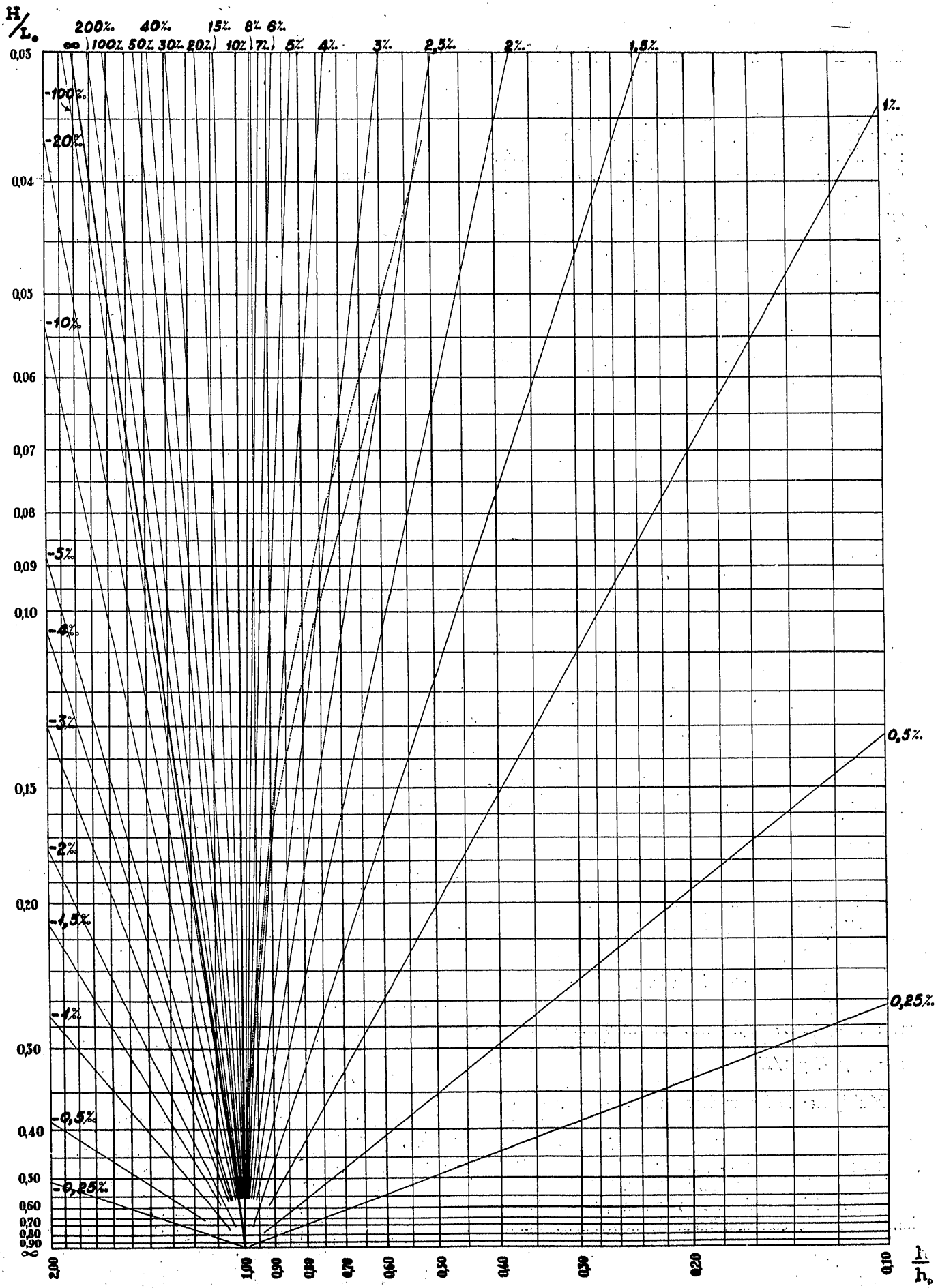
$$E' = E_1 e^{-2\xi/\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \times \frac{\Delta x \alpha}{L} = E_1 Q \Delta x \alpha.$$

Y sobre la β :

$$E = E_1 e^{-2\xi/\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}} \times \frac{\Delta x \beta}{L} = E_1 Q \Delta x \beta.$$

Ya que, siendo iguales H y L_0 , lo es también L . Tendremos, pues:

$$\frac{E}{E_1} = \left(\frac{E'}{E_1} \right)^{\frac{\Delta x \beta}{\Delta x \alpha}} = \left(\frac{E'}{E_1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$



Y aplicando esta expresión a intervalos sucesivos entre M y N :

$$\frac{E_N}{E_1} \times \frac{E_1}{E_2} \times \dots \times \frac{E_{M-1}}{E_M} = \frac{E_N}{E_M} =$$

$$= \left(\frac{E'_N}{E'_1} \times \frac{E'_1}{E'_2} \times \dots \times \frac{E'_{M-1}}{E'_M} \right)^{\alpha/\beta} = \left(\frac{E'_N}{E'_M} \right)^{\alpha/\beta}$$

Si no hay expansión, y α es la pendiente que conserva la altura, se tendrá:

$$E'_N = P L_N h^2;$$

$$E'_M = P L_M h^2;$$

$$E_N = P L_N h_N^2;$$

$$E_M = P L_M h_M^2.$$

$\frac{H}{L_0}$	$\frac{H}{L}$	K	$\frac{1}{K}$	$R = \frac{1}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}$	$R' = \frac{0,4343}{\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}}$
0,95	0,955	1,005	0,995	0,005	0,002
0,90	0,906	1,007	0,993	0,007	0,003
0,85	0,858	1,009	0,991	0,009	0,004
0,80	0,810	1,012	0,988	0,012	0,005
0,75	0,763	1,017	0,984	0,017	0,007
0,70	0,716	1,023	0,978	0,022	0,010
0,65	0,670	1,030	0,971	0,030	0,013
0,60	0,624	1,041	0,961	0,040	0,017
0,55	0,580	1,054	0,949	0,052	0,023
0,50	0,536	1,072	0,933	0,069	0,030
0,45	0,493	1,095	0,914	0,090	0,039
0,40	0,450	1,126	0,888	0,119	0,052
0,35	0,408	1,167	0,857	0,156	0,068
0,30	0,367	1,221	0,819	0,201	0,087
0,25	0,325	1,298	0,770	0,264	0,115
0,20	0,282	1,410	0,709	0,350	0,152
0,15	0,237	1,582	0,632	0,475	0,206
0,10	0,188	1,885	0,531	0,678	0,294
0,09	0,178	1,971	0,507	0,732	0,318
0,08	0,167	2,078	0,481	0,799	0,347
0,07	0,155	2,215	0,451	0,881	0,383
0,06	0,143	2,374	0,421	0,976	0,424
0,05	0,130	2,583	0,387	1,098	0,477
0,04	0,115	2,887	0,346	1,271	0,552
0,03	0,100	3,286	0,304	1,492	0,648
0,02	0,081	4,011	0,249	1,882	0,817
0,01	0,057	5,643	0,177	2,734	1,187

Y sustituyendo:

$$\frac{h_N^2}{h_M^2} \times \frac{L_N}{L_M} = \left(\frac{L_N}{L_M} \right)^{\alpha/\beta}$$

O sea:

$$h_N = h_M \left(\frac{L_N}{L_M} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = h_M \frac{\left(\frac{L_N}{L_0} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}}{\left(\frac{L_M}{L_0} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}} = \frac{K_M^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}}{K_N^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}} \quad [6]$$

La expresión $M = \frac{1}{\frac{\alpha-\beta}{K z \beta}}$ tiene en un ábaco

una representación sencillísima, ya que, tomando para M y K escalas logarítmicas, las líneas β son rectas. Para mayor comodidad, en el dibujado se ha graduado el eje de ordenadas con las profundidades unitarias $\frac{H}{L_0}$ en lugar de las $K = \text{Ct } h \frac{\pi H}{L}$.

Fácil es ver que la fórmula anterior se aplica igualmente a pendientes negativas; sea una pendiente negativa, β , y β' (fig. 3.^a), la pendiente positiva de igual valor absoluto; el factor que mide la pérdida de

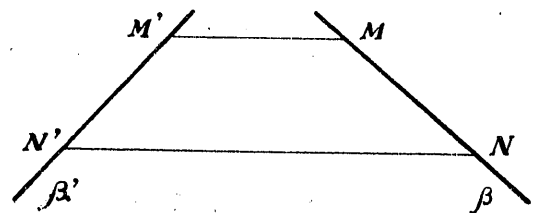


Figura 3.^a

energía de M a N es el mismo que el que mide la pérdida de N' a M' , ya que, punto a punto, los valores de L y H son los mismos, se tendrá, pues:

$$\frac{E_N}{E_M} = \frac{E'_{M'}}{E'_{N'}}$$

O sea:

$$\frac{L_N h_N^2}{L_M h_M^2} = \frac{L_{M'} h_{M'}^2}{L_{N'} h_{N'}^2}$$

Pero, como antes se ha visto:

$$\frac{L_{M'} h_{M'}^2}{L_{N'} h_{N'}^2} = \left(\frac{L_{M'}}{L_{N'}} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{L_M}{L_N} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

Y, por tanto:

$$\frac{h_N}{h_M} = \left(\frac{L_M}{L_N} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_M}{L_N} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{L_M}{L_N} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{2\beta}} = \left(\frac{K_M}{K_N} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{2\beta}}$$

Vemos, pues, que la expresión [6] es general. Para $\beta = 0$ toma la forma indeterminada 1^∞ , lo que es lógico. En este caso de fondo horizontal el cálculo ha de hacerse mediante la tabla antes calculada.

Cuando el fondo no es horizontal, el empleo del ábaco es sencillo: entrando con la pendiente y las profundidades unitarias inicial y final, la relación de las abscisas correspondientes da el factor de altura.

Si la profundidad inicial considerada es igual o mayor que 1, la abscisa es directamente la altura en función de la inicial.

Es interesante ver cómo se transforman las expresiones antes obtenidas cuando H es muy pequeño respecto a L , es decir, para ondas de mareas, en cuyo caso:

$$L = CT = T\sqrt{gH}.$$

Y, por tanto:

$$K = \frac{L_0}{L} = \frac{L_0}{T\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

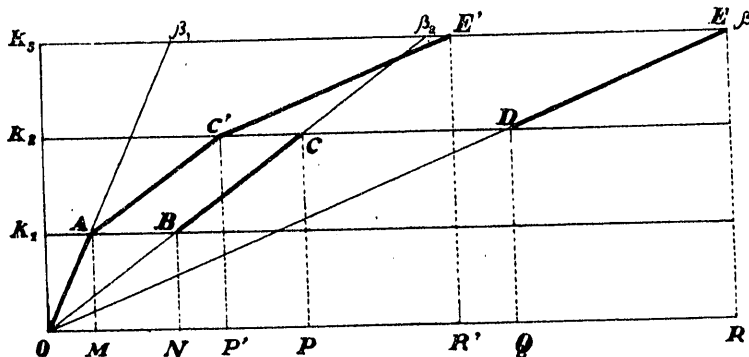


Figura 4.ª

Si el fondo está formado por varias pendientes sucesivas, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, pueden los vértices considerarse sucesivamente como puntos final e inicial, y habrá que multiplicar los sucesivos coeficientes de reducción obtenidos para cada trozo. O sea (fig. 4.ª), que la línea o fondo estará representada en el ábaco por los segmentos OA, BC, DE , y los coeficientes de reducción necesarios van siendo:

$$OM, OM \times \frac{OP}{ON}, OM \times \frac{OP}{ON} \times \frac{OR}{OQ}, \text{ etc.}$$

Pero si trazamos por A una paralela a BC , como las abscisas están leídas en escala logarítmica y la distancia absoluta $NP = MP'$, se tendrá:

$$\frac{OP}{ON} = \frac{OP'}{OM}, \text{ etc.}$$

Y lo mismo las demás, con lo que los coeficientes de reducción serán OM, OP', OR' , etc. Es decir, que si se dibuja sobre el ábaco la transformada $OA, C'E'$, del perfil longitudinal del fondo, según la trayectoria, las abscisas son las alturas de ola en función de h_0 . La misma propiedad puede emplearse cuando alguna de las líneas se salen del ábaco dibujado.

Con lo que la expresión [6] pasa a ser:

$$h_N = h_M \left(\frac{H_N}{H_M} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{4\beta}} = h_M \left(\frac{H_M}{H_N} \right)^{\frac{\beta - \alpha}{4\beta}}. \quad [7]$$

Si $\alpha = 0$, es decir, si el rozamiento es nulo, resulta:

$$h_N = h_M \sqrt[4]{\frac{H_M}{H_N}}.$$

Que coincide por la obtenida para este caso por Iribarren (REV. DE O. P., julio 1942, pág. 333).

Y, en el caso de fondo horizontal, puesto que puede sustituirse $\text{Sh} \frac{2\pi H}{L}$ por $\frac{2\pi H}{L}$, el coeficiente vale:

$$-\frac{\xi}{T} \cdot \frac{t}{\frac{2\pi H}{L}} = \frac{-\xi x}{L \frac{2\pi H}{L}} = \frac{-\pi \alpha x}{2\pi H} = -\frac{\pi \alpha}{2\pi}.$$

Tomando la ecuación [7] la sencilla expresión:

$$h_N = h_M e^{-\frac{\alpha x}{2H}}. \quad [8]$$

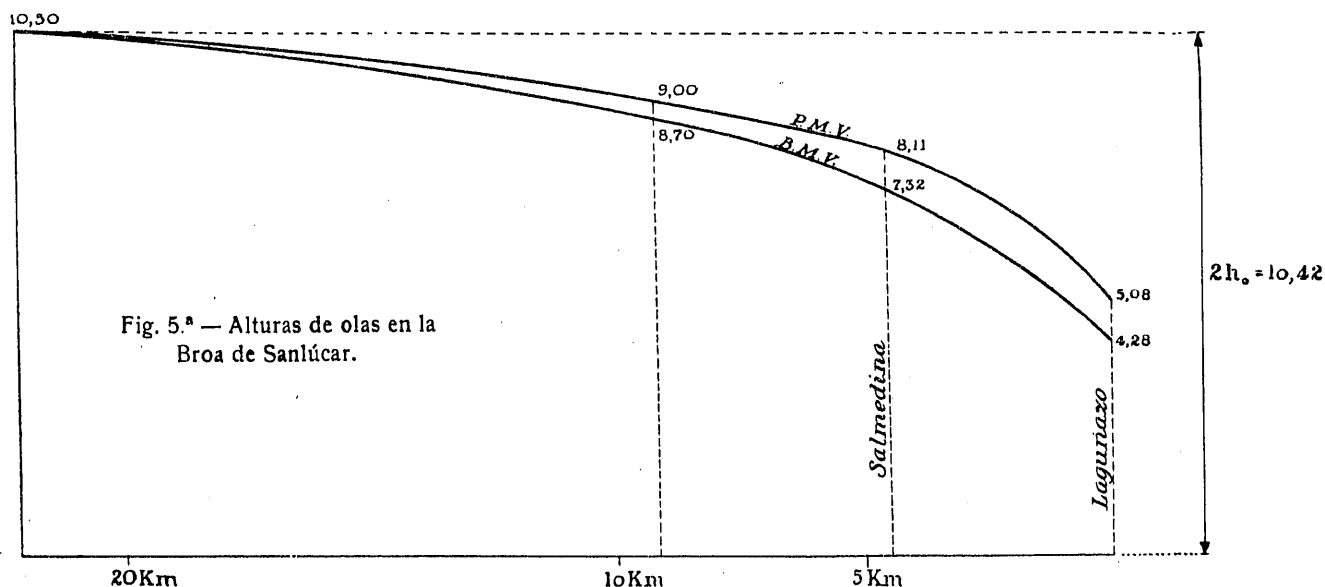


Fig. 5.ª — Alturas de olas en la Broa de Sanlúcar.

Aplicación a la Broa de Sanlúcar.

El largo máximo en dirección SO 1/40, es de unas 3 100 millas, o sean, unos 5.740 Km. Las características de la máxima ola en mar libre serán:

$$2h_0 = 1.2 \sqrt[4]{F} = 10,42 \text{ m.}$$

$$2L_0 = 3.5 (2h_0)^2 = 380 \text{ m.}$$

Si se dibuja el plano de oleaje para esta dirección, las expansiones frontal y lateral son muy pequeñas. De no tener en cuenta la influencia de la pendiente de fondo, se llegaría, a la altura de Salmedina, a amplitudes del orden de $2h = 10,42 \sqrt{\frac{380}{425}} = 9,85 \text{ m.}$

Y en el Lagunazo:

$$2h = 9.85 \sqrt{\frac{425}{480}} = 9,26.$$

Esta última, por expansión lateral, reduce a 8,30 m., es decir, próximamente en el 10 %. Como las sondas respectivas a la B. M. V. son de 15 y 7 m., las olas debían romper en B. M. antes de llegar al Lagunazo y al P. M. poco después, lo que está muy lejos de ocurrir.

Si dibujamos el perfil longitudinal según la trayectoria, encontramos los calados y pendientes medias siguientes:

Sondas - B. M. V. E.	Pendientes
490	2,1 ‰
140	8 ‰
70	3,5 ‰
25	2,1 ‰
(Salmedina) 15	1,8 ‰
(Lagunazo) 7	

En P. M. V. E. hay que sumar, a las sondas anteriores, la máxima carrera de marea, que vale por ser 2,04 la unidad de altura: $2 \times 1,18 \times 2,04 = 4,82$ metros. Tendremos, por lo tanto:

H/L_0		Pendientes ‰
B. M. V. E.	P. M. V. E.	
2,58	2,60	21
0,74	0,76	8
0,37	0,39	3,5
0,13	0,16	2,1
0,079	0,104	1,8
0,037	0,062	

Con estos datos se han dibujado sobre el ábaco, de puntos, las transformadas. Las abscisas de esas líneas son las reducciones de altura correspondientes a cada profundidad. Los resultados se han llevado a la figura 5.ª. Es interesante notar que se obtiene mayor amplitud en pleamar que en bajamar, fenómeno que es general, pero que se acusa más en la Broa por la gran extensión que recorre la ola en profundidades muy reducidas.

Y, para terminar, queremos expresar nuestro agradecimiento a nuestro compañero el ilustre Profesor de Puertos D. Ramón Iribarren, que estudió estas notas y nos ayudó con sus consejos, y, sobre todo, por el amable comentario con que ha querido prologarlas.