

CURVAS DE TRANSICION EN FERROCARRILES

Por FERMÍN GARCÍA GONZÁLEZ, Ingeniero de Caminos.

La segunda parte de este importante trabajo, iniciado en nuestro número anterior, entra ya de lleno en los replanteos de estas curvas de transición, y presenta al final las tablas, de cuya utilidad práctica podrán juzgar nuestros lectores.

(Continuación.)

Condiciones que debe reunir un replanteo previo para poder realizar las transiciones.

Distancia entre tangentes para que quepan las longitudes de acuerdo previstas. — Cuando tenemos un trazado previo (fig. 7.^a) sin curvas de acuerdo y que-

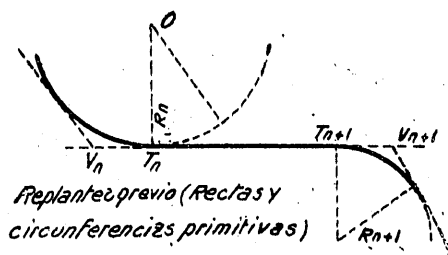


Figura 7.^a

remos transformarle en otro con curvas de acuerdo, es preciso modificar las rectas y círculos primitivos lo suficiente para que queden los huelgos necesarios (figura 8.^a). Como los huelgos son del orden de 2 m. y la distancia $T_n T_{n+1}$ mayor de 100 metros, se comprende que se puede admitir que la distancia $R_n R_{n+1}$ será aproximada a $T_n T_{n+1}$, a los efectos de dimensiones generales.

Como $A_n R_n$ es sensiblemente:

$$\frac{L_n}{2} \text{ y } \frac{R_{n+1} A_{n+1}}{R_n} = \frac{L_{n+1}}{2},$$

y para acuerdos de peralte hay que contar con un su-

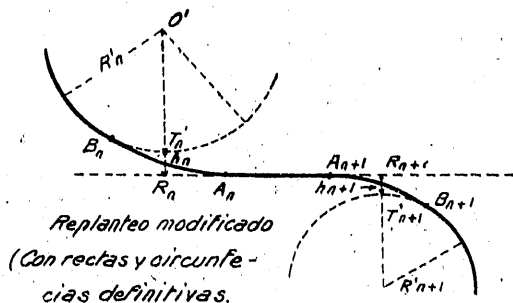


Figura 8.^a

plemento de longitud en recta de $0,2 V_m$, la recta $T_n T_{n+1}$ debe ser como mínimo:

$$\frac{L_n}{2} + \frac{L_{n+1}}{2} + 0,2 V_m + 0,2 V_m,$$

y como se trata de curvas próximas de distinto radio, se pueden adoptar longitudes de acuerdo iguales a la de menor radio, pues la V_m se puede considerar la misma en los dos.

En resumen: la mínima distancia entre tangentes en el replanteo previo debe ser, siendo r el radio menor de los dos que hay en los extremos, $L_r + 0,4 V_r$, en que L_r y V_r son la longitud de acuerdo y velocidad máxima correspondiente a la curva de menor radio.

Esta fórmula se convierte, con las anteriores, en las siguientes: en el primer tipo de ferrocarriles, y para

$$r < 1100 \text{ m.}, \overline{T_n T_{n+1}} \cong 9,10 \sqrt{R},$$

y para

$$r > 1100 \text{ m.}, \overline{T_n T_{n+1}} \cong 240 \sqrt{\gamma} + 60 \left(\gamma = \frac{1100}{r} \right).$$

En el segundo tipo de ferrocarriles, para

$$r < 900, \overline{T_n T_{n+1}} \cong 5,60 \sqrt{r},$$

y para

$$r > 900, \overline{T_n T_{n+1}} \cong 120 \sqrt{\gamma} + 50 \text{ m.} \left(\gamma = \frac{900}{r} \right).$$

Longitud mínima de curva. — Las mismas razones y magnitudes deducidas para la mínima distancia entre tangentes del replanteo previo sirven para la mínima longitud en curva circular primitiva, ya que los acuerdos se realizan mitad en recta y mitad en curva con gran aproximación, y se necesita longitud suficiente de curva para que quepan en ella las mitades de los acuerdos de sus extremos. Una curva corta equivale a una recta corta, pues tampoco permite acuerdo. La longitud mínima de una curva será la que por las consideraciones anteriores resulte mayor de las dos rectas primitivas adyacentes.

Nota. — Si bien hemos adoptado como tipo de acuerdo la radioide modificada en alzado, debe poderse hacer en su día, si ello no conduce a gastos

actuales, la implantación de curvas en S, lo cual se podrá hacer sin variar nada la explanación si hay suficiente longitud de recta entre tangentes y de curvas para el huelgo construido, del orden del 40 por 100 más en la de Schram, y de 60 por 100 en la de Klein. Este aumento de la longitud de curvas y entre tangentes, si se obtiene a costa de disminuir poco el radio, puede resultar en definitiva conveniente al permitir, sin gastos de explanación, toda clase de acuerdos que la experiencia futura dicte.

Las buenas transiciones requieren trazados primitivos con rectas y curvas grandes. Será un trazado mal concebido con miras al porvenir aquel en que, sin razones económicas importantes se abuse del cambio de alineaciones cortas, ya sea de ferrocarril o carretera.

Como empleando la curva de Klein no se necesita el acuerdo de peralte, la longitud necesaria entre rectas sería, para los ferrocarriles del primer tipo:

$$1,60 \times 7,29 \sqrt{r} = 11,66 \sqrt{r}$$

si el radio r (menor de los dos) es menor de 1 100, y

$$384 \sqrt{\gamma} \left(\gamma = \frac{1100}{r} \right)$$

si r es mayor de 1 100 metros. Los mismos valores serán para la longitud mínima de curva.

No consideramos este caso en el de ferrocarriles del segundo tipo.

Replanteo de la radioide.

Una vez fijada la magnitud del acuerdo y el radio de la curva acordada, el replanteo es un *problema geométrico* que se puede hacer con más o menos aproximación con fórmulas, tablas, flechas, etc.

Preparación previa. — La preparación previa consiste en fijar el radio definitivo de la curva acordada y su posición respecto a la recta definitiva.

Todo esto está perfectamente definido si se conoce la magnitud y posición de la mínima distancia entre la recta y la circunferencia acordadas y el radio de la curva.

Replanteo de los extremos. — El replanteo de los extremos se puede hacer con el empleo de tablas o con fórmulas aproximadas. Una vez conocida la posición y magnitud del huelgo, así como el radio definitivo, es decir, la posición de los puntos R y T' y de la recta definitiva XX' normal a RT' , se pueden deducir de las tablas hechas los valores de la longitud AB , y ángulo del acuerdo Φ , así como AR , RD , DB , RV y VB , que nos permiten situar el principio y final del acuerdo y sus tangentes y com-

probar el replanteo, ya que hay magnitudes excesivas (fig. 9.^a).

Tablas para radio unidad. — Dado que para el mismo ángulo Φ del acuerdo todas las magnitudes son proporcionales al radio, se han hecho tablas (para la clotoide y la parábola cúbica) en que se encuentran todas las magnitudes *para radio unidad*. En ellas, cada horizontal representa una radioide unitaria. Para usarlas basta conocer una de las magnitudes del acuerdo (huelgo o longitud generalmente), la cual, dividida por el radio, nos da su valor unitario, que define la radioide unitaria correspondiente; con él, entrando en las tablas, se tiene en la horizontal todas las restantes magnitudes unitarias. Estas se multiplican por el radio y nos dan las magnitudes efectivas (salvo el ángulo Φ , que es un número abstracto y no hay que multiplicar por el radio).

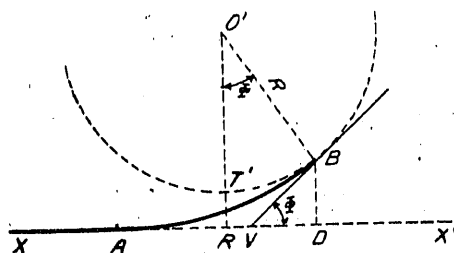


Figura 9.^a

Estas tablas sirven para calcular coordenadas de puntos intermedios como se indica en el dibujo y fórmulas de la clotoide unitaria. (Las tablas que se insertan al final de este artículo.)

Las tablas se han hecho con diferencias lo suficientemente pequeñas para que normalmente baste elegir los números de la horizontal más próxima para tener la radioide que nos conviene; pero, además, están hechas lo suficientemente próximas para poder interpolar linealmente, sin que el error sea mayor de un milímetro, en las ordenadas de los acuerdos corrientes, sirviendo para cualquier radio y para cualquier magnitud de acuerdo.

Replanteo de los extremos por fórmula aproximada. — Con muy pequeño error se puede suponer

$$\text{que } RA = RD, \text{ que } h = \frac{L^2}{24R} = RT', \quad DB = 4h,$$

$$AB = AD, \quad \text{tg } \Phi = \frac{L}{2R} \quad \text{y} \quad VD = \frac{1}{3} L = VB.$$

Esto nos permite, dada una de las magnitudes, determinar rápidamente las demás con aproximación suficiente en muchos casos.

Replanteo de los puntos intermedios. — Este se puede hacer con flechas, y resulta sencillo aplicando

la siguiente fórmula práctica. La flecha en una radioide (y con mayor exactitud en la clotoide) entre dos puntos de curvatura $C_1 = \frac{1}{\rho_1}$ y $C_2 = \frac{1}{\rho_2}$ (1) y separados una longitud d , vale con aproximación menor de un milímetro:

$$f_{1-2} = \frac{C_1 + C_2}{2 \times 8} \times d^2.$$

Como en las radioides la ley de curvaturas es lineal, o sea:

$$C_l = \frac{l}{L} \times \frac{1}{R} = \frac{\epsilon}{R},$$

si l_1 es la distancia al origen del primer punto, y l_2 la del segundo, y L la longitud total del acuerdo, y llamamos:

$$\epsilon_1 = \frac{l_1}{L} \quad \epsilon_2 = \frac{l_2}{L},$$

tenemos:

$$\frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{R} \times \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2},$$

y queda:

$$f_{1-2} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2R} \times \frac{d^2}{8} = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{d^2}{16R}.$$

Como a su vez $d = (\epsilon_2 - \epsilon_1) L$, también se puede poner la fórmula bajo la forma:

$$f_{1-2} = (\epsilon_2 + \epsilon_1) (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \frac{L^2}{16R}.$$

Si observamos que el huelgo es con gran aproximación $\frac{L^2}{24R}$, resultará que la flecha vale con aproximación suficiente:

$$f_{1-2} = (\epsilon_2 + \epsilon_1) (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \cdot \frac{3}{2} h. \quad (2).$$

Si dividimos el acuerdo en n partes iguales, la flecha entre los puntos p y q (fig. 10):

$$\left(\epsilon_1 = \frac{p}{n} \quad \epsilon_2 = \frac{q}{n} \right),$$

vale:

$$\frac{3}{2} (p + q) (p - q)^2 \times \frac{h}{n^3} = f_{p,q}$$

El error mayor del replanteo por flechas sería el

- (1) ρ es el radio de curvatura en el punto del acuerdo.
(2) h es el huelgo del acuerdo considerado.

del punto medio, partiendo de los extremos, y, por ello, en las tablas se hallan las coordenadas del punto medio, pudiendo ya, sin error práctico, intercalar los otros por flechas.

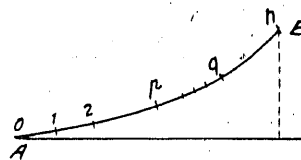


Figura 10.

En resumen: una vez situados los extremos del acuerdo y el punto medio, se puede replantear con error menor de un milímetro en la práctica o comprobar el replanteo hecho dividiendo el acuerdo en n partes y hallando la flecha entre dos puntos de numeraciones, q y p , por la fórmula:

$$f_{p,q} = \frac{3h}{2n^3} (p + q) (p - q)^2.$$

Con esta fórmula se pueden hacer múltiples comprobaciones de flechas, reponer puntos perdidos y hasta replantear todo el acuerdo partiendo de dos puntos de numeración conocida y del huelgo total.

Se ve que para las curvas en que el huelgo sea el mismo y el número de divisiones también, resultan los mismos valores para las flechas y podemos hacer cuadros como el siguiente (para $n = 8$), que nos dan todas las flechas para cualquier huelgo y para todas las combinaciones de puntos, permitiendo múltiples comprobaciones (fig. 11).

Cuadro de flechas para una división del acuerdo en ocho partes y con huelgo h .

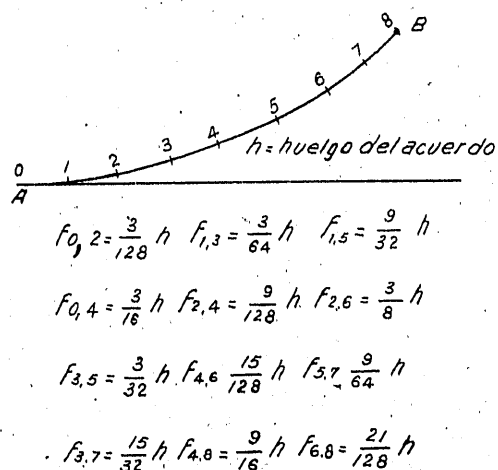


Figura 11.

Replanteo para explanaciones.

Primer procedimiento: Empleando las tablas.— Una vez encajado el acuerdo situando el punto R de referencia entre recta y circunferencia definitiva, se pueden replantear los extremos, el medio y el vértice auxiliar V con las tablas y los puntos intermedios, por flechas.

El vértice V (fig. 9.) con el punto B nos da la tangente a la curva circular que hay a continuación de la transición, que con la tangente del otro lado nos permitirá el replanteo en la forma corriente de la circunferencia restante del trazado.

Segundo procedimiento: Empleando el círculo de radio $2R$.— Situada la mínima distancia, RT' , se ve por la figura $RA_1 = RD_1$, $RT' = h = A_1E - T'F = 2R(1 - \cos \alpha) - R(1 - \cos \alpha)$, de donde $(1 - \cos \alpha) = \frac{h}{R}$. De aquí se deduce α , y, con ello,

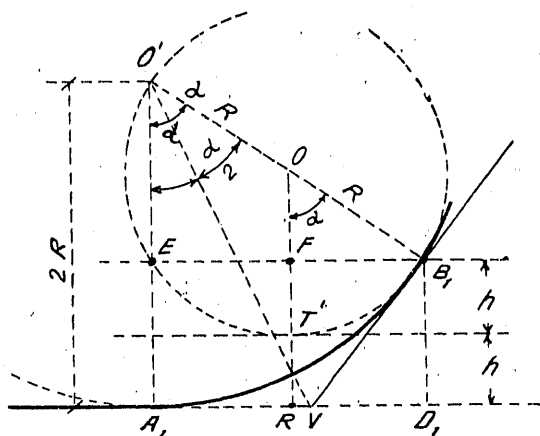


Figura 12.

todas las magnitudes que pueden interesar para el replanteo o comprobación, y así tenemos $RD_1 = RA_1 = R \sin \alpha$ (fig. 12):

$$D_1B_1 = 2h; \quad VB_1 = 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = VA_1;$$

$$RV = R \left(2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha \right),$$

que nos permiten colocar A_1 , D_1 , B y la tangente al círculo restante VB_1 .

Labor previa de encaje del acuerdo.

En los replanteos anteriores hemos supuesto que habíamos llegado a obtener un trazado en el que estaban replanteados la recta definitiva y la mínima distancia entre ella y el círculo definitivo. En la práctica se suele tener un replanteo previo con rectas y

circunferencias (que llamaremos primitivas) tangentes entre sí, que naturalmente hay que modificar un poco para obtener un trazado formado por rectas y círculos separados por los huelgos correspondientes. Adoptada la magnitud del huelgo a emplear, hay que situar la recta definitiva, el radio definitivo y el punto R de referencia entre recta y círculo definitivo (de mínima distancia), con lo que hemos visto podemos encajar el acuerdo.

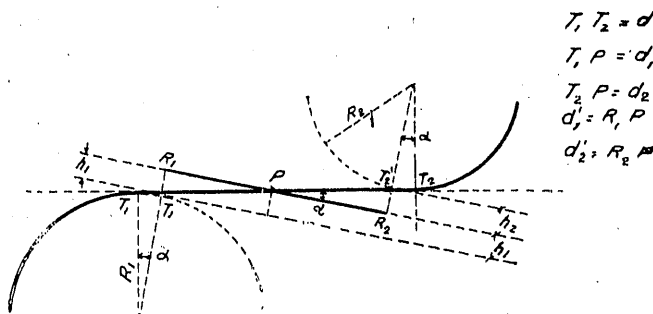


Figura 13.

Podemos hacerlo por cuatro procedimientos fundamentales o por una mezcla de ellos cuando las circunstancias lo aconsejen. En todos ellos el problema es determinar el radio definitivo R' y la distancia (RT) que fija el punto de referencia R .

Primer procedimiento.— Conservando las curvas primitivas (o sea, su centro y su radio) y moviendo la recta primitiva (fig. 13).

Se gira la recta T_1T_2 un ángulo α alrededor de un punto, P , de modo a producir los huelgos h_1 y h_2 .

Si d es la distancia T_1T_2 es fácil ver que con gran aproximación (suficiente para explanaciones):

$$d_1 = d \frac{h_1}{h_1 + h_2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 + h_2}{d},$$

$$d_1 - d'_1 = R_1 \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{d} \times (h_1 + h_2),$$

y el valor de:

$$d_2 - d'_2 = \frac{R_2}{d} \times (h_1 + h_2).$$

Este procedimiento tiene el inconveniente de reducir la distancia entre tangentes en:

$$\frac{h_1 + h_2}{d} \times (R_2 + R_1).$$

Tiene además el inconveniente grave de que realiza el huelgo para uno de los dos acuerdos de la circunferencia y fija esta circunferencia, lo que obliga a realizar el huelgo del otro lado sin tocar ésta, o sea girando también la recta. Tiene, en cambio, la ventaja de aprovechar el replanteo (si está ya hecho) del círculo.

Esto no ocurre en otros procedimientos que al mover la circunferencia realizan los huelgos de los dos acuerdos de la misma, que lógicamente han de ser iguales.

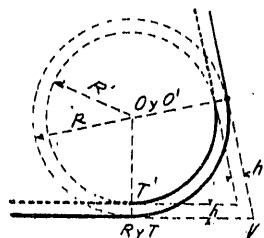


Figura 14.

Segundo procedimiento. — Conservando la recta primitiva y los centros, disminuyendo los radios en sus huelgos (fig. 14).

Tiene la ventaja de que el punto T es el de su mínima distancia. Es el de preparación más cómoda. Tiene el inconveniente que queda un radio fraccionario.

Tercer procedimiento. — Conservando la recta primitiva y el radio y moviendo el centro en la dirección del vértice (fig. 15).

En el triángulo SOO' , $SO' = RT' = h$, nos resulta $SO = TR = h \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, que nos da el punto R de referencia de recta y círculo si anteriormente habíamos medido el ángulo β en el vértice y la tangente primitiva TV . Este procedimiento es quizá el mejor para explanaciones nuevas, ya que el valor RT es, en general, pequeño y permite conservar un radio redondo que facilita todos los cálculos.

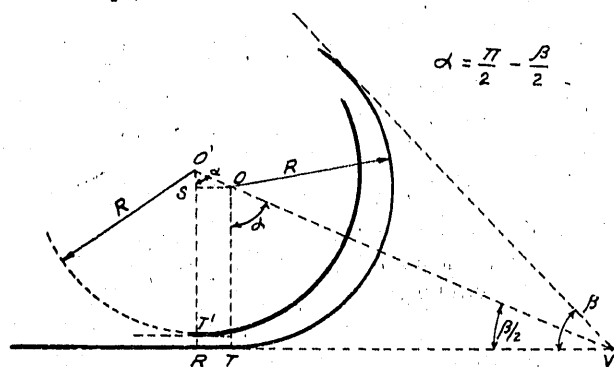


Figura 15

Cuarto procedimiento. — Conservando la recta y parte de la curva primitivas. Se sustituye un trozo de la curva circular, PT , por otra circunferencia, PT' , tangente a la misma y de radio $R' = R - S$, un poco diferente para que dé el huelgo requerido, y sobre este nuevo círculo se pone el acuerdo, quedando en el punto P un salto de curvatura, tanto más pequeño cuanto más próximos son R y R' (fig. 16).

Se puede calcular el valor de α que está ligado con el valor del huelgo y la separación S de los centros; $OT = h + R' + S \cos \alpha = R$, y como $R' - R = S$, resulta $h + R - S \cos \alpha = R$, de donde $S(1 - \cos \alpha) = h$, $1 - \cos \alpha = \frac{h}{S} = \frac{h}{R - R'}$.

Que se puede poner de dos formas:

$$1 - \cos \alpha = \frac{h}{R - R'}$$

que nos da α si fijamos h y R' , o de la forma:

$$R' = R - \frac{h}{1 - \cos \alpha}$$

Como el acuerdo ha de hacerse en el trozo PT' de la circunferencia de radio R' , el final del acuerdo B debe estar antes que P , o sea $\alpha \geq \Phi$, lo que aproximadamente equivale a $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{L'}{2R'}$ si L' es la longitud del acuerdo para el radio R' . Si queremos

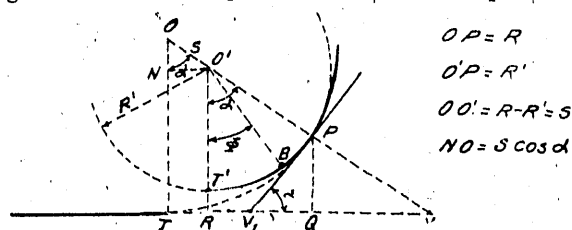


Figura 16.

que la longitud BP sea corta, se puede tomar para α un valor próximo al de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{2R}$ — una vez elegido el huelgo aproximado, y, por ello, el valor aproximado de L .

Conocido o fijado α se tiene $R' = R - \frac{h}{1 - \cos \alpha}$ y $RT = (R - R') \times \operatorname{sen} \alpha$, que nos da el punto R de referencia necesario para el encaje del acuerdo. Podemos fijar V_1 por el valor $TV_1 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, que nos da la tangente común en P .

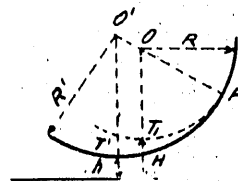


Figura 17.

En el caso excepcional de que hubiese en el replanteo previo un huelgo H excesivo, sirven los cálculos anteriores para obtener un menor huelgo h , resultando $R' > R$ (fig. 17).

Este procedimiento se suele emplear en explanaciones construídas sin huelgo o con exceso de huelgo, ya que no modifica más que un trozo de recta y de curva.

Procedimiento mixto. — Cuando hay explanaciones construídas con puntos obligados o que admiten poco movimiento, hay que estudiar la manera de obtener el huelgo mayor con el menor movimiento de la traza explanada, y entonces se puede seguir un procedimiento mixto, como el ejemplo de la figura, en el que a la vez se disminuye el radio y se mueve el centro, obteniéndose prácticamente una separación en la bisectriz BB' , mitad del huelgo, y como la curva de transición se separa también, donde más, medio huelgo del eje primitivo, se obtiene un trazado con transiciones que se separa, donde más, del trazado primitivo la mitad del huelgo adoptado (fig. 18).

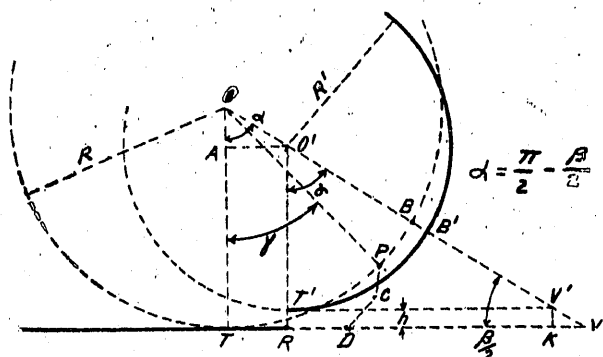


Figura 18.

En este caso, fijado el huelgo $RT' = h$, que suponemos igual al doble de BB' , nos es necesario determinar el radio R' de la circunferencia definitiva y el punto R de referencia.

Labor previa de medición del ángulo y radio de la circunferencia explanada. — En el caso de no tener datos fidedignos de la circunferencia primitiva explanada, se puede medir el ángulo β de las alineaciones extremas, bien directamente o por un polígono cuyos lados extremos sean dichas alineaciones.

El radio R , si no se conoce con exactitud, se deduce fácilmente si se mide la bisectriz B (o se calcula refiriendo ésta a VT por un polígono).

En el caso de que el punto P que conozcamos no sea la bisectriz, se puede referir al vértice V por un polígono $VDCP$, y es fácil establecer dos ecuaciones entre R y γ , proyectando el polígono $OPCDV$ sobre OT y VT , cuyas proyecciones son R y $T \tan \alpha$; con ellas se determina el valor aproximado del radio de la curva que pasa por P y es tangente a las dos alineaciones.

Cálculo de R' y el punto R de referencia. — Medidos, o conocidos el radio primitivo R , el ángulo de

las alineaciones β y fijado el huelgo h , se deduce fácilmente (fig. 18) (en el supuesto de ser $BB' = \frac{h}{2}$)

$$BB' = \frac{h}{2} = VB - V'B' - V'V' = R(\sec \alpha - 1) - R'(\sec \alpha - 1) - h \sec \alpha, \text{ de donde:}$$

$$R' = R - h \frac{0.50 + \sec \alpha}{\sec \alpha - 1} = R - h \frac{1 - 0.5 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

La distancia TR que nos fija el punto R resulta fácilmente: $TR = TV - T'V' - V'K = R \tan \alpha - R' \tan \alpha - h \tan \alpha = \tan \alpha (R - R' - h)$.

APÉNDICE

Clotoide incompleta. — La clotoide incompleta la hemos aludido al hablar del tipo de acuerdo con peralte autoacordado, que además se puede emplear en otras circunstancias, como en el caso de un huelgo excesivo en relación con la recta intermedia. Por ello, vamos a hablar de algunas de sus propiedades que permitan fácilmente construirla.

La definimos como un trozo de clotoide (que por ello tiene las propiedades de flechas y curvaturas de la clotoide) formado por lo que queda al quitarle a ésta dos trozos iguales, uno al origen y otro al extremo. Este trozo de clotoide se dispone de modo que sea tangente en sus extremos a la recta y curva acordadas. Llamaremos ϵ a la relación entre el valor de cada una de las partes quitadas a la clotoide completa y la longitud L de ésta; l , la longitud de clotoide in-

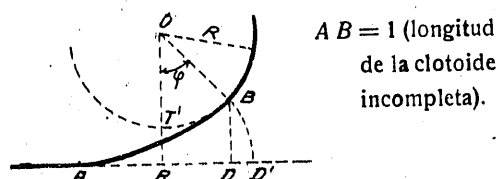


Figura 19.

completa; Φ , el ángulo de la clotoide total completa, y ϕ el de la incompleta correspondiente. Si R es el radio de la circunferencia acordada con una clotoide incompleta, hay dos saltos de curvatura en las tangencias que valen ambos $\frac{\epsilon}{R}$. El acuerdo principia

con un radio finito $\frac{R}{\epsilon}$ y termina con un radio mayor que R , que vale $\frac{R}{1 - \epsilon}$.

Se puede demostrar (y como anteriormente, prescindimos de los cálculos que hemos hecho para deducirlo) que se verifican las siguientes relaciones, aproximadas lo suficientemente para muchos casos prácticos, sobre todo para acuerdos cortos (fig. 19).

El huelgo $R' T'$ vale, con gran aproximación:

$$h = \frac{l^2}{24 R} (1 + 4 \epsilon).$$

El ángulo $\varphi = \frac{l}{2R}$ con exactitud y el valor de la evolvente $B D'$, vale $\frac{l^2}{6R} (1 + \epsilon)$ que, con aproximación suficiente en muchos casos, se puede igualar a la ordenada $B D$. Si se quiere mayor exactitud, se puede determinar la clotoide completa correspondiente, cuyo valor de Φ vale:

$$\Phi = \frac{\varphi}{1 - 2\epsilon} = \frac{l}{2R(1 - 2\epsilon)},$$

con el que las tablas determinan la clotoide completa, en la que podemos deducir con exactitud las magnitudes correspondientes a su trozo empleado.

Es de notar que la fórmula general de flechas de la clotoide sirve para la incompleta, y en ella conocemos las curvaturas extremas

$$\epsilon \times \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad \frac{1 - \epsilon}{R},$$

que nos definen las de todos los puntos por su ley lineal.

Con ello, podemos determinar la flecha entre dos puntos cualesquiera cuyas distancias al origen se conozcan, pues la mencionada fórmula

$$f = \frac{C_1 + C_2}{16} \cdot d^2,$$

que da las flechas en función de las curvaturas (que conocemos en función lineal de su distancia al origen) y de su distancia entre sí.

Observaciones finales.

El trazadista del replanteo previo, a los efectos de transiciones, basta con que cuide de dejar entre curvas las rectas suficientes (mencionadas) para los acuerdos, así como la longitud mínima de curva, o sea, *cuidar solamente de dar suficientes longitudes a las rectas y a las curvas del replanteo previo.*

Si el peralte se hace en la explanación (lo que tiene sus ventajas), la rampa de peralte se hará lineal, sin olvidar que sus extremos no coincidirán con los del acuerdo en planta, si éste ha sido hecho con radio doble.

No hemos mencionado el replanteo de trazados con clotoides de transición por el método fundado en el diagrama de ángulos, el cual permite rectificar tra-

zados con carriles asentados sin empleo del taquímetro y con suficiente exactitud práctica.

La razón es que se ha ocupado de ello con gran competencia nuestro compañero D. Manuel Delgado Bravo (q. e. p. d.), el cual lo ha estudiado y dado normas que se están empleando con éxito en muchas líneas construídas.

* * *

En la primera parte del artículo (REVISTA de enero) se han advertido las siguientes deficiencias, que rogamos corrijan:

En la página 14, segunda columna, debe decir: "... la fuerza centrífuga $\frac{V^2}{\rho}$ será proporcional a la curvatura $\frac{1}{\rho}$ en cada punto" (y no $\frac{V^2}{R}$ y $\frac{1}{R}$).

En la página 15, segunda columna, el final de *Efectos primarios* debe ser: "... una fuerza centrífuga sin compensar equivalente a $5,69 \frac{V_m^2}{R}$ milímetros de peralte, que llamaremos aceleración primaria, que, a su vez, determina una *sobreaceleración primaria proporcional a la rampa de peralte y a la velocidad máxima V_m* ".

En la página 16, en *Efectos estáticos por el alabeo del peralte*, se debe decir: "... produce una desigual presión en las ruedas por la desigual deformación de los muelles, con su correspondiente aumento de carga en unas ruedas y el mayor peligro de descarrilo por la descarga de las otras. A este efecto, etc.".

En dicha página 16, en el *Efecto de altura*, se ha omitido que es proporcional a la altura del punto sobre los carriles, y en los *Efectos estáticos, de elasticidad y de huelgos* se omitió que las rampas y curvaturas aludidas son las del *peralte real*.

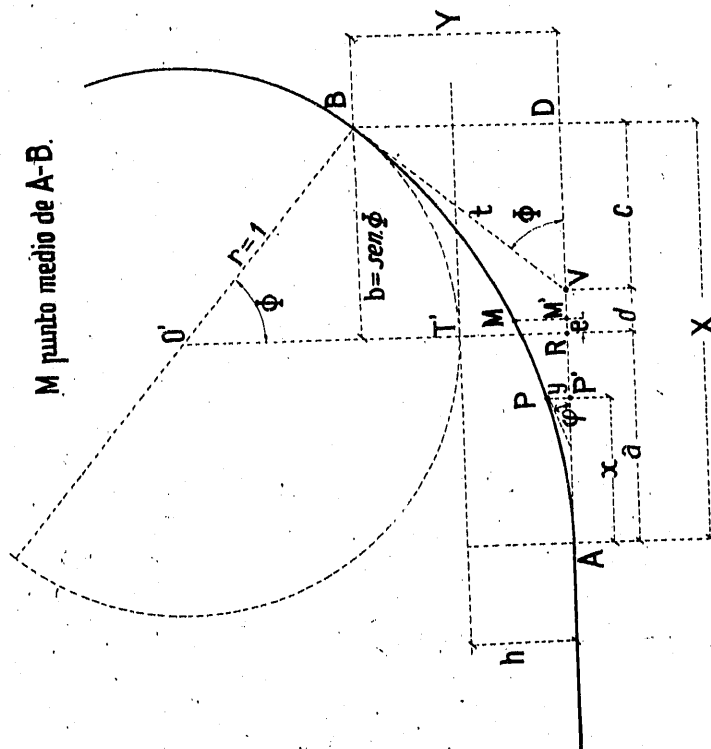
En la página 17, suprimir el segundo (i) de observaciones de la figura 4.^a.

En la página 19, segunda columna, el final del resumen de la comparación de tipos debe ser: "... en sus extremos, por los efectos perturbadores que producen las rampas y curvaturas de peralte que resulten de un deficiente asiento".

En la página 21, primera columna, debe decir: " $L_1 = 0,08 \frac{V_m^2}{R}$ " (y no $L_1 = 0,98 \frac{V_m^2}{R}$).

En este trabajo, además de las investigaciones del autor, se recogen las opiniones y sugerencias de la ponencia estudiada en la Jefatura de Enlaces de las de Estudio y Construcción de Ferrocarriles, por compañeros de éstas, y de la R. E. N. F. E., con la participación del autor.

FIGURA Y FORMULAS DE LA CLOTOIDE UNITARIA
(de radio de curvatura unidad en el extremo)
EN FUNCION DEL ANGULO ϕ EN EL EXTREMO.



Longitud $AB = 2\phi$

Huelgo $h = RT' = \sum (-1)^n \frac{\phi^{2n+2}}{(4n+3)2^{n+2}}$

Abscisa del origen $AR = a = \sum (-1)^n \frac{\phi^{2n+1}}{(4n+1)2^{n+1}}$

Abscisa total $X = a + b = \sum (-1)^n \frac{2\phi^{2n+1}}{(4n+1)2^{n+1}}$

Abscisa del extremo $RD = b = \sum (-1)^n \frac{\phi^{2n+1}}{2^{n+1}}$

Ordenada del extremo $Y = DB = \sum (-1)^n \frac{2\phi^{2n+2}}{(4n+3)2^{n+2}}$

Abscisa del punto medio $RM' = e = \sum (-1)^n \frac{\phi^{2n+1}}{(4n+1)2^{n+1}}$

Ordenada del punto medio $Y_1 = MM' = \sum (-1)^n \frac{\phi^{2n+2}}{4^{n+1}(4n+3)2^{n+1}}$

Vertice auxiliar $RV = d = \phi \left[\frac{1}{3} + \frac{13}{126} \phi^2 + \frac{479}{83160} \phi^4 + \frac{1711}{2494800} \phi^6 + \dots \right]$

$VB = t = \phi \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{63} \phi^2 + \frac{68}{10395} \phi^4 + \frac{104}{155925} \phi^6 + \dots \right]$

$AP' = x_\phi = \sqrt{\phi} \sum (-1)^n \frac{2\phi^{2n}}{(4n+1)2^{n+1}}$

$PP' = y_\phi = \sqrt{\phi} \sum (-1)^n \frac{2\phi^{2n+1}}{(4n+3)2^{n+1}}$

Si $AP = 1$ y $AB = L$ " $\phi = \phi \left(\frac{1}{L} \right)^2$

COORDENADAS DE UN PUNTO P DE ANGULO ϕ

Se pueden obtener las coordenadas x e y de un punto intermedio P de la clotoide unitaria ϕ utilizando las tablas de encaje de clotoides unitarias una vez conocida la relación $\epsilon = \frac{AB}{AB}$ entre el desarrollo parcial AP y el total AB .

Basta entrar en ellas con un valor del ángulo extremo $\phi_1 = \phi$ (ϕ ángulo de la tangente en el punto P) y obtener las coordenadas extremas X_1 e Y_1 correspondientes al valor ϕ_1 , las cuales divididas por ϵ dan los de x e y .

La marcha a seguir es pues determinar o elegir $\epsilon = \frac{AP}{AB}$; deducir $\phi_1 = \epsilon^2 \phi$; entrar en las tablas unitarias con ϕ_1 y deducir Y_1 y $X_1 = (a_1 + b_1)$ y entonces $x = \frac{Y_1}{\epsilon}$ y $y = \frac{X_1}{\epsilon}$.

Las magnitudes lineales unitarias x e y multiplicadas por el radio de curvatura real del extremo del acuerdo nos dan las coordenadas de un punto del acuerdo real (como ocurre para las restantes magnitudes lineales de los cuadros).

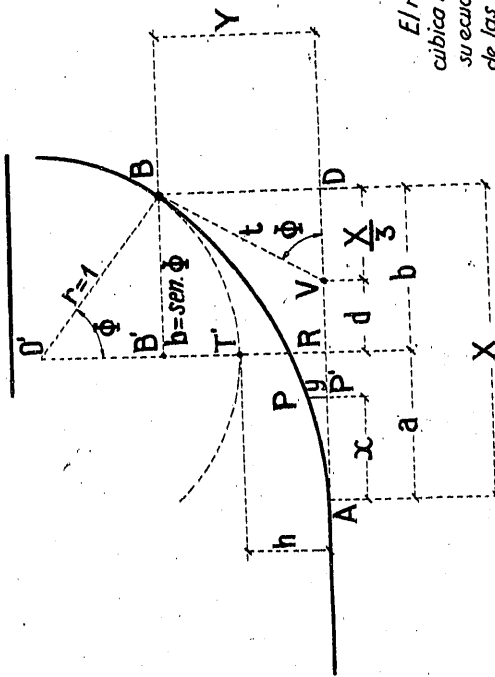
La flecha entre dos puntos P_1 y P_2 definidos por sus distancias unitarias al origen ($\epsilon_1 = \frac{AP_1}{AB}$, $\epsilon_2 = \frac{AP_2}{AB}$) vale con exactitud práctica, si no están muy separados, $\frac{1}{2} h (\epsilon_2 + \epsilon_1) (\epsilon_2 - \epsilon_1)$, donde h es el huelgo de la clotoide (unitaria o real).

(1). Si la separación no es mayor de la mitad del acuerdo ($\frac{AB}{2}$).

NOTA: Por haber aprovechado para estas tablas otras de razones trigonométricas con seis decimales no se puede asegurar la aproximación de la media milloresima. Como la interpolación lineal da un error máximo de $\frac{\Delta y}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$, (Δy y Δx = diferencias tabulares sucesivas), se puede comprobar que la interpolación lineal en estas tablas no da errores mayores del milloresimo, lo que es una buena aproximación a la realidad.

[illegible]

FIGURA Y FORMULAS DE LA PARABOLA CUBICA UNITARIA
(de radio de curvatura unidad en el extremo)
EN FUNCION DEL ANGULO Φ EN EL EXTREMO.



ECUACION DE LA PARABOLA CUBICA UNITARIA

$$\begin{cases} X = \cos \Phi \text{ sen } 2\Phi = \frac{1}{2}(\text{sen } \Phi + \text{sen } 3\Phi) \\ Y = \frac{1}{3} \text{ sen } \Phi \text{ sen } 2\Phi = \frac{1}{6}(\cos \Phi - \cos 3\Phi) \end{cases}$$

con cuyos valores para cualquier valor de Φ el radio de curvatura para $X=X$ resulta exactamente igual a la unidad y la derivada en el mismo vale $\text{tg } \Phi$.

Abscisa del extremo $b = RD = \text{sen } \Phi$

Abscisa del origen $a = AR = \frac{1}{2}(\text{sen } 3\Phi - \text{sen } \Phi) = X - b$

Ordenada del extremo $Y = DB = \frac{1}{3} \text{ sen } \Phi \text{ sen } 2\Phi = \frac{1}{6}(\cos \Phi - \cos 3\Phi)$

Vertice auxiliar $d = RV = b - \frac{X}{3} = \frac{1}{6}(5 \text{ sen } \Phi - \text{sen } 3\Phi) \therefore VB = t = \frac{1}{3} \text{ sen } 2\Phi$

Huelgo $h = RT' = Y - (1 - \cos \Phi) = \frac{7}{6} \cos \Phi - \frac{1}{6} \cos 3\Phi - 1$

Desarrollo total $AB = D = X \left[1 + \frac{1}{10} \text{tg}^2 \Phi - \frac{1}{72} \text{tg}^4 \Phi + \frac{1}{288} \text{tg}^6 \Phi - \frac{5}{2176} \text{tg}^8 \Phi + \dots \right]$

Desarrollo parcial $AP = d_x = X \left[1 + \frac{1}{10} \left(\frac{X}{X} \right)^4 \text{tg}^2 \Phi - \frac{1}{72} \left(\frac{X}{X} \right)^6 \text{tg}^4 \Phi + \frac{1}{288} \left(\frac{X}{X} \right)^8 \text{tg}^6 \Phi - \frac{5}{2176} \left(\frac{X}{X} \right)^{10} \text{tg}^8 \Phi + \dots \right]$

El replanteo de los puntos intermedios de la parábola cúbica no tiene dificultad, una vez encajada ya que se conoce su ecuación de ordenadas proporcionales a los cubos de las abscisas.

Las magnitudes lineales unitarias de los cuadros multiplicadas por el radio de curvatura real del extremo del acuerdo nos dan las magnitudes del acuerdo real.

NOTA: Por haber aprovechado para estas tablas otras de razones trigonométricas con seis decimales no se puede asegurar la aproximación de la media millonésima de $\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{8}$. Como la interpolación lineal da un error máximo de $\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{8}$, (Δ_2 y Δ_1 = diferencias tabulares sucesivas) se puede comprobar que la interpolación lineal en estas tablas no da errores mayores del milímetro para los radios correspondientes a los acuerdos corrientes.

Tablas para el replanteo de los acuerdos con parábolas cúbicas unitarias (de radio de curvatura, unidad en el extremo).

Anchura del acuerdo ϕ 9 m.	Huelgo $h = Y - \text{semita} = \frac{1}{2} \phi^2 \text{sen}^2 \theta$	Extremo del acuerdo Abcisa RD-b-sen θ	Origen del acuerdo Abcisa RA- a-sen θ	Vertice auxiliar del acuerdo Abcisa R'Vd -sen θ	Desarrollo del acuerdo $D = \frac{1}{2} \phi^2 \text{sen}^2 \theta$
1.00	0.0000041	0.031405	0.057073	0.005238	0.031405
2.00	0.000016	0.125772	0.23141	0.021049	0.125772
3.00	0.000036	0.27863	0.516835	0.046280	0.27863
4.00	0.000064	0.49512	0.90184	0.081049	0.49512
5.00	0.000100	0.77145	1.38434	0.125329	0.77145
6.00	0.000144	1.10452	1.96144	0.178119	1.10452
7.00	0.000196	1.49145	2.63114	0.239419	1.49145
8.00	0.000256	1.93024	3.39144	0.309119	1.93024
9.00	0.000324	2.42089	4.24144	0.387219	2.42089
10.00	0.000400	2.96340	5.18144	0.473719	2.96340
11.00	0.000484	3.55775	6.21144	0.568719	3.55775
12.00	0.000576	4.20404	7.34144	0.672219	4.20404
13.00	0.000676	4.90229	8.57144	0.784219	4.90229
14.00	0.000784	5.65250	9.90144	0.904719	5.65250
15.00	0.000900	6.45469	11.34144	1.033719	6.45469
16.00	0.001024	7.30884	12.89144	1.171219	7.30884
17.00	0.001156	8.21495	14.55144	1.317219	8.21495
18.00	0.001296	9.17300	16.32144	1.471719	9.17300
19.00	0.001444	10.18299	18.20144	1.634719	10.18299
20.00	0.001600	11.24484	20.19144	1.806219	11.24484
21.00	0.001764	12.35855	22.30144	1.986219	12.35855
22.00	0.001936	13.52400	24.53144	2.174719	13.52400
23.00	0.002116	14.74119	26.88144	2.371719	14.74119
24.00	0.002304	16.00900	29.35144	2.577219	16.00900
25.00	0.002500	17.32735	31.94144	2.791219	17.32735
26.00	0.002704	18.69614	34.65144	3.013719	18.69614
27.00	0.002916	20.11535	37.48144	3.244719	20.11535
28.00	0.003136	21.58490	40.43144	3.484219	21.58490
29.00	0.003364	23.10479	43.50144	3.732219	23.10479
30.00	0.003600	24.67490	46.69144	3.988719	24.67490
31.00	0.003844	26.29525	49.99144	4.253719	26.29525
32.00	0.004096	27.96584	53.40144	4.527219	27.96584
33.00	0.004356	29.68655	56.92144	4.809219	29.68655
34.00	0.004624	31.45730	60.55144	5.099719	31.45730
35.00	0.004900	33.27800	64.29144	5.398719	33.27800
36.00	0.005184	35.14855	68.14144	5.706219	35.14855
37.00	0.005476	37.06884	72.10144	6.022219	37.06884
38.00	0.005776	39.03884	76.17144	6.346719	39.03884
39.00	0.006084	41.05845	80.35144	6.679719	41.05845
40.00	0.006400	43.12750	84.64144	7.021219	43.12750
41.00	0.006724	45.24590	89.04144	7.371219	45.24590
42.00	0.007056	47.41355	93.55144	7.729719	47.41355
43.00	0.007396	49.63030	98.17144	8.096719	49.63030
44.00	0.007744	51.89600	102.90144	8.472219	51.89600
45.00	0.008100	54.21055	107.74144	8.856219	54.21055
46.00	0.008464	56.57384	112.69144	9.248719	56.57384
47.00	0.008836	58.98485	117.75144	9.650719	58.98485
48.00	0.009216	61.44250	122.92144	10.062219	61.44250
49.00	0.009604	63.94670	128.20144	10.483219	63.94670
50.00	0.010000	66.49735	133.59144	10.913719	66.49735
51.00	0.010404	69.09440	139.09144	11.353719	69.09440
52.00	0.010816	71.73775	144.70144	11.803219	71.73775
53.00	0.011236	74.42730	150.42144	12.262219	74.42730
54.00	0.011664	77.16290	156.25144	12.730719	77.16290
55.00	0.012100	79.94445	162.19144	13.208719	79.94445
56.00	0.012544	82.77180	168.24144	13.696219	82.77180
57.00	0.012996	85.64485	174.40144	14.193219	85.64485
58.00	0.013456	88.56350	180.67144	14.700719	88.56350
59.00	0.013924	91.52765	187.05144	15.218719	91.52765
60.00	0.014400	94.53720	193.54144	15.747219	94.53720
61.00	0.014884	97.59205	200.14144	16.286219	97.59205
62.00	0.015376	100.69210	206.85144	16.835719	100.69210
63.00	0.015876	103.83725	213.67144	17.395719	103.83725
64.00	0.016384	107.02740	220.60144	17.966219	107.02740
65.00	0.016900	110.26245	227.64144	18.547219	110.26245
66.00	0.017424	113.54230	234.79144	19.138719	113.54230
67.00	0.017956	116.86685	242.05144	19.740719	116.86685
68.00	0.018496	120.23600	249.42144	20.353219	120.23600
69.00	0.019044	123.64965	256.90144	20.976219	123.64965
70.00	0.019600	127.10770	264.49144	21.609719	127.10770
71.00	0.020164	130.61005	272.19144	22.253719	130.61005
72.00	0.020736	134.15660	280.00144	22.908219	134.15660
73.00	0.021316	137.74725	287.92144	23.573219	137.74725
74.00	0.021904	141.38190	295.95144	24.248719	141.38190
75.00	0.022500	145.06045	304.09144	24.934719	145.06045
76.00	0.023104	148.78280	312.34144	25.631219	148.78280
77.00	0.023716	152.54885	320.70144	26.338219	152.54885
78.00	0.024336	156.35850	329.17144	27.055719	156.35850
79.00	0.024964	160.21165	337.75144	27.783719	160.21165
80.00	0.025600	164.10820	346.44144	28.522219	164.10820
81.00	0.026244	168.04815	355.24144	29.271219	168.04815
82.00	0.026896	172.03140	364.15144	30.030719	172.03140
83.00	0.027556	176.05785	373.17144	30.800719	176.05785
84.00	0.028224	180.12740	382.30144	31.581219	180.12740
85.00	0.028900	184.23995	391.54144	32.372219	184.23995
86.00	0.029584	188.39540	400.89144	33.173719	188.39540
87.00	0.030276	192.59365	410.35144	33.985719	192.59365
88.00	0.030976	196.83470	420.00144	34.808219	196.83470
89.00	0.031684	201.11845	429.84144	35.641219	201.11845
90.00	0.032400	205.44560	439.87144	36.484719	205.44560
91.00	0.033124	209.81665	450.00144	37.338719	209.81665
92.00	0.033856	214.23140	460.23144	38.203219	214.23140
93.00	0.034596	218.69075	470.56144	39.078219	218.69075
94.00	0.035344	223.19460	481.00144	39.963719	223.19460
95.00	0.036100	227.74285	491.54144	40.859719	227.74285
96.00	0.036864	232.33540	502.18144	41.766219	232.33540
97.00	0.037636	236.97215	512.92144	42.683219	236.97215
98.00	0.038416	241.65300	523.76144	43.610719	241.65300
99.00	0.039204	246.37795	534.70144	44.548719	246.37795
100.00	0.040000	251.14690	545.74144	45.497219	251.14690

