

LA COMA EN LAS OPERACIONES CON LA REGLA DE CALCULO

Por MANUEL BENÍTEZ RAMÍREZ, Profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos.

Presenta el autor en el presente artículo la primera fórmula general que fija la coma en el resultado de las operaciones más usuales con la regla de cálculo. El método de operar que su aplicación requiere, duplica además la rapidez y precisión que en la forma habitual se obtendría.

Soy un entusiasta de *la regla de cálculo*, ese maravilloso instrumento que, cual científico Stradivarius, en manos que lo sepan pulsar, permite hacer complicadísimas filigranas de cálculo con una rapidez inigualable y una precisión más que suficiente para las necesidades de la técnica, y hay que tener presente que cuando yo ingresé en la Escuela no se exigía, siendo mirada con bastante desdén por los Ingenieros de altura, pues figuras tan eminentes como Zafra criticaban en su clase a los que la usaban, llamándoles "Ingenieros de uñas negras y *regla de cálculo*", sin que por ello decayera mi afición a emplearla, a pesar del respeto y admiración que todos sentíamos por D. Juan Manuel.

Entonces creía, y hoy con más motivo, que los detractores de *la regla* son aquellos que ignoran su manejo o lo conocen mal, y, naturalmente, como en sus manos no sacan partido de ella, creen que no sirve para nada.

No obstante, el número de los que la emplean es cada vez mayor, pidiéndose su conocimiento en todos los centros técnicos de alguna importancia. En nuestra Escuela se exigió en el ingreso, por primera vez, en los exámenes de 1914, y desde entonces son muchas las convocatorias, entre ellas la última, en que se han puesto problemas de *regla de cálculo*, dando un tiempo para resolverlos que revele en el candidato la natural soltura.

Porque es un error creer que el que sabe hacer con *la regla* la multiplicación o división de dos números, y para poner la coma en el resultado necesita hacer un tanteo mental, conoce su manejo. Naturalmente que, como apenas encuentra ventaja en operar así sobre hacer la operación con el lápiz, acaba no empleando *la regla* y, lo que es peor, criticando a los que la usan.

El conocimiento completo de tan preciado instrumento requiere bastante trabajo, ya que sus escalas son cada vez más numerosas, sobre todo en los últimos modelos, y, por tanto, el campo de sus aplicaciones es muy extenso.

Buena prueba de ello es la obra publicada por nuestro compañero Fernández Toral, en tres tomos,

Prácticas con la regla de cálculo, cuya reseña apareció en el número de octubre pasado de esta REVISTA. Después ha hecho otro tomo sobre la novísima regla Darmstadt, y sabemos que tiene otros en estudio.

Entre los muchos aciertos que hemos encontrado en esta obra, uno de los mayores es el de la notación, ya que, para explicar cualquier operación hecha con *la regla*, habría que repetir una porción de palabras, que se reducen con aquélla a un signo, como tendremos ocasión de apreciar, puesto que en los ejemplos que figuran en este artículo la hemos usado, contando con el asentimiento del autor.

A continuación figura la parte de la misma que hemos considerado necesaria para este trabajo; el que desee conocerla completamente puede consultar la citada obra:

<i>Ri</i>	escala inferior de <i>la regla</i> .
<i>Ria</i>	escala adicional de la misma.
<i>ri</i>	escala inferior de <i>la reglilla</i> .
<i>ria</i>	escala adicional de la misma.
<i>rc</i>	escala de inversas o recíproca.
<i>Ri</i> 4,5.....	indica el número 4,5 tomado en la escala inferior de <i>la regla</i> .
<i>ri</i> 5,2.....	indica el número 5,2 tomado en la escala inferior de <i>la reglilla</i> .
<i>C</i>	raya central o raya única del cursor.
→	este signo significa un movimiento.
≡	este signo representa una lectura.
<i>ri</i> 1 → <i>Ri</i> 7,4.	indica que se lleve el uno de <i>la reglilla</i> a coincidir con el 7,4 de <i>la regla</i> .
<i>C</i> → <i>rc</i> 5,31...	indica que se lleva el cursor a coincidir con el 5,31 de la escala recíproca.
<i>rc</i> 10 ≡ <i>Ri</i> 7,2.	indica que se lea 7,2 en la escala inferior de <i>la regla</i> , coincidiendo con el 10 de la escala recíproca.
<i>ri</i> 1 ≡ <i>Ri</i> 5,3.	indica que se lea 5,3 en la escala inferior de <i>la regla</i> , coincidiendo con el uno de <i>la reglilla</i> .

Luego de este preámbulo, pasemos a tratar del principal objeto de este artículo, y para ello comencemos por puntualizar lo que entenderemos por número de cifras enteras de un número cualquiera. Si antes de la coma hay un número distinto del cero, diremos que tiene tantas como tenga éste; así, los números 37000,6; 348,086; 20,16 y 7,415, diremos que tienen 5, 3, 2 y 1 cifras enteras, respectivamente; si antes de la coma sólo hay un cero y la cifra que viene a continuación es significativa, diremos que el número tiene cero cifras enteras; están en este caso los números 0,48; 0,54; 0,143; etc. Por último, si antes de la coma sólo hay un cero y a continuación uno o varios, diremos que el número de cifras es igual al de ceros que hay entre la coma y la primera significativa, pero con signo negativo; así, los números 0,00107; 0,0000456 y 0,01046, diremos que tienen -2 , -4 y -1 cifras enteras.

Hecho este convenio, haremos otro más complicado, y es que llamaremos Σ del número de cifras de una expresión, en que sólo hay los signos de multiplicar y dividir, a la suma algébrica de los números de cifras que tienen los que intervienen en ella, cambiando de signo los que correspondan a números que figuren en denominador. Aclaremos este concepto con varios ejemplos. Sean las expresiones:

$$37,4 \times 523; \quad 0,548 \times 372,6 \times 0,00217; \quad \frac{53,8}{379,6};$$

$$\frac{0,028 \times 18}{57,4 \times 0,185}; \quad \frac{37 \times 45,1 \times 0,00397}{18,6 \times 0,000756 \times 0,00354};$$

sus respectivas sigmas serán:

$$\Sigma_1 = 2 + 3 = 5, \text{ para la primera;}$$

$$\Sigma_2 = 0 + 3 - 2 = 1, \text{ para la segunda;}$$

$$\Sigma_3 = 2 - 3 = -1, \text{ para la tercera;}$$

$$\Sigma_4 = -1 + 2 - 2 - 0 = -1, \text{ para la cuarta,}$$

y

$$\Sigma_5 = 2 + 2 - 2 - 2 + 3 + 2 = 5, \text{ para la última.}$$

Creemos que la cosa es bien sencilla.

Después de fijados estos convenios, pasemos a determinar el número de cifras del resultado de las distintas operaciones más corriente, en el supuesto que operemos con las escalas inferiores de *regla* y *reglilla*, como es corriente, y que la *reglilla* tenga escala de inversas o recíproca, como ocurre en casi todas las *reglas* actuales.

Producto de dos factores: Si operamos con el 1 de la *reglilla*, las cifras enteras del resultado, que en

adelante indicaremos con la letra Z , son: $\Sigma - 1$; si con el 10, son Σ . Ejemplos:

$$0,01835 \times 2,448; \quad ri\ 1 \rightarrow Ri\ 1,835; \quad C \rightarrow ri\ 2,448;$$

$$C \equiv Ri\ 4,492;$$

como hemos operado con *ri* 1,

$$Z = \Sigma - 1 = (-1 + 1) - 1 = -1;$$

luego el resultado de la operación, que designaremos en adelante por S , será:

$$S = 0,04492.$$

$$0,0021 \times 0,58; \quad ri\ 10 \rightarrow Ri\ 2,1;$$

$$C \rightarrow ri\ 5,8; \quad C \equiv Ri\ 1,218;$$

como operamos con *ri* 10:

$$Z = \Sigma = (-2 + 0) = -2;$$

y, por tanto,

$$S = 0,001218.$$

Hay ventaja en multiplicar utilizando la escala de inversas, como vamos a ver, y en este caso el número de cifras del producto es Σ , si éste se lee con *ri* 1, y $\Sigma - 1$ si lo leemos con *ri* 10. Ejemplos:

$$37,4 \times 0,465; \quad C \rightarrow Ri\ 3,74; \quad rc\ 4,65 \rightarrow C;$$

$$ri\ 1 \equiv Ri\ 1,739;$$

como hemos leído con *ri* 1,

$$Z = \Sigma = (2 + 0) = 2 \quad y \quad S = 17,39.$$

$$41,6 \times 0,000194; \quad C \rightarrow Ri\ 4,16; \quad rc\ 1,94 \rightarrow C;$$

$$ri\ 10 \equiv Ri\ 8,07;$$

por leer con *ri* 10,

$$Z = \Sigma - 1 = (2 - 3) - 1 = -2 \quad y \quad S = 0,00807.$$

Como vemos, la ventaja de usar la escala recíproca está en que no hay que hacer tanteo ninguno; del primer movimiento de la *reglilla* se lee el producto con igual precisión que por el método anterior.

Cociente de dos números: Si se lee el cociente con *ri* 1, $Z = \Sigma + 1$; si con *ri* 10, $Z = \Sigma$. Ejemplos:

$$\frac{2,45}{1,83}; \quad C \rightarrow Ri\ 2,45; \quad ri\ 1,83 \rightarrow C; \quad ri\ 1 \equiv Ri\ 1,339;$$

como hemos leído con $ri\ 1$,

$$Z = \Sigma + 1 = (1 - 1) + 1 = 1 \quad y \quad S = 1,399.$$

$$\frac{0,397}{5,85}; \quad C \rightarrow Ri\ 3,94; \quad ri\ 5,85 \rightarrow C;$$

$$ri\ 10 \equiv Ri\ 6,79;$$

como hemos leído con $ri\ 10$,

$$Z = \Sigma = (0 - 1) = -1 \quad y \quad S = 0,0679.$$

Si queremos dividir utilizando la escala de inversas, también puede hacerse, y entonces las cifras del cociente son Σ , si se opera con $ri\ 1$, y $\Sigma + 1$, si con $ri\ 10$. Ejemplos:

$$\frac{0,0145}{5,25}; \quad ri\ 1 \rightarrow Ri\ 1,45; \quad C \rightarrow rc\ 5,45; \quad C \equiv Ri\ 2,762;$$

como hemos utilizado $ri\ 1$,

$$Z = \Sigma = (-1 - 1) = -2 \quad y \quad S = 0,002762.$$

$$\frac{2,22}{1,22}; \quad ri\ 10 \rightarrow Ri\ 2,22; \quad C \rightarrow rc\ 1,22; \quad C \equiv Ri\ 1,82;$$

habiendo utilizado $ri\ 10$,

$$Z = \Sigma + 1 = (1 - 1) + 1 = 1 \quad y \quad S = 1,82.$$

Acabamos de decir las reglas de la multiplicación y división que figuran en cualquier tratado de *regla de cálculo*, y como una de las operaciones para que se la emplea más frecuentemente es la determinación del cociente de dos productos, hay naturalmente que ir llevando la cuenta de cuando se lee con el 1 o con el 10 de la *reglilla*, para sacar al final la situación de la coma en el resultado.

Las *reglas* primitivas tenían en el cursor un semicírculo con una agujita que permitía llevarla; en las obras sobre la materia se lee que cuando haya temor de equivocarse se debe ir apuntándolo; el autor de este artículo ha seguido el procedimiento de llevarla con los dedos, usando la mano derecha para los productos y la izquierda para los cocientes, de acuerdo con las indicaciones del — y el + que aún se ven en muchas *reglas*, para recordar cuándo hay que aumentar o disminuir una unidad en el número de cifras del resultado. Pero hay que reconocer que cualquiera de estos procedimientos es muy enojoso y dado a confusiones, ya que se tiene la atención concentrada en la operación que se está haciendo; así que, dentro de lo agradable que resulta operar con la *regla de cálculo*, sólo hay este punto negro: la coma en el resultado final.

Oíamos no hace mucho, de labios de un compañero

de los que más honran nuestra Ingeniería, también entusiasta de la *régla*, que hacía falta *otra regla* con la que hallar la coma; como creemos haberla encontrado, escribimos este artículo para darla a conocer.

Existen ciertas operaciones que pueden hacerse dos a la vez con un sólo movimiento de la *reglilla*, como por ejemplo: $\rho = \frac{\alpha \times \beta}{\gamma}$, en que operaríamos así:

$$C \rightarrow Ri\ \alpha; \quad ri\ \gamma \rightarrow C; \quad C \rightarrow ri\ \beta; \quad C \equiv Ri\ \rho;$$

en cuanto a las cifras del resultado, observemos que si al mover la *reglilla* el cociente $\frac{\alpha}{\gamma}$ se nos queda marcado con $ri\ 1$, tendremos que aumentar una unidad al Σ de la operación; pero al multiplicar por β , como también operamos con $ri\ 1$, tendremos que restarla, y si nos es marcado por $ri\ 10$, no tenemos que aumentar ninguna unidad al hacer la división $\frac{\alpha}{\gamma}$, ni tampoco disminuirla al multiplicar por β ; por tanto, las cifras de ρ son siempre Σ y no tenemos que llevar ninguna cuenta, si hemos podido hacer la operación.

Veamos esta otra:

$$\rho = \alpha \times \beta \times \gamma;$$

para hacerla en un sólo movimiento de la *reglilla*, utilizaremos la escala recíproca. Si le damos al producto la forma $\rho = \frac{\alpha \times \gamma}{\frac{1}{\beta}}$, vemos que si dividimos por

la inversa de β estamos en el caso anterior y operaríamos así:

$$C \rightarrow Ri\ \alpha; \quad rc\ \beta \rightarrow C; \quad C \rightarrow ri\ \gamma; \quad C \equiv Ri\ \rho;$$

en cuanto a las cifras de ρ , observemos que si el producto $\alpha \times \beta$, hecho con la escala de inversas, se nos queda marcado con $ri\ 1$, no tendremos que disminuir ninguna unidad al Σ de la operación; pero al multiplicar por γ , como lo hacemos con $ri\ 1$, hemos de disminuir 1; si el producto $\alpha \times \beta$, al hacerlo con la escala recíproca, queda marcado por $ri\ 10$, tendremos que disminuir 1 a Σ por esta operación; pero en cambio, como multiplicamos por γ con $ri\ 10$, no varía ya Σ ; por tanto, las cifras de ρ son siempre $\Sigma - 1$ y no tenemos que llevar ninguna cuenta tampoco, si hemos podido hacer la operación.

Por último, estudiemos la expresión $\rho = \frac{\alpha}{\beta \times \gamma}$; podemos hacerla en un solo movimiento de la *reglilla*, utilizando la escala recíproca. Si le damos la forma $\rho = \frac{\alpha \times \frac{1}{\gamma}}{\beta}$, estamos en los casos anteriores y operaríamos así:

$$C \rightarrow Ri\ \alpha; \quad ri\ \beta \rightarrow C; \quad C \rightarrow rc\ \gamma; \quad C \equiv Ri\ \rho;$$

en cuanto a las cifras de p , vemos que si el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ ha quedado marcado con $ri\ 1$, tendremos que aumentar 1 al Σ de la operación, que ya no varía al dividir por γ con la escala recíproca, por operar precisamente con $ri\ 1$; si el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ quedase marcado con $ri\ 10$, no cambiarían las cifras de Σ por esta operación; pero al dividir por γ con la escala de inversas, tendríamos que aumentar una unidad por operar con $ri\ 10$; por tanto, lo interesante es que tampoco en esta operación tenemos que tener en cuenta la coma si hemos podido realizarla, y el número de cifras de p es siempre $\Sigma + 1$.

En los tres casos anteriores hemos hecho la salvedad de que hayamos podido realizar la operación en un solo movimiento de *la reglilla*, ya que puede ocurrir que después de operar con los dos primeros números, al ir a marcar el tercero sobre *la reglilla* con el cursor, no podamos hacerlo por estar fuera de *la regla*. Como este punto será tratado después, en lo que sigue suponemos que siempre es posible hacer la operación combinada en un sólo movimiento de *la reglilla*; es decir, que al tercer número nos cae dentro de los límites de *la regla* y podemos, por tanto, marcarlo con el cursor, sin tener que volver a mover *la reglilla*.

Estudiemos ahora el caso general de un producto dividido por otro, ambos con cualquier número de factores:

$$\frac{\alpha \times \beta \times \gamma \times \dots}{\alpha_1 \times \beta_1 \times \gamma_1 \times \dots};$$

sea N el número de factores del numerador y D el del denominador. La forma que tendríamos de operar sería:

$$C \rightarrow Ri\ \alpha; ri\ \alpha_1 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ \beta; ri\ \beta_1 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ \gamma;$$

y así sucesivamente hasta que agotemos el número de factores del producto que tenga menos. Supongamos que sea éste el del denominador; nos quedarán en el numerador $N - D - 1$ factores, ya que en el primer movimiento de *la reglilla* operamos con dos del numerador y uno del denominador, y en los siguientes con uno de cada uno. En dichas operaciones, como hemos operado según el primer ejemplo de los tres que acabamos de estudiar, el número de cifras de su resultado parcial es Σ ; con este resultado parcial y los $N - D - 1$ factores que nos quedan en el numerador, reunimos un producto de $N - D$ factores. Para hacerlo, operamos como en el segundo caso de los tres que hemos estudiado; es decir, hacemos el producto del resultado parcial ya obtenido y los dos primeros factores de los que nos quedan en el numerador en el primer movimiento de *la reglilla*; con el resultado obtenido y los dos siguientes, volvemos a

operar en el nuevo movimiento de *la reglilla*, y así sucesivamente. El número de movimientos de *la reglilla* será, evidentemente, la mitad del de factores, o sea:

$$\frac{N - D - 1}{2}.$$

Según vimos en el segundo caso citado, por cada movimiento de *la reglilla* el número de cifras del producto era su sigma disminuido en una unidad; luego ahora será:

$$Z = \Sigma - \frac{N - D - 1}{2};$$

y si llamamos $N - D = \Delta$, resultará:

$$Z = \Sigma - \frac{\Delta - 1}{2}.$$

Hemos deducido esta fórmula suponiendo que $N > D$, pero se deduce igualmente para el caso de $N < D$, como sería fácil demostrar, y entonces Δ será negativo.

Por la forma que tenemos de operar, vemos que en el primer movimiento de *la reglilla* hacemos actuar tres números; en el siguiente, el resultado de la operación anterior y dos más; al movimiento que le sigue, el nuevo resultado y otros dos más, y así sucesivamente; luego el número de movimientos de *la reglilla* tiene que ser:

$$\frac{N + D - 3}{2} + 1.$$

Como forzosamente ha de ser entero, si le llamamos v , tendremos:

$$\frac{N + D - 3}{2} + 1 = v;$$

de donde:

$$N + D = 2v + 1;$$

luego $N + D$ ha de ser necesariamente un número impar para que sea aplicable nuestra fórmula.

Establecida la fórmula fundamental

$$Z = \Sigma - \frac{\Delta - 1}{2}$$

vamos a aplicarla a numerosos ejemplos, debiendo repetir a nuestros lectores que está deducida a base de que en cada movimiento de *la reglilla* se hagan dos operaciones, sin salirse fuera de *la regla* con el cursor. Algunas veces sucede que nos salimos fuera por

elegir mal el orden de los factores, por lo que se debe seguir el conveniente para que la longitud de *regla* y *reglilla* superpuesta sea lo mayor posible y se tenga más campo donde operar. En los siguientes ejemplos quedará aclarado lo anterior:

$$2,7 \times 0,035 \times 7,2;$$

$$C \rightarrow 2,7; rc 3,5 \rightarrow C; C \rightarrow ri 7,2;$$

$$C \equiv Ri 6,804; \Delta = 3; \frac{\Delta - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1;$$

$$Z = \Sigma - 1 = (1 - 1 + 1) - 1 = 0; S = 0,6804.$$

$$\frac{1,14 \times 0,835 \times 0,565}{2,35 \times 0,044};$$

$$C \rightarrow Ri 1,14; ri 2,35 \rightarrow C; C \rightarrow ri 8,35; ri 4,4 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 5,65; C \equiv Ri 5,2; \Delta = 1;$$

$$Z = \Sigma = (1 + 0 + 0 - 1 + 1) = 1; S = 5,2.$$

$$\frac{4,15 \times 0,074}{0,82 \times 1,28 \times 3,42};$$

$$C \rightarrow Ri 4,15; ri 8,2 \rightarrow C; C \rightarrow ri 7,4; ri 1,28 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow rc 3,42; C \equiv Ri 8,55;$$

$$\Delta = -1; Z = \Sigma + 1 = (1 - 1 - 0 - 1 - 1) + 1 = -1; S = 0,0855.$$

$$5,45 \times 0,0306 \times 21,7 \times 0,00376 \times 655 \times 0,1535 \times 6,23;$$

$$C \rightarrow Ri 5,45; rc 3,06 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,17;$$

$$rc 3,76 \rightarrow C; C \rightarrow ri 6,55; rc 1,535 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 6,23; C \equiv Ri 8,525; \Delta = 7;$$

$$Z = \Sigma - 3 = (1 - 1 + 2 - 2 + 3 + 0 + 1) - 3 = 1; S = 8,525.$$

$$\frac{\pi \times 0,265 \times 0,0875 \times 2,92 \times 7,175 \times 0,00285}{6,35 \times 0,0183 \times 49,25 \times 0,323 \times 0,00425};$$

$$C \rightarrow Ri \pi; ri 6,35 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,65; ri 1,83 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 8,75; ri 4,925 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,92; ri 3,23 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 7,175; ri 4,25 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,85; C \equiv Ri 5,535;$$

$$\Delta = 1; Z = \Sigma = (1 + 0 - 1 + 1 + 1 - 2 - 1 + 1 - 2 - 0 + 2) = 0;$$

$$S = 0,5535.$$

$$1,18$$

$$0,354 \times 0,0237 \times 1,95 \times 30,7 \times 2,85 \times 1,93 \times \pi \times 8,2$$

$$C \rightarrow Ri 1,18; ri 3,54 \rightarrow C; C \rightarrow rc 2,37; ri 1,95 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow rc 3,07; ri 2,85 \rightarrow C; C \rightarrow rc 1,93; ri \pi \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow rc 8,2; C \equiv Ri 1,656; \Delta = -7;$$

$$Z = \Sigma + 4 = (1 - 0 + 1 - 1 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1) + 4 = -1; S = 0,01656.$$

$$\frac{0,00545 \times 2,06 \times 2,92 \times 3,04 \times 0,455 \times 1,925 \times 51,6}{1,183 \times 0,845};$$

$$C \rightarrow Ri 5,45; ri 1,183 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,06; ri 8,45 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 2,92; rc 3,04 \rightarrow C; C \rightarrow ri 4,55;$$

$$rc 1,925 \rightarrow C; C \rightarrow ri 5,16; C \equiv Ri 4,505; \Delta = 5;$$

$$Z = \Sigma - 2 = (-2 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 - 1 - 0) - 2 = 1;$$

$$S = 4,505.$$

$$1$$

$$\frac{1}{7,25 \times 0,208 \times 39 \times 0,16};$$

Si en este caso comenzamos por dividir 1 por 7,25, se nos sale casi toda la *reglilla* de la *regla* y no podemos, a continuación, llevar el cursor a *rc 2,08*, por lo que comenzaremos por el otro lado del denominador, dividiendo 1 por 1,6, o sea:

$$ri 1,6 \rightarrow Ri 1; C \rightarrow rc 3,9; ri 2,08 \rightarrow C; C \rightarrow rc 7,25;$$

$$C \equiv Ri 1,063; \Delta = -3;$$

$$Z = \Sigma + 2 = (1 - 1 - 0 - 2 - 0) + 2 = 0;$$

$$S = 0,1063.$$

$$\frac{4,85 \times 0,48 \times 1,64 \times 0,0035}{2,845};$$

$$C \rightarrow Ri 4,85; ri 2,845 \rightarrow C; C \rightarrow ri 4,8; rc 1,64 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 3,5; C \equiv Ri 4,697; \Delta = 3;$$

$$Z = \Sigma - 1 = (1 + 0 + 1 - 2 - 1) - 1 = -2;$$

$$S = 0,004697.$$

$$0,258 \times 7,95 \times 0,704 \times 0,021 \times 0,27;$$

$$C \rightarrow Ri 2,58; rc 7,95 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,1; rc 7,04 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 2,7; C \equiv Ri 8,187; \Delta = 5;$$

$$Z = \Sigma - 2 = (0 + 1 + 0 - 1 + 0) - 2 = -2;$$

$$S = 0,008187;$$

como habrán observado nuestros lectores, hemos cam-

biado el orden de los dos factores 0,704 y 0,021, porque nos salíamos fuera de la regla.

$$\frac{0,65 \times 1,82 \times 3,14 \times 7,95 \times 5,12 \times 0,43}{7,85 \times 0,054 \times 0,092 \times 1,48 \times 2,54};$$

$C \rightarrow Ri\ 6,5; ri\ 7,85 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 3,14; ri\ 5,4 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow ri\ 7,95; ri\ 9,2 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 5,12; ri\ 1,48 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow ri\ 4,3; ri\ 2,54 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 1,82; C \equiv Ri\ 4,43.$

$$\Delta = 1;$$

$$Z = \Sigma = (0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1) = 3; S = 443;$$

por salirnos fuera, el factor 1,82 se ha colocado el último al operar.

$$\frac{1,21 \times 0,374 \times \pi}{10,75 \times 3,8 \times 40,5 \times 21,2 \times 0,055 \times 19,85};$$

$C \rightarrow Ri\ 1,21; ri\ 1,075 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 3,74; ri\ 3,8 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow ri\ \pi; ri\ 4,05 \rightarrow C; C \rightarrow rc\ 2,12; ri\ 5,5 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow rc\ 1,985; C \equiv Ri\ 3,716; \Delta = -3; Z = \Sigma + 2;$
 $(1 + 0 + 1 - 2 - 1 - 2 - 2 + 1 - 2) + 2 = -4;$
 $S = 0,00003716.$

En los ejemplos que hemos puesto se ha tenido el cuidado de que la suma de los factores del numerador y denominador sea impar, por lo que ya se dijo. Si fuese par, basta introducir el factor 1 donde nos convenga, en el numerador o denominador, y operar como anteriormente, pero haciendo materialmente la multiplicación por 1, bien en *ri* o en *rc*, según donde lo hayamos colocado, y contándolo al determinar Σ como una cifra entera, por lo que no debe dejar de colocarse para que no se olvide, ya que también hay que tenerlo en cuenta para Δ .

Sea, por ejemplo:

$$803 \times 645 \times 0,000109 \times 72,3 \times 5,03 \times 3,52;$$

poniendo el factor 1:

$$1 \times 803 \times 645 \times 0,000109 \times 72,3 \times 5,03 \times 3,52;$$

y operaríamos así:

$C \rightarrow Ri\ 1; rc\ 8,03 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 6,45; rc\ 1,09 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow ri\ 7,23; rc\ 5,03 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 3,52;$
 $C \equiv Ri\ 7,228; \Delta = 7;$
 $Z = \Sigma - 3 = (1 + 3 + 3 - 3 + 2 + 1 + 1) - 3 = 5;$
 $S = 72280.$

$$\frac{3,14 \times 9,15 \times 6,45}{2,61 \times 0,043 \times 0,72}.$$

Ponemos el 1 como primer factor del numerador:

$$\frac{1 \times 3,14 \times 9,15 \times 6,45}{2,61 \times 0,043 \times 0,72}.$$

$ri\ 2,61 \rightarrow Ri\ 1; C \rightarrow ri\ 3,14; ri\ 4,3 \rightarrow C;$
 $C \rightarrow ri\ 9,15; ri\ 7,2 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 6,45;$
 $C \equiv Ri\ 2,293; \Delta = 1;$

$$Z = \Sigma = (1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 0) = 4; S = 2293.$$

$$\frac{8,5}{0,74 \times 0,81 \times 23}$$

Ponemos el 1 como último factor del denominador:

$$\frac{8,5}{0,74 \times 0,81 \times 23 \times 1};$$

$C \rightarrow Ri\ 8,5; ri\ 7,4 \rightarrow C; C \rightarrow rc\ 8,1; ri\ 2,3 \rightarrow C;$
 $rc\ 1 \equiv Ri\ 6,167; \Delta = -3;$
 $Z = \Sigma + 2 = (1 - 0 - 0 - 2 - 1) + 2 = 0; S = 0,6167.$

$$3,25 \times 0,04575;$$

Poniendo la unidad como último factor, será:

$$3,25 \times 0,04575 \times 1;$$

$C \rightarrow Ri\ 3,25; rc\ 4,575 \rightarrow C; ri\ 1 \equiv Ri\ 1,487;$
 $\Delta = 3; Z = \Sigma - 1 = (1 - 1 + 1) - 1 = 0; S = 0,1487.$

$$\frac{22,3}{1,57};$$

poniendo la unidad como segundo factor del numerador, tendremos:

$$\frac{22,3 \times 1}{1,57};$$

$C \rightarrow Ri\ 2,23; ri\ 1,57 \rightarrow C; ri\ 1 \equiv Ri\ 1,42; \Delta = 1;$
 $Z = \Sigma = (2 + 1 - 1) = 2; S = 14,2.$

Por estos dos últimos ejemplos, vemos que la multiplicación y división de dos números queda comprendida dentro de la fórmula general, no siendo necesario retener las reglas especiales que dimos anteriormente.

Caso en que se salen fuera de la regla algunos números.

Hemos visto que mientras puede operarse de modo que cada vez que movemos *la reglilla* se eliminan tres números en el primer movimiento y dos en cada uno de los siguientes, se obtienen dos grandes ventajas: una, por la mayor rapidez lograda y con mayor precisión, y otra, por la cómoda forma de trabajar, despreocupándose de la posición de *la coma* en el resultado, ya que, después de obtenido el valor de éste, un cálculo mental sencillísimo permite determinarla. Por eso debe procurarse, al ir haciendo actuar los distintos factores, que el orden se vaya sucediendo de manera que *la reglilla* esté lo más centrada posible; pero hay casos en que los números se nos salen del alcance del cursor, y entonces lo que hay que hacer es rectificar la posición de *la reglilla*, desplazándola en toda su longitud hacia el centro, es decir, hacer que la posición que ocupe *ri 10* sea ocupada por *ri 1*, o viceversa. Ello lleva consigo un cambio en el número de cifras enteras del resultado final, con arreglo a la siguiente regla: Por cada desplazamiento total que demos a *la reglilla* de derecha a izquierda, hay que aumentar una unidad al número de cifras del resultado obtenido, según la fórmula general, y por cada uno de izquierda a derecha, hemos de disminuirla. En todo lo demás, se opera según las reglas dadas anteriormente. Veamos algunos ejemplos, y en todos ellos llamaremos *z* al número de cifras enteras del resultado que nos da la fórmula general, y al definitivo le llamaremos *Z*.

$$15,44 \times 30,65 \times 0,01706;$$

$$C \rightarrow Ri 1,544; rc 3,065 \rightarrow C;$$

ahora no podemos llevar el cursor sobre *ri 1,706* por caernos fuera, y operamos como sigue:

$$C \rightarrow ri 10; ri 1 \rightarrow C; C \rightarrow ri 1,706;$$

$$C \equiv Ri 8,073; z = \Sigma - 1 = 2;$$

y por el desplazamiento de *la reglilla* de izquierda a derecha:

$$Z = z - 1 = 1; S = 8,073.$$

$$\frac{6,7 \times 0,12 \times 7,25 \times 5,2 \times 6,1}{3,47 \times 0,028 \times 1,4 \times 6,8};$$

$$C \rightarrow Ri 6,7; ri 3,47 \rightarrow C; C \rightarrow ri 1,2; ri 2,8 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 7,25; ri 1,4 \rightarrow C.$$

Como no podemos llevar el cursor a *ri 5,2* por

estar fuera, corremos a la izquierda *la reglilla* en toda su longitud:

$$C \rightarrow ri 1; ri 10 \rightarrow C; C \rightarrow ri 5,2; ri 6,8 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 6,1; C \equiv Ri 2; z = \Sigma;$$

$$Z = \Sigma + 1 = (1 + 0 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1) + 1 = 3; S = 200.$$

$$16580$$

$$39 \times 0,453 \times 0,74 \times 85$$

$$C \rightarrow Ri 1,658; ri 3,9 \rightarrow C.$$

Como no podemos llevar el cursor sobre *rc 4,53*, corremos *la reglilla* a la derecha:

$$C \rightarrow ri 10; ri 1 \rightarrow C; C \rightarrow rc 4,53; ri 7,4 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow rc 8,5; C \equiv Ri 1,493; z = \Sigma + 2;$$

$$Z = \Sigma + 2 - 1 = \Sigma + 1 = (5 - 2 - 0 - 0 - 2) + 1 = 2; S = 14,93.$$

También en el caso que el número de factores sea par, se aplica la misma regla, ya que es general; pero tenemos que hacer una salvedad: si el factor que nos sale fuera es el 1, bien en *ri* o *rc*, en lugar de correr *la reglilla* una longitud, es igual hacer la lectura en el 10, con lo que nos ahorramos un movimiento inútil, pero teniendo siempre en cuenta que dicho cambio de lecturas equivale a una rectificación de la posición de *la reglilla* y debe modificarse el número de cifras de *Z*. Ejemplos:

$$0,025 \times 0,062 \times 0,037 \times 0,013.$$

Como son cuatro factores, añadimos el 1:

$$0,025 \times 0,062 \times 0,037 \times 0,013 \times 1;$$

$$C \rightarrow Ri 2,5; rc 6,2 \rightarrow C; C \rightarrow ri 3,7; rc 1,3 \rightarrow C,$$

y ahora tendríamos que leer el resultado en *ri 1*; pero como cae fuera de *la regla*, lo leemos en *ri 10* $\equiv Ri 7,455$, equivaliendo este cambio en las lecturas a haber desplazado *la reglilla* una longitud de izquierda a derecha, por lo que debemos restar una unidad. Luego $\Delta = 5$:

$$z = \Sigma - 2 = (-1 - 1 - 1 - 1 + 1) - 2 = -5;$$

y

$$Z = z - 1 = -6; S = 0,0000007455.$$

$$\begin{array}{r} 2,3 \\ \hline 0,041 \times 1,33 \times 0,322 \end{array}$$

Pongamos como último factor del denominador 1:

$$\begin{array}{r} 2,3 \\ \hline 0,041 \times 1,33 \times 0,322 \times 1 \end{array}$$

$$C \rightarrow Ri 2,3; ri 4,1 \rightarrow C; C \rightarrow rc 1,33; ri 3,22 \rightarrow C;$$

ahora tendríamos que leer el resultado en *rc 1*; pero como se sale fuera, lo leemos en *rc 10*, lo que equivale a desplazar la *reglilla* de derecha a izquierda, por lo que debemos aumentar 1 en el número de cifras:

$$ri 1 \equiv Ri 1,31; \Delta = -3, z = \Sigma + 2;$$

$$Z = \Sigma + 3 = (1 + 1 - 1 - 0 - 1) + 3 = 3, \text{ y } S = 131.$$

Inconvenientes que aún ofrece el método y su remedio.

A nuestro juicio, el método general dado es ideal mientras los números no se salen de la *regla*. El operador trabaja automática y despreocupadamente, obteniendo el resultado total de la operación, por larga que sea, con rapidez, precisión y seguridad. No es complicación ninguna que el total de números sea par, ya que hemos visto con qué facilidad se hace impar. Pero no siempre se puede trabajar así; cuando hay un número que se nos sale de la *regla*, tenemos dos soluciones igualmente molestas: la primera, tener que alterar el orden de los números; es un nuevo cuidado que nos echamos el procurar que no se nos olvide ninguno de los que, de momento, prescindimos, y la segunda, tener que rectificar la posición de la *reglilla*, cuando no hay otro remedio, para poder seguir operando, por salirse fuera los números.

Ambos inconvenientes quedarían salvados si el cursor tuviera la disposición siguiente: además del hilo central, dos laterales, y que la distancia entre estos últimos fuese exactamente igual que la que hay entre el 1 y el 10 de la escala inferior de la *regla*; de modo que si se coloca el hilo lateral izquierdo coincidiendo con *Ri 1*, el derecho caiga exactamente sobre *Ri 10*. Supongamos que disponemos de dicho cursor; vamos a poner unos ejemplos donde se exalten los inconvenientes citados, para poner de relieve sus ventajas. En ellos, llamaremos *Cd* al trazo derecho del cursor propuesto, y al izquierdo, *Ci*. Tratemos de hacer la siguiente operación con una *regla* ordinaria:

$$\begin{array}{r} 0,253 \times 2,25 \times \pi \times 3,080 \times 8,6 \\ \hline 6,55 \times 0,417 \times 0,0265 \times 5,45 \\ \hline C \rightarrow Ri 2,53; ri 6,55 \rightarrow C; \end{array}$$

no podemos operar con 2,25 porque se sale fuera; multipliquemos por π :

$$C \rightarrow ri \pi; ri 4,17 \rightarrow C;$$

como 2,25 y 3,08 se nos salen fuera, multipliquemos por 8,6:

$$C \rightarrow ri 8,6; ri 2,65 \rightarrow C; C \rightarrow ri 2,25; ri 5,45 \rightarrow C;$$

$$C \rightarrow ri 3,08; C \equiv Ri 1,21; \Delta = 1;$$

$$Z = \Sigma = (0 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 0 + 1 - 1) = 3;$$

$$S = 121.$$

Como vemos, hemos tenido la molestia de tener que ir saltando de factor en factor para poder seguir operando. Si la operación se hubiera hecho con el cursor que proponemos, hubiéramos operado así:

$$C \rightarrow Ri 2,53; ri 6,55 \rightarrow C; Ci \rightarrow ri 2,25;$$

$$ri 4,17 \rightarrow Ci; Ci \rightarrow ri \pi; ri 2,65 \rightarrow Ci;$$

$$Ci \rightarrow ri 3,08; ri 5,45 \rightarrow Ci; C \rightarrow ri 8,6;$$

$$C \equiv Ri 1,21;$$

la diferencia a favor del nuevo cursor salta a la vista, ya que nos ha permitido operar en el orden que están escritos los factores, sin confusión posible.

Aun operando en la forma indicada con el nuevo cursor, nos ocurrirá a veces que al llevar *Cd* o *Ci* sobre el último número en *ri*, de la operación que estamos haciendo, nos encontraremos que no podemos leer en la *regla* por caernos fuera. He aquí otra de las ventajas del nuevo cursor, ya que si está marcado el resultado final con *Ci* lo leeremos igualmente en *Cd*, que forzosamente estará dentro de la *regla*, y disminuirémos una unidad del número de cifras que nos dé la fórmula general, y si estuviese marcado con *Cd* cayendo fuera de la *regla*, lo leeremos en *Ci*, que marcará el mismo número y forzosamente caerá dentro, teniendo cuidado de aumentar una unidad al número de cifras dado por la fórmula general. Ejemplos:

$$0,852 \times 5,97 \times 0,407 \times 0,012 \times 0,72;$$

$$C \rightarrow Ri 8,52; rc 5,97 \rightarrow C; Cd \rightarrow ri 4,07;$$

$$rc 1,2 \rightarrow Cd; Cd \rightarrow ri 7,2; Ci \equiv Ri 1,789; \Delta = 5;$$

$$z = \Sigma - 2 = (0 + 1 + 0 - 1 + 0) - 2 = -2;$$

$$Z = z + 1 = -2 + 1 = -1; S = 0,01789.$$

$$\begin{array}{r} 6,44 \times 11,3 \times 17,5 \times 21,4 \\ \hline 18,2 \times 7,31 \times 28,5 \end{array};$$

$$C \rightarrow Ri 6,44; ri 1,82 \rightarrow C; C \rightarrow ri 1,13; ri 7,31 \rightarrow C;$$

$$Ci \rightarrow ri 1,75; ri 2,85 \rightarrow Ci; Ci \rightarrow ri 2,14;$$

$$Cd \equiv Ri 7,19;$$

$$Z = z - 1 = \Sigma - 1 = (1 + 2 + 2 + 2 - 2 - 1 - 2) - 1 = 1;$$

$$S = 7,19.$$

Puede ocurrir que aun con el cursor especial llegue éste a no alcanzar los números de *la reglilla*. La solución es bien sencilla: al mover *la reglilla* para colocar otro número bajo la línea del cursor con que estamos trabajando, en lugar de colocarlo sobre ésta, lo ponemos sobre la opuesta, con lo que quedará mucho más centrada, teniendo el cuidado de aumentar o disminuir una unidad al número de cifras que nos da la fórmula general cada vez que cambiemos *Cd* por *Ci* o *Ci* por *Cd*.

Sea, por ejemplo:

$$\frac{7,22 \times 5,35 \times 0,0895 \times 7,75}{1,21 \times 0,01315 \times 1,34};$$

$C \rightarrow Ri\ 7,22; ri\ 1,21 \rightarrow C; Cd \rightarrow ri\ 5,35;$

$ri\ 1,315 \rightarrow Ci; Cd \rightarrow ri\ 8,95; ri\ 1,34 \rightarrow Ci;$

$Cd \rightarrow ri\ 7,75; Ci \equiv Ri\ 1,258;$

como hemos pasado tres veces del cursor derecho al izquierdo,

$$Z = z + 3 = \Sigma + 3 = (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1) + 3 = 4; S = 1,258.$$

Hemos hecho esta operación en tres movimientos de *la reglilla* y cuatro del cursor, o sea, lo mismo que cuando todos los números caen dentro de la regla. Si

la hubiésemos hecho por el método explicado anteriormente, sería:

$C \rightarrow Ri\ 7,22; ri\ 1,21 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 1; ri\ 10 \rightarrow C;$

$C \rightarrow ri\ 5,35; ri\ 1,315 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 1; ri\ 10 \rightarrow C;$

$C \rightarrow ri\ 8,95; ri\ 1,34 \rightarrow C; C \rightarrow ri\ 1; ri\ 10 \rightarrow C;$

$C \rightarrow ri\ 7,75; C \equiv Ri\ 1,258;$

ahora hemos necesitado seis movimientos de *la reglilla* y siete del cursor, o sea, doble de los primeros y casi el doble de los segundos. La ventaja del nuevo cursor se pone aún más de relieve en este caso.

Son, a nuestro juicio, tan evidentes las facilidades que han de encontrarse con el cursor propuesto, que está en nuestro ánimo tratar de construirlo, y si lo logramos, trabajar con él para deducir de su empleo las ventajas e inconvenientes que presenta.

Resumen.

Creemos, con el presente estudio, haber facilitado a todos los amantes de *la regla de cálculo* un medio sencillo de librarles de la preocupación de la molesta *coma* que automáticamente obtienen de la fórmula que hemos encontrado para las cifras enteras del resultado:

$$Z = \Sigma - \frac{\Delta - 1}{2};$$

siempre que, como en todas las fórmulas que usa el Ingeniero, estemos dentro de las condiciones en que se ha deducido.