

# ESTUDIO TEÓRICO Y FOTOELÁSTICO DE EMPARRILLADOS

Por E. TORROJA y L. VILLENA, del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales.

*Resumiendo los datos obtenidos en anteriores artículos, da el presente los cuadros de valores, gráficos y fotografías de todos los casos estudiados, y analiza la bondad del método fotoelástico, frente a los de cálculo. Se sugieren, finalmente, nuevas investigaciones para otros tipos de emparrillado.*

## RESUMEN COMPARATIVO

### § 20. Recopilación de resultados.

En los dos primeros capítulos se razonó la resolución teórica, por dos métodos diferentes, del emparrillado en estudio, llegándose a obtener los datos numéricos precisos. En el capítulo III se acaba de explicar los fundamentos del método fotoelástico, así como el procedimiento experimental de su resolución práctica. A continuación se agrupan, para distintos casos de carga, los resultados hallados, siguiendo los métodos teóricos de comprobación y los obtenidos experimentalmente con modelo rígido o articulado. Para cada tipo de carga, se da un cuadro con los momentos flectores producidos en las secciones sobre las que actúan las fuerzas exteriores y en aquellas otras que, en largueros y viguetas, corresponden a los nudos. Junto a cada cuadro de valores se representan gráficamente, con trazo continuo o a rayas, respectivamente, la superficie de momentos flectores experimentalmente halladas y determinadas por el procedimiento de Melan.

En general, los resultados discrepan ligeramente entre sí. En gran número de casos, los obtenidos fotoelásticamente, son intermedios a los teóricos de uno y otro método. En otros casos, existen claras discrepancias entre los resultados teóricos y los experimentales, por regla general, en las inmediaciones de los puntos de aplicación de carga. Ello se debe a que, por no cumplirse en estas zonas las hipótesis en que se base el cálculo teórico, la tensión longitudinal en el canto de la viga es diferente a la que correspondería al momento flector geoméricamente determinado. Por tanto, los valores de los momentos flectores que aparecen en los cuadros y gráficos son los que, con arreglo a la teoría usual de la Resistencia de Materiales, darían en las fibras extremas de la sección, las mismas tensiones que proporciona directamente el mé-

todo fotoelástico. Así, pues, respecto a esta discrepancia, el método experimental se ajusta más a la realidad que a los métodos de cálculo, ya que en la técnica lo que interesa es precisamente el valor de esa tensión longitudinal en la fibra extrema.

Nuevas, aunque pequeñas, discrepancias se obtienen entre los modelos rígidos y los articulados, lo cual demuestra que los momentos de torsión (creados en ciertas vigas por el desigual giro que sus secciones, correspondientes a dos nudos consecutivos, adquieren a consecuencia de las inclinaciones diferentes de las dos vigas normales que con ella se cruzan) influyen no sólo por las tensiones propias de la torsión, sino por la variación que introducen en la distribución de momentos flectores. Como ya se ha dicho, en la mayor parte de los casos, estas discrepancias son muy pequeñas y en ellas también son menores las divergencias entre los resultados experimentales y los analíticos. En cambio, en otros casos existen apreciables diferencias entre los resultados obtenidos con o sin consideraciones de los esfuerzos de torsión, resultados que difieren algo más de los teóricos, ya que éstos se obtuvieron despreciando la existencia de la torsión.

Ya se ha aludido anteriormente al hecho de que, en ciertos tipos de carga, los momentos flectores obtenidos fotoelásticamente para los largueros más deformados son ligeramente superiores a los que, en realidad, les correspondería, como se puede comprobar en virtud del principio de la superposición, aplicado a otros tipos de carga examinados también fotoelásticamente. Puede apreciarse, sin embargo, que dichos errores, por otra parte fácilmente evitables, son muy pequeños.

Con objeto de comprobar si se producían efectos anormales a consecuencia de la inclinación o escalonamiento dado al emparrillado, se investigaron tipos

de cargas simétricos respecto al eje longitudinal, y se comprobó que, tanto en los modelos rígidos como en los articulados, las discrepancias eran de índole experimental. (Véase los dos primeros casos de carga de las figuras 33 a 40.)

Solamente se reproducen fotografías de algunos

tipos de carga, como ejemplo de todas las estudiadas y para que el lector pueda comprobar por sí mismo la claridad intuitiva del procedimiento, ya que basta seguir una isocroma para ver la variación de momentos flectores dada, a escala conveniente, por su separación al borde.

Carga  $P=1$  aplicada en la sección  $1\frac{1}{2}, 1$ .

|                              | $M_{10}$<br>$M_{20}$ | $M_{11}$<br>$M_{21}$ | $M_{12}$<br>$M_{22}$ | $M_{13}$<br>$M_{23}$ | $M_{1\frac{1}{2},1}$ | $\bar{M}_{11}$<br>$\bar{M}_{21}$ | $\bar{M}_{12}$<br>$\bar{M}_{22}$ |
|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Procedimiento Melan.....     | 2,60                 | 1,10                 | 1,35                 | 0,63                 | 4,21                 | 1,00                             | 0,36                             |
| Procedimiento Leonhardt..... | 2,53                 | 1,03                 | 1,33                 | 0,60                 | 4,13                 | 0,99                             | 0,23                             |
| Modelo rígido.....           | 2,42                 | 0,97                 | 1,42                 | 0,80                 | 3,73                 | 1,10                             | 0,34                             |
| Modelo articulado.....       | 2,50                 | 1,07                 | 1,31                 | 0,72                 | 3,78                 | 1,12                             | 0,33                             |

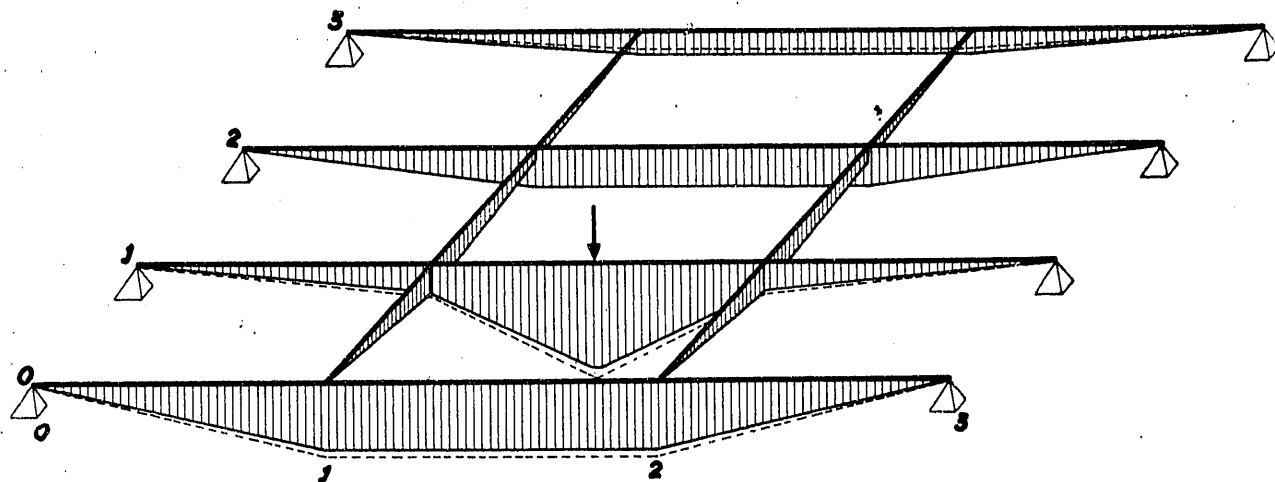


Figura 33.

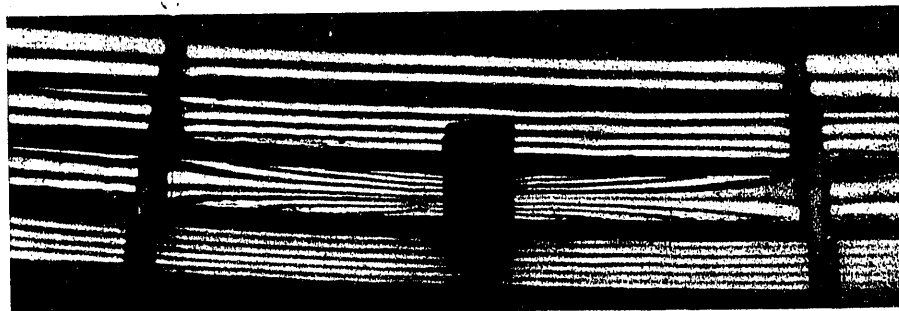


Figura 34.

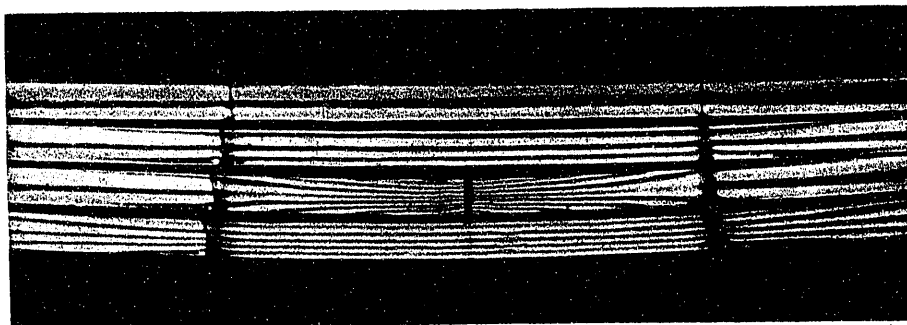


Figura 35.

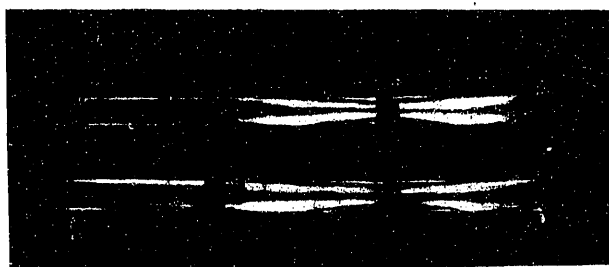


Figura 36.

Carga  $P=1$  aplicada en la sección  $1\frac{1}{2}, 2$ .

|                              | $M_{10}$<br>$M_{20}$ | $M_{11}$<br>$M_{21}$ | $M_{12}$<br>$M_{22}$ | $M_{13}$<br>$M_{23}$ | $M_{1\frac{1}{2},2}$ | $\bar{M}_{11}$<br>$\bar{M}_{21}$ | $\bar{M}_{12}$<br>$\bar{M}_{22}$ |
|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Procedimiento Melan.....     | 0,63                 | 1,35                 | 1,10                 | 2,60                 | 4,21                 | 0,36                             | 1,00                             |
| Procedimiento Leonhardt..... | 0,60                 | 1,33                 | 1,02                 | 2,53                 | 4,13                 | 0,23                             | 0,99                             |
| Modelo rígido.....           | 0,81                 | 1,40                 | 0,99                 | 2,40                 | 3,74                 | 0,34                             | 1,11                             |
| Modelo articulado.....       | 0,74                 | 1,33                 | 1,07                 | 2,48                 | 3,72                 | 0,33                             | 1,12                             |

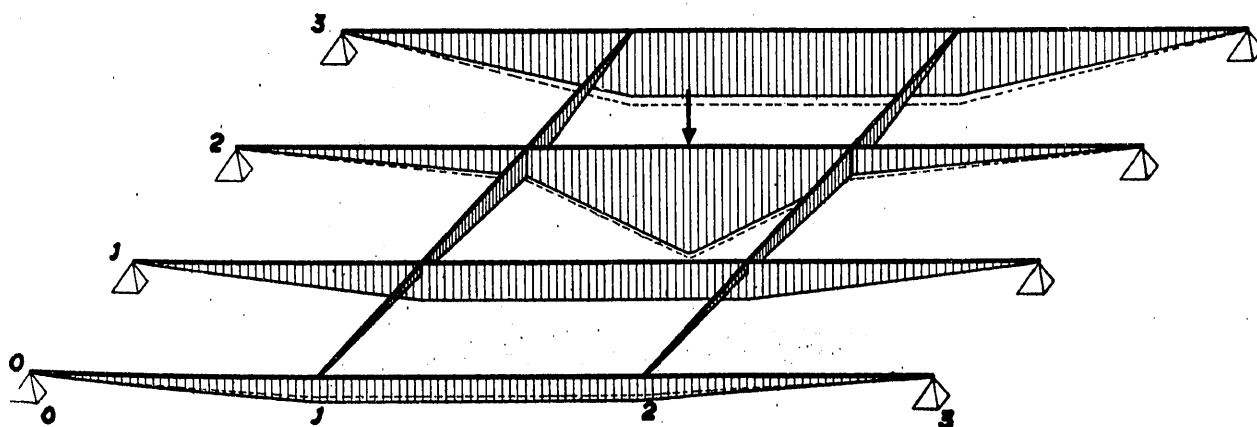


Figura 37.

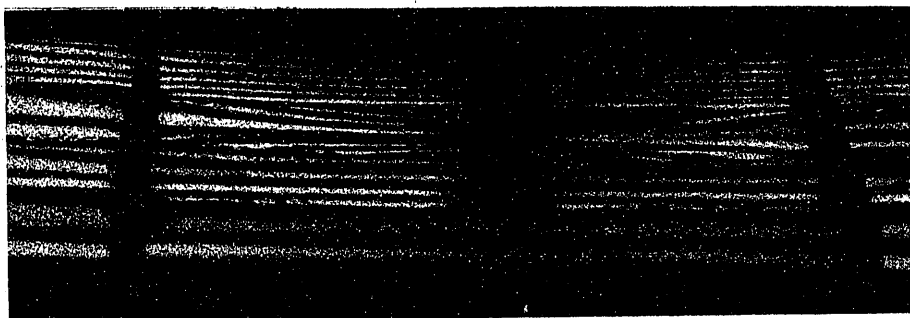


Figura 38.

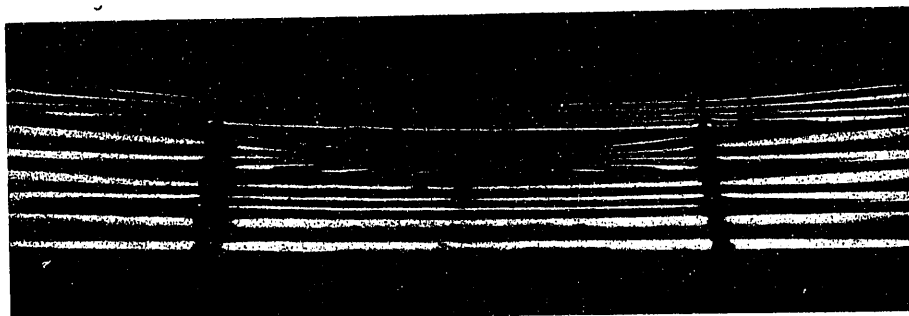


Figura 39.

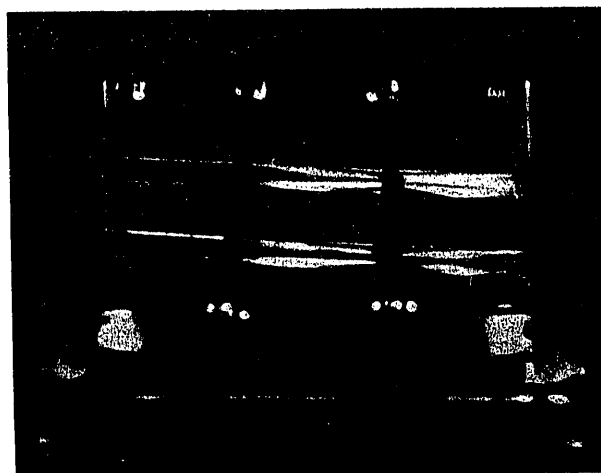


Figura 40.

Cargas  $P = 0,5$  en los nudos 1,1 y 2,2.

|                              | $M_{10}$<br>$M_{23}$ | $M_{11}$<br>$M_{22}$ | $M_{12}$<br>$M_{21}$ | $M_{13}$<br>$M_{30}$ | $\bar{M}_{11}$<br>$\bar{M}_{22}$ | $\bar{M}_{12}$<br>$\bar{M}_{21}$ |
|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Procedimiento Melan.....     | 1,64                 | 1,56                 | 1,35                 | 1,10                 | 0,83                             | 0,23                             |
| Procedimiento Leonhardt..... | 1,62                 | 1,52                 | 1,31                 | 1,03                 | 0,84                             | 0,20                             |
| Modelo rígido.....           | 1,59                 | 1,53                 | 1,28                 | 1,11                 | 0,86                             | 0,24                             |
| Modelo articulado.....       | 1,56                 | 1,58                 | 1,28                 | 1,08                 | 0,91                             | 0,25                             |

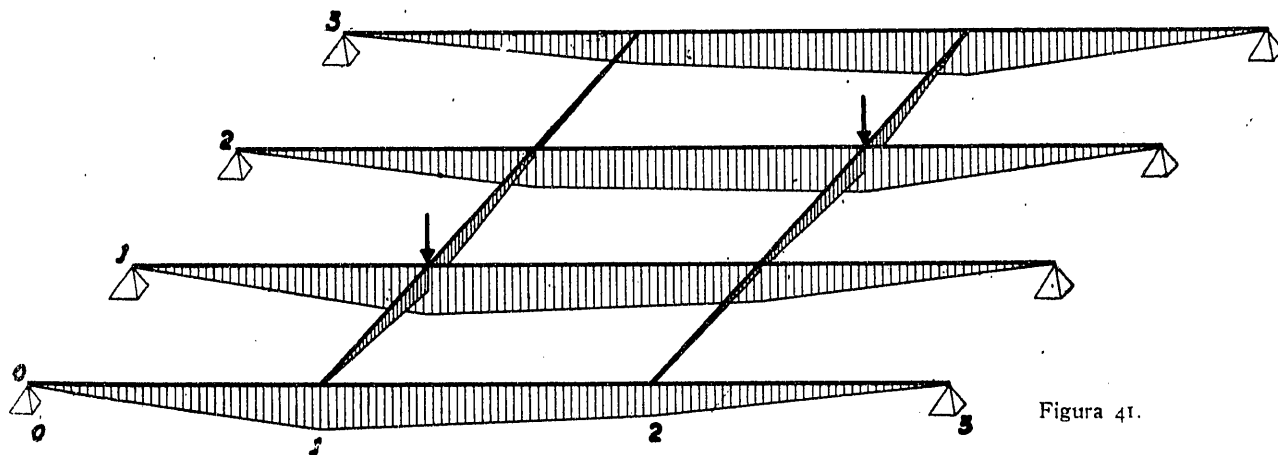


Figura 41.

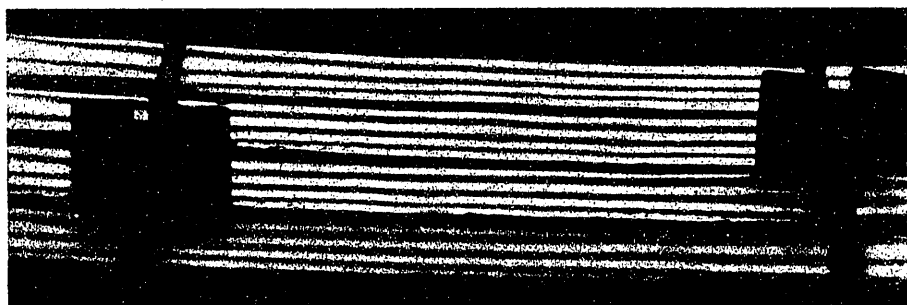


Figura 42.

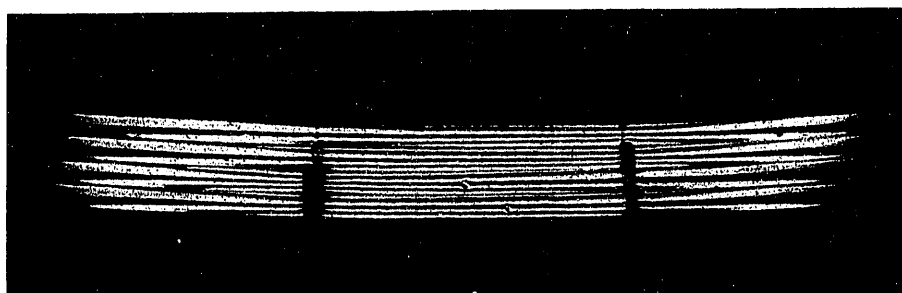


Figura 43.

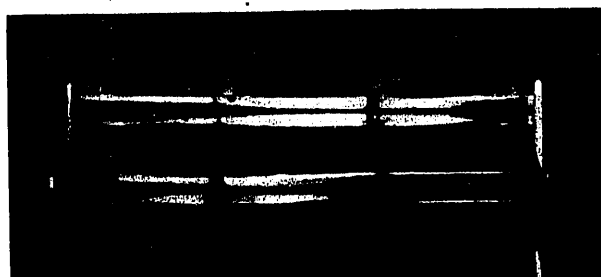


Figura 44.

Cargas  $P=0,5$  en los nudos 1,0 y 1,2.

|                              | $M_{10}$ | $M_{11}$ | $M_{12}$ | $M_{13}$ | $M_{20}$ | $M_{21}$ | $M_{22}$ | $M_{23}$ | $\bar{M}_{11}$ | $\bar{M}_{12}$ | $\bar{M}_{21}$ | $\bar{M}_{22}$ |
|------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Procedimiento Melan.....     | 3,00     | 2,21     | 1,52     | 0,74     | 1,49     | 1,14     | 0,78     | 0,38     | -0,40          | 0,42           | -0,01          | 0,01           |
| Procedimiento Leonhardt..... | 2,99     | 2,23     | 1,50     | 0,75     | 1,40     | 1,05     | 0,71     | 0,35     | -0,43          | 0,43           | -0,00          | 0,00           |
| Modelo rígido.....           | 2,86     | 2,05     | 1,50     | 0,91     | 1,35     | 1,21     | 0,87     | 0,51     | 0,40           | 0,41           | —              | —              |

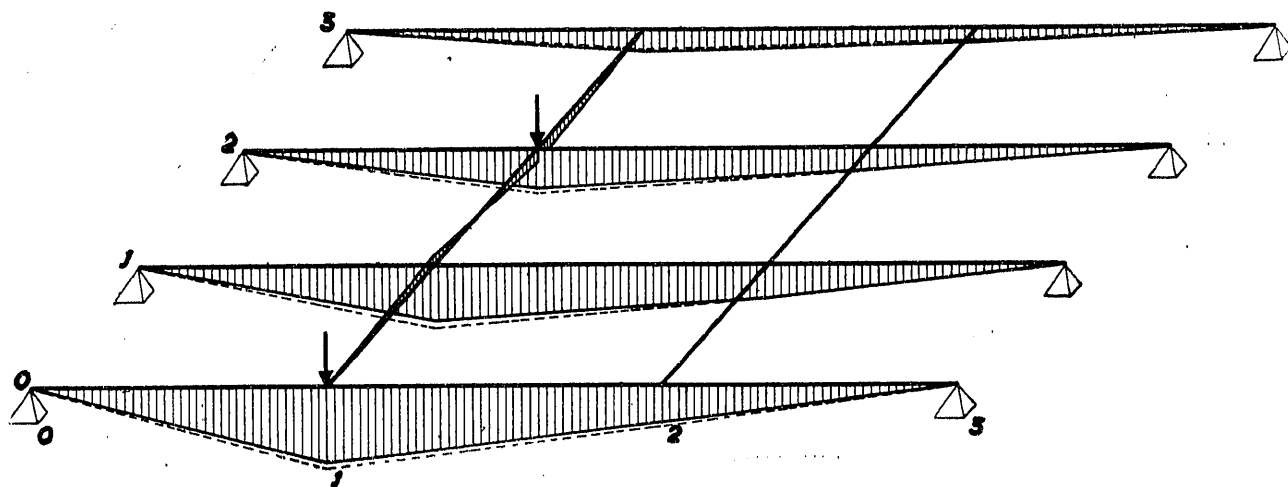


Figura 45.

Cargas  $P=0,5$  en los nudos 1,0 y 2,3.

|                              | $M_{10}$<br>$M_{23}$ | $M_{11}$<br>$M_{22}$ | $M_{12}$<br>$M_{21}$ | $M_{13}$<br>$M_{20}$ | $\bar{M}_{11}$<br>$\bar{M}_{22}$ | $\bar{M}_{12}$<br>$\bar{M}_{21}$ |
|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Procedimiento Melan.....     | 2,28                 | 1,64                 | 1,10                 | 0,59                 | -0,63                            | -0,42                            |
| Procedimiento Leonhardt..... | 2,31                 | 1,62                 | 1,03                 | 0,48                 | -0,62                            | -0,43                            |
| Modelo rígido.....           | 2,29                 | 1,62                 | 1,10                 | 0,62                 | -0,60                            | -0,41                            |

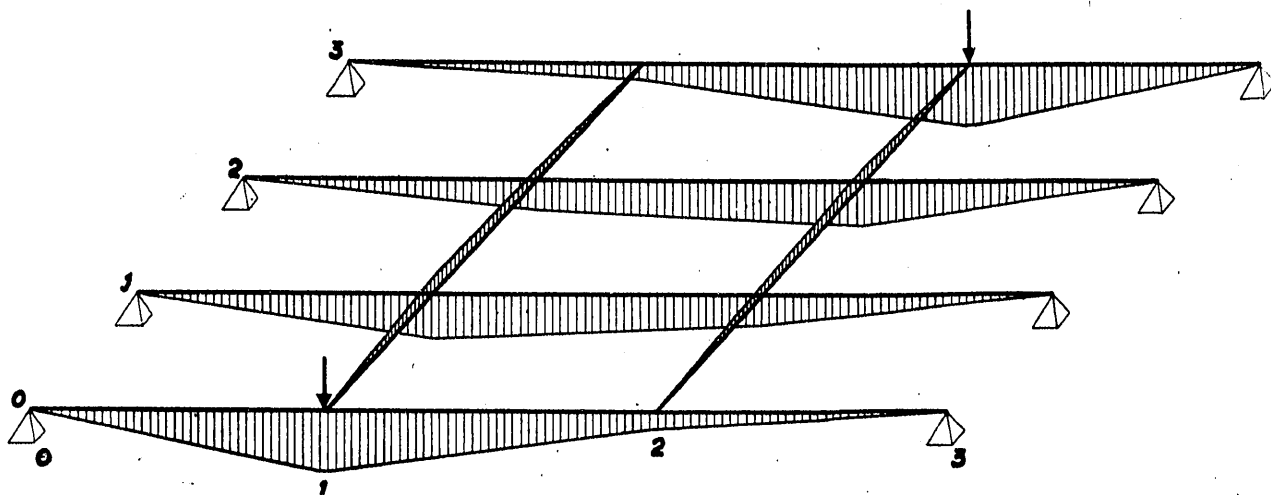


Figura 46.

Cargas  $P=0,5$  en las secciones  $1\frac{1}{2}, 0$  y  $1\frac{1}{2}, 3$ .

|                              | $M_{10}, M_{13}$<br>$M_{20}, M_{23}$ | $M_{11}, M_{12}$<br>$M_{21}, M_{22}$ | $M_{1\frac{1}{2}, 0}$<br>$M_{1\frac{1}{2}, 3}$ | $\bar{M}_{11}, \bar{M}_{12}$<br>$\bar{M}_{21}, \bar{M}_{22}$ |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Procedimiento Melan.....     | 1,18                                 | 1,61                                 | 3,39                                           | — 0,62                                                       |
| Procedimiento Leonhardt..... | 1,17                                 | 1,57                                 | 3,35                                           | — 0,61                                                       |
| Modelo rígido.....           | 1,21                                 | 1,62                                 | 2,85                                           | — 0,63                                                       |

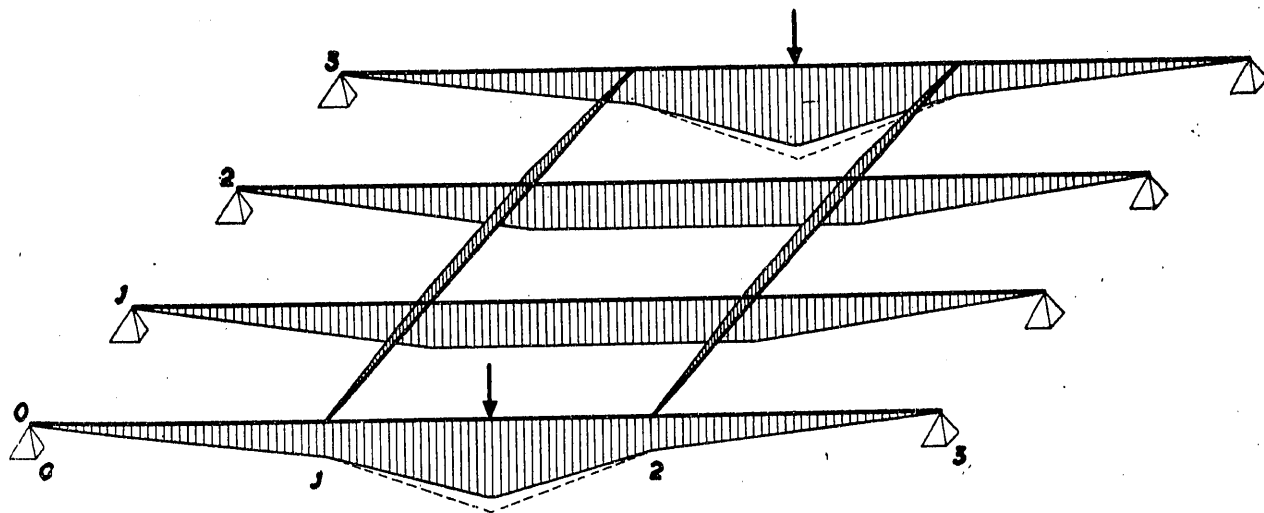


Figura 47.

## § 21. Juicio crítico.

Para formar un juicio crítico sobre la bondad de cada uno de los procedimientos empleados y para atribuir a uno u otro los errores que entre sus resultados se obtienen, deben recordarse las hipótesis o restricciones implicadas en cada uno. El método de cálculo de Melan supone la no existencia de momentos de torsión, introduce una hipótesis especial sobre los apoyos elásticos y sobre las reacciones en ellos originadas, y precisa que, tanto los momentos de inercia de cada larguero como las fuerzas aplicadas sobre ellos, varíen de una manera semejante para todos ellos. El método de cálculo de Leonhardt prescinde, igualmente, de los posibles momentos de torsión existentes y supone el empujillado con una sola viga, reduciendo a éste todos los demás casos.

Por el contrario, el método fotoelástico, en cuanto al planteamiento del problema, no impone restricción alguna, ni precisa introducir supuesto de ninguna clase sobre la aparición de reacciones de apoyo, que son automáticamente dadas por el modelo; solamente introduce el giro o escalonado del empujillado que resulta admisible, tanto teórica como prácticamente.

No se puede, pues, desde el punto de vista teórico, atribuir a los métodos de cálculo una exactitud

superior al método fotoelástico, sino que, por el contrario, salvando los errores propios de cualquier experiencia, y hablando en líneas generales, este último se aproximará mucho más a la realidad que aquellos otros.

Adviértase que el hecho de la pequeñez en las discrepancias entre unos y otros resultados se debe, principalmente, al hecho de tratarse de un modelo sencillo y simétrico, para el cual se cumplen, mucho mejor, que para otro más complicado, las hipótesis hechas por los dos métodos de cálculo. Es, pues, lógico pensar (y esta idea presidió la elección del modelo de empujillado), que si ya en circunstancias favorables a los métodos teóricos pueden interpretarse los resultados experimentales como más probables y ajustados a la realidad que los proporcionados por el cálculo, en cualquier otro caso, en el que, por ser más complicado el tipo de empujillado, se esté más lejos del cumplimiento de las hipótesis previas, aún serán mayores las ventajas de este método.

En el caso de estructuras de poca importancia o significación, se podrá, pues, abordar directamente su estudio, sirviéndose sólo de la fotoelasticidad. En las de mayor importancia o complicación puede llegar a ser imprescindible frente a los métodos de cálculo, y, en todo caso, permitirá dilucidar cuál de entre

todos los procedimientos de cálculo posibles se ajusta más a la realidad del problema concreto en cuestión.

Respecto a la rapidez, comodidad y economía de los distintos procedimientos, hemos de repetir que, si ya en el tipo de emparrillado sencillo y simétrico anteriormente estudiado resulta comparable o beneficioso el empleo de la fotoelasticidad, para emparrillados excesivamente complicados, cuyo caso no esté incluido en las tablas dadas por Melan para su método, o en los que, por tener gran número de viguetas sea muy dudosa la determinación de los coeficientes de distribución transversal para el método de Leonhardt, el fotoelástico resultará, evidentemente, frente a aquéllos, de una rapidez, sencillez y economía muy superiores.

## § 22. Nuevas experiencias.

Conviene advertir, finalmente, que el objeto del presente ensayo fué, como ya se ha indicado repetidamente, tan sólo intentar aplicar la fotoelasticidad al estudio de emparrillados, creando las bases de un método experimental que, naturalmente, ha de ser modificado y completado con los resultados obtenidos de la experimentación; esto es: del cálculo y estudio fotoelástico de diferentes tipos reales de emparrillado. No se puede considerar, pues, el método como definitivamente establecido, y ya se han indicado en el curso del presente trabajo una serie de deficiencias, así como su posible eliminación.

El presente método es válido para emparrillados metálicos que, generalmente, requerirán el empleo de modelos articulados, y para emparrillados de hormigón armado con forjado independiente, que exigirán el empleo de modelos rígidos.

Pero también se presentan, a menudo, tableros de puentes de hormigón armado en el que los largueros, las viguetas y la losa superior forman una estructura continua. A este problema no se puede aplicar el actual método, puesto que para ello habría de prescindirse de la losa superior y sustituir las fuerzas soportadas por las distintas vigas, a consecuencia de la distribución continua de la losa, por fuerzas aisladas o continuas de valor difícilmente calculable.

Tampoco se podrá realizar el estudio de un modelo escalonado en el que, análogamente, largueros, viguetas y forjado, constituyan un todo continuo de material transparente, puesto que con ello se introducirían, evidentemente, profundas modificaciones en la distribución de esfuerzos.

Para este tipo de estructuras se ha de emplear, por lo tanto, un modelo transparente normal, que reproduzca exactamente la forma y dimensiones del tablero de puente a investigar. Ya se han indicado las dificultades experimentales con que se tropieza al

intentar estudiar cada una de las vigas por medio de la fotoelasticidad. Pero, en este caso particular, se puede obtener una idea clara y rápida de la distribución de esfuerzos en las vigas y en el forjado, siguiendo una idea totalmente diferente y original.

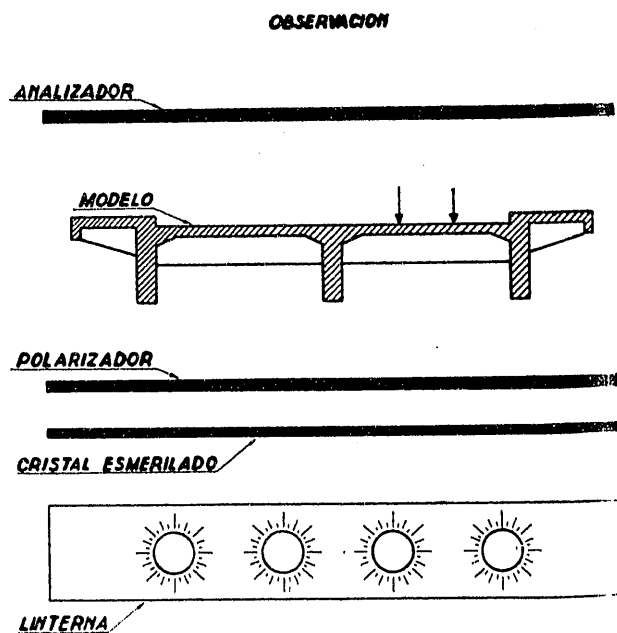


Figura 48.

Si la observación fotoelástica del modelo (fig. 48) se efectúa normalmente a la losa superior, esto es, en la misma dirección en que las fuerzas están aplicadas, no se advertirán los efectos de las flexiones que en cada punto sufre el forjado, puesto que se anularán las diferencias de marcha producidas a uno y otro lado del plano medio de la losa, por ser las tensiones, en cada dos puntos simétricos, iguales y de signo contrario. Tampoco influirán en el estudio fotoelástico los esfuerzos cortantes, correspondientes a estas flexiones, ya que, a consecuencia del carácter transversal de la vibración luminosa, solamente influyen las tensiones paralelas al plano medio de la losa, que actúan sobre elementos superficiales perpendiculares a él. Pero estos únicos esfuerzos observables son debidos a que la losa trabaja como cabeza de compresión (o de tracción en algunos puntos) de largueros y viguetas, en las zonas situadas a ambos lados del empostramiento entre las vigas y el forjado. Como dichos esfuerzos varían a lo largo del espesor de la losa, la observación fotoelástica nos permitirá conocer solamente sus valores medios. Por tanto, y salvo en las estrechas zonas sobre las que se proyectan las sombras de las vigas, se podrán determinar los esfuerzos medios en la cabeza de una viga cualquiera. A partir de

estas tensiones, y una vez calculado su momento de inercia, se puede fácilmente hallar el momento flector que dicha viga soporta.

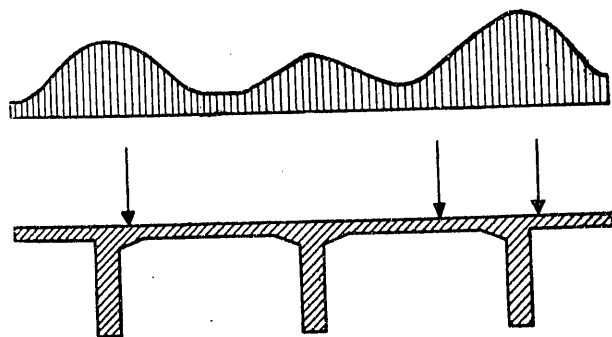


Figura 49.

En cada sección del tablero de puente se determinará, pues, la variación de los esfuerzos de compresión o de tracción, que será análoga a la de la figura 49. Los puntos de dicha curva, con tangente horizontal, son aquellos en que no se producen esfuerzos cortantes entre las dos partes por él separados. La sucesión, para las distintas secciones del emparillado, de estos puntos, determina líneas que separan dos cabezas de compresión consecutivas y por las cua-

la estructura, el mismo papel que la faja de losa y la viga a ella unida.

Finalmente, y como elemento de comprobación, se pueden determinar también los esfuerzos en la cabeza de tracción y en el alma de las vigas externas, utilizando el dispositivo indicado en la figura 50, donde solamente se precisa un espejo, sin que importe la polarización parcial que en él sufre la luz, porque el analizador se coloca de tal manera que complete esta polarización y el polarizador puede, independientemente, tomar un ángulo cualquiera. Esta determinación serviría no solamente como comprobación del método, sino, además, para facilitar el estudio más exacto de los dos largueros extremos que, muchas veces, son los más solicitados.

Quedan, pues, abiertos nuevos caminos para la investigación fotoelástica de este tipo de estructuras, como no podía menos de ocurrir, tratándose de una investigación sincera sobre un problema virgen desde este punto de vista.

A medida que las exigencias de los ingenieros vayan planteando, tanto en éste como en otros tipos de estructuras, problemas concretos a la investigación fotoelástica, y se estudien y resuelvan éstos, se irá modificando y perfeccionando la técnica utilizada en el Laboratorio Central para hacer cada vez más práctico y eficaz su empleo, especialmente en la resolución del problema, como el abordado en el presente

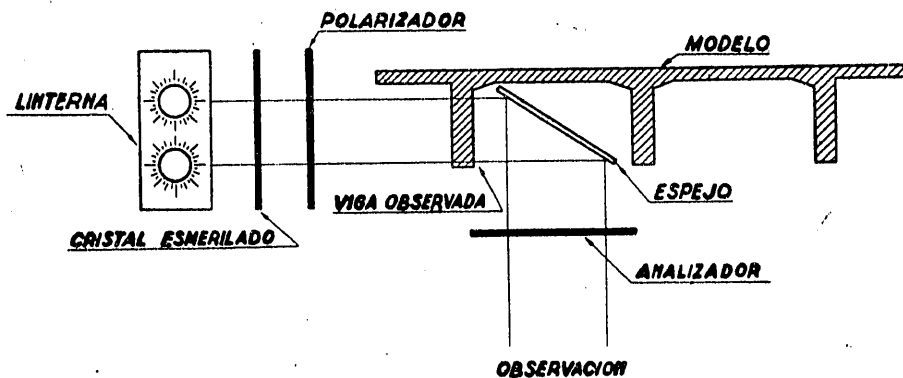


Figura 50.

les se podría cortar el forjado, sin que a estos efectos se perturbara el equilibrio de la estructura.

La existencia de una cierta zona en que la curva continúe siendo horizontal, corresponderá a una porción de forjado que no pertenece prácticamente a ninguna cabeza de compresión. Entonces, y de una manera inmediata, se podrá calcular la sección teórica equivalente, que en una viga aislada representaría, para

trabajo, de cálculo difícil, enojoso y, en muchos casos, de escasa aproximación.

Como ya se indicó al comienzo de este trabajo, el perfeccionamiento del método y su aplicación a estructuras complicadas, junto al estudio del problema elástico más general, en tres dimensiones y sometido a toda clase de esfuerzos, es nuestra meta más inmediata.