

ESTUDIO TEÓRICO Y FOTOELÁSTICO DE EMPARRILLADOS

Por E. TORROJA y L. VILLENA, del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales.

En el presente artículo resumen los autores el segundo método teórico de comprobación por ellos empleado y exponen las bases del procedimiento experimental que les ha permitido el estudio fotoelástico de emparrillados. El resumen comparativo de los datos obtenidos y las conclusiones finales serán objeto de otro artículo.

CAPÍTULO II

CÁLCULO SIMPLIFICADO (1)

§ 12. Coeficientes de distribución transversal.

Considérese un emparrillado con $m + 1$ largueros, y una sola vigueta interior, paralela a las líneas de apoyo de aquéllos y situada en su punto medio.

Análogamente a lo hecho en el capítulo anterior, se designan los largueros con $y = 0, 1, \dots, m$, no siendo, por el momento, necesario utilizar símbolo alguno para distinguir la única vigueta interior existente, a la que correspondería $x = 1$. Por tanto, no figurará el subíndice x en las distintas magnitudes.

Supóngase que los largueros tienen un momento de inercia, J , invariable con respecto a x e igual para todos ellos; que la vigueta tiene un momento de inercia, $\bar{J}$, invariable con respecto a y , y distinto, en general, de J , y que los largueros están situados, uno de otro, a la distancia invariable a , siendo la luz total l .

Si se aplica una carga $P_{\bar{y}}$ en el nudo correspondiente al larguero $\bar{y}$, la vigueta toma, en cada uno de los nudos, flechas iguales a las que en ellos adquieren los largueros respectivos y aparecen las reacciones de apoyo C_y . Para que la vigueta esté en equilibrio estático habrán de ser nulas las sumas de las fuerzas:

$$P_{\bar{y}} + C_0 + C_1 + \dots + C_m = 0, \quad [34]$$

y de los momentos:

$$y C_0 + (y - 1) C_1 + \dots + (y - \bar{y}) (C_{\bar{y}} - P_{\bar{y}}) + \dots + (y - m) C_m = 0. \quad [35]$$

Ahora bien: la ordenada en cada nudo de la deformada adoptada por la vigueta debe ser proporcional a la correspondiente reacción de apoyo C_y , pues

(1) Véanse los trabajos de F. Leonhardt, anteriormente citados.

to que las flechas de los largueros se deben exclusivamente a estas fuerzas. Por consiguiente, la deformada de la vigueta, dibujada en una escala conveniente, coincide con la línea de influencia correspondiente a la distribución transversal de la carga $P_{\bar{y}}$ entre los diferentes largueros, realizada por la vigueta. Pero en virtud del teorema de Maxwell, la ordenada $q_{\eta y}$ en el punto η de la deformada así obtenida (fig. 12) da,

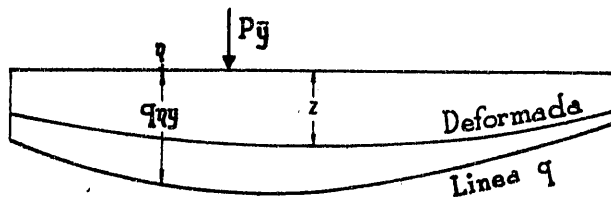


Figura 12.

recíprocamente, la carga parcial que el larguero y recibe de la vigueta a consecuencia de la carga $P_{\bar{y}}$ aplicada en la sección $\bar{y}$ de la misma:

$$C_{\eta} = q_{\eta y} P_{\bar{y}} \quad [36]$$

siempre que se verifiquen las condiciones [34] y [35].

Si se sustituyen, en la primera de ellas, los valores de las reacciones de apoyo dados por [36], se obtiene:

$$q_{0y} + q_{1y} + \dots + q_{my} = \sum q_{\bar{y}y} = 1; \quad [37]$$

es decir, la escala de las ordenadas q de la línea de influencia ha de ser elegida de tal manera que la suma de las que corresponden a todos los largueros sea igual a la unidad. Solamente considerando esta condición podremos obtener los valores absolutos de las ordenadas q . La ecuación [35] puede servirnos entonces como comprobación.

Así, pues, aplicando una fuerza $P_{\bar{y}}$ en el nudo $\bar{y}$ (figura 12), la vigueta adquiere una deformada que es proporcional a las ordenadas de la línea de influencia correspondiente a la carga transmitida por la vigueta

al larguero y , viniendo determinado el factor de escala por la condición [37]. Las ordenadas $q_{\bar{y}y}$ de esta línea se denominan coeficientes de distribución transversal y representan la parte de carga que recibe el larguero y a consecuencia de la carga $P_{\bar{y}} = 1$ aplicada en el larguero $\bar{y}$, o, de otra manera, la ordenada de la línea de influencia correspondiente a la distribución transversal en el larguero y bajo la acción de larguero $\bar{y}$.

Puesto que esta línea de influencia de la distribución transversal no depende de la cuantía de la carga, ni de la escala del modelo, ni de la magnitud de los momentos de inercia, podrá ser determinada para un tipo de emparrillados, siendo válida para todos los de luces semejantes.

llamada grado de rigidez, en el que

$$s = \frac{2a}{l}$$

representa la influencia de la forma geométrica, y

$$r = \frac{\bar{J}}{J}$$

introduce el influjo de la rigidez de la vigueta frente a las de los largueros. Leonhardt ha determinado las fórmulas que dan, en función de ψ , los valores de las q , para emparrillados de tres a ocho largueros.

Para cuatro largueros (caso estudiado), aplicando

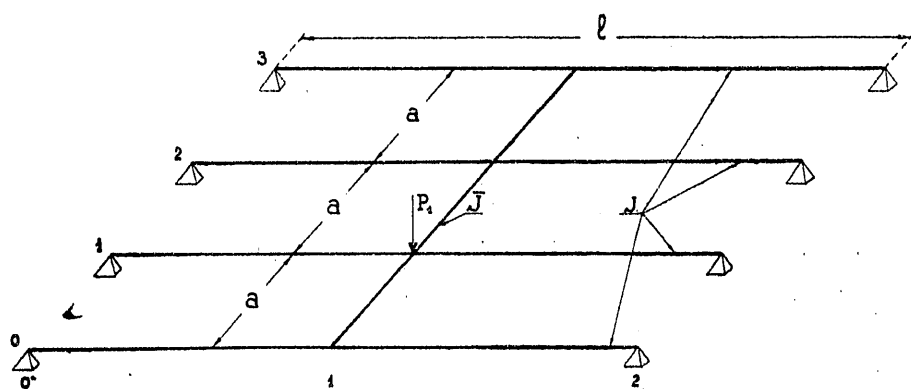


Figura 13.

§ 13. Cálculo de los coeficientes de distribución transversal.

Los coeficientes de distribución transversal se pueden determinar, para cada emparrillado, por diversos procedimientos analíticos, por ejemplo el de Ostfeld, ya citado, o utilizando modelos reducidos, como cociente de las flechas que cada nudo y toma, bajo una carga $P_{\bar{y}}$, en el emparrillado y en el sistema fundamental.

Pero para emparrillados con una sola vigueta pueden ser calculados numéricamente de una manera inmediata. Basta para ello plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio elástico, tomando como incógnitas las fuerzas de apoyo, C , creadas por una carga $P = 1$ que actúa sucesivamente sobre todos los nudos de una vigueta única situada en la mitad de la luz. Se ve entonces que estos coeficientes sólo dependen de la constante:

$$\psi = \frac{r}{s^3}, \quad [38]$$

una carga $P = 1$ en el nudo 1 (fig. 13), las condiciones de equilibrio estático, esto es, la anulación de la suma de momentos y de fuerzas, conducen a:

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 1;$$

$$3C_0 + 2C_1 + C_2 = 2.$$

Para hallar las cuatro reacciones de apoyo se precisan otras dos ecuaciones, que se pueden obtener igualando las flechas que la vigueta y los dos largueros toman en los nudos interiores (sólo en ellos dos, puesto que las flechas de la vigueta hay que referirlas a las de sus extremos). Así, en el nudo 1, la flecha en el larguero es:

$$s_1 = \frac{C_1 l^3}{48 EJ},$$

y en la vigueta (fig. 14):

$$s_1 = \frac{2}{3}s_0 + \frac{1}{3}s_3 + s'_1;$$

viniedo dada s'_1 por:

$$s'_1 = \frac{8(1 - C_1)a^3}{486 E \bar{J}} - \frac{7 C_2 a^3}{486 E \bar{J}};$$

en que el primer término es debido a la fuerza $P - C_1$ aplicada en el nudo 1, y el segundo, a $-C_2$ aplicada

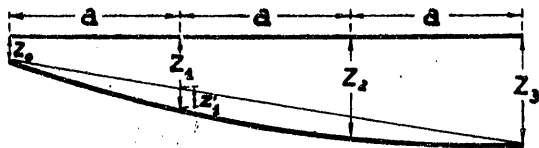


Figura 14.

en el 2. Sustituyendo y haciendo uso del coeficiente ψ , definido por [38], se obtiene:

$$54 C_0 \psi - (81 \psi + 8) C_1 - 7 C_2 + 27 C_3 \psi + 8 = 0.$$

Para el nudo 2 se obtiene, análogamente:

$$27 C_0 \psi - 7 C_1 - (81 \psi + 8) C_2 + 54 C_3 \psi + 7 = 0.$$

Se tienen ahora cuatro ecuaciones que permiten calcular los valores de las reacciones de apoyo, que por ser $P = 1$, coinciden con los coeficientes de distribución transversal. En el caso en que la carga $P = 1$ está aplicada en el nudo 0, se procede de una manera semejante.

Las expresiones así halladas son:

$$q_{00} = (15 + 52 \psi + 14 \psi^2) : D$$

$$q_{10} = (9 \psi + 8 \psi^2) : D$$

$$q_{20} = (-6 \psi + 2 \psi^2) : D$$

$$q_{30} = (\psi - 4 \psi^2) : D$$

$$q_{01} = (9 \psi + 8 \psi^2) : D$$

$$q_{11} = (15 + 32 \psi + 6 \psi^2) : D$$

$$q_{21} = (21 \psi + 4 \psi^2) : D$$

$$q_{31} = (-6 \psi + 2 \psi^2) : D$$

$$D = 15 + 56 \psi + 20 \psi^2.$$

En virtud de la simetría, los coeficientes relativos a las cargas P_2, P_3 serán iguales, respectivamente, a los que han sido hallados para las P_1, P_0 .

Como $q_{10} = q_{01}$, etc., se ha prescindido en lo que sigue de diferenciar el punto de aplicación de la carga del punto en estudio. Sólo se mantendrá esta diferenciación en los símbolos genéricos para evitar posibles confusiones.

Estos coeficientes solamente son válidos para emparrillados con una sola vigueta a la mitad de la luz de largueros. La presencia de un número mayor de viguetas hace que la distribución transversal sea más completa, aunque el efecto de las viguetas laterales es mucho menor que el producido por la central. Los coeficientes varían y su cálculo se complica mucho, puesto que las flechas en los nudos de una vigueta no dan idea correcta de las correspondientes reacciones de apoyo, por ser aquellas debidas también a las reacciones de apoyo de las otras viguetas, que solamente serían nulas cuando la vigueta considerada fuera rígida. Pero la acción del conjunto de todas las viguetas puede ser aproximadamente sustituida, para el cálculo de los coeficientes de q , por la distribución transversal que efectuaría una vigueta única con momento de inercia mayor αJ , que se imaginara situada en la mitad de la luz. Los valores de α han sido empíricamente determinados por Faltus para emparrillados cuyo grado de rigidez estaba comprendido entre $\psi = 5$ y $\psi = 20$. Para el caso de dos travesaños interiores, $\alpha = 1$ como término medio, por lo que se pueden utilizar en el cálculo del problema particular actual los valores de q anteriormente determinados.

§ 14. Fuerzas y momentos en los largueros.

Considérese, como anteriormente, un emparrillado con cuatro largueros y una sola vigueta normal a ellos y situada en el punto medio, sobre el que solamente actúa una fuerza aislada P_{ξ} en la sección ξ del larguero 1 (fig. 15). Si se supone que dicho larguero está rígidamente apoyado en el nudo, nacerá en éste la reacción de apoyo $-R_1$, mientras que los largueros externos permanecerán descargados. Para obtener ahora el estado verdadero del larguero elásticamente apoyado en el nudo, se ha de añadir una fuerza adicional R_1 igual y de sentido contrario a la reacción de apoyo. Ello origina las fuerzas de apoyo $C_0 = R_1 q_{01}$, en el nudo 0; $C_2 = R_1 q_{21}$, en el nudo 2; $C_3 = R_1 q_{31}$, en el nudo 3, y $R_1 q_{11}$, en el propio nudo 1, que se une a $-R_1$, dando como fuerza de apoyo total:

$$C_1 = -R_1 + R_1 q_{11} = -R_1 (1 - q_{11}).$$

Puesto que sobre la vigueta no hay aplicada fuerza alguna, para que exista el equilibrio en ella ha de verificarse:

$$R_1 q_{01} - R_1 (1 - q_{11}) + R_1 q_{21} + R_1 q_{31} = 0;$$

condición que se cumple siempre que sea cierta [37].

Para hallar ahora el momento M_{ξ} en la sección ξ del larguero 1, sobre el cual se supone está aplicada la carga P_{ξ} , imagínese de nuevo que dicho larguero

está rígidamente apoyado en el nudo, apareciendo entonces un momento $M'_{\xi\xi}$ producido por la fuerza P_{ξ} en la viga continua, de valor:

$$M'_{\xi\xi} = M^0_{\xi\xi} - \frac{R_1}{2} \xi; \quad [41]$$

en que $M^0_{\xi\xi}$ es el momento análogamente creado en el sistema fundamental. Considérese ahora el larguero formando parte del emparrillado y, por consiguiente, elásticamente apoyado en el nudo sobre la vigueta. Para llegar a su verdadero estado se debe añadir la reacción de apoyo $R_1 q_{11}$, hallada anteriormente, que

de apoyo $C_1 = R_0 q_{01}$, y el momento en la sección ξ de dicha viga será exclusivamente:

$$M_{\xi\xi} = \frac{R_0 q_{01}}{2} \xi.$$

Pero, para uniformidad y simplificación del cálculo, es conveniente expresar también este momento en función de M^0 y M' . De [41] se deduce, de manera análoga a [42]:

$$M_{\xi\xi} = q_{01} (M^0_{\xi\xi} - M'_{\xi\xi}),$$

o bien, siendo $q'_{01} = -q_{01}$:

$$M_{\xi\xi} = M^0_{\xi\xi} q_{01} + M'_{\xi\xi} q'_{01}.$$

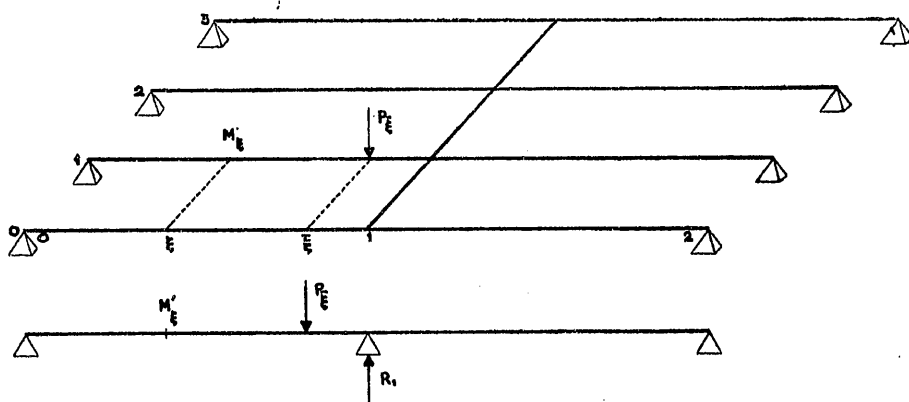


Figura 15.

produce en la sección ξ de la viga libre apoyada en los extremos, un momento:

$$M''_{\xi\xi} = \frac{R_1 q_{11}}{2} \xi$$

o, introduciendo el valor de $\frac{R_1}{2} \xi$ dado por la [41]:

$$M''_{\xi\xi} = q_{11} (M^0_{\xi\xi} - M'_{\xi\xi}). \quad [42]$$

El momento total será, pues, la suma de ambos:

$$M_{\xi\xi} = M'_{\xi\xi} + M''_{\xi\xi}$$

o, en virtud de [42]:

$$M_{\xi\xi} = M'_{\xi\xi} + q_{11} (M^0_{\xi\xi} - M'_{\xi\xi}) = M^0_{\xi\xi} q_{11} + M'_{\xi\xi} (1 - q_{11}).$$

Si la carga P_{ξ} está aplicada sobre un larguero distinto al que se estudia, por ejemplo, en la sección ξ del larguero 0, sobre la viga 1 sólo actuará la reacción

De una manera semejante se encontraría cuando la carga P_{ξ} estuviera aplicada en las secciones ξ de los largueros 2 ó 3:

$$M_{\xi\xi} = M^0_{\xi\xi} q_{21} + M'_{\xi\xi} q'_{21};$$

$$M_{\xi\xi} = M^0_{\xi\xi} q_{31} + M'_{\xi\xi} q'_{31};$$

siendo:

$$q'_{21} = -q_{21}; \quad q'_{31} = -q_{31}.$$

Todas estas fórmulas pueden resumirse, para el caso más general de una carga $P_{\xi\eta}$ aplicada en cualquier punto del emparrillado, en:

$$M_{\xi\eta} = M^0_{\xi\eta} q_{\eta y} + M'_{\xi\eta} q'_{\eta y}, \quad [43]$$

donde $M^0_{\xi\eta}$ es el momento creado por la fuerza P_{ξ} en la sección ξ del propio larguero apoyado en sus extremos, y $M'_{\xi\eta}$ el momento creado por P_{ξ} en la sec-

ción ξ del larguero considerado como viga continua rígidamente apoyada en el nudo. Los coeficientes q_y se determinan, como se indicó en el § 13, trazándose

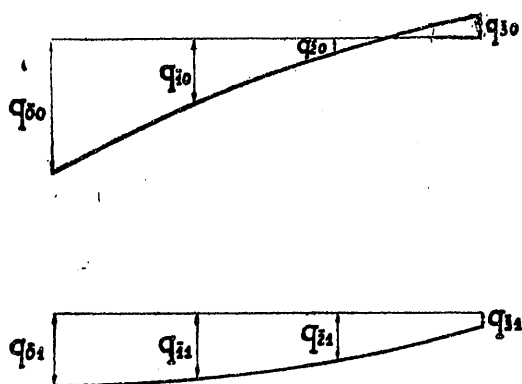


Figura 16.

la línea de distribución transversal que une, mediante una curva continua, todos ellos (fig. 16), y nos permite hallar cualquier ordenada intermedia q_{η} . Los q' se deducen de éstos sencillamente, puesto que $q' = 1 - q$ para el larguero sobre el que actúa la fuerza P_{ξ} , y $q' = -q$ para los demás largueros. La unión de éstos se hace entre sí por curvas continuas y con el $1 - q$ mediante rectas (fig. 17), suponiendo que las cargas aplicadas en las proximidades del larguero en estudio se distribuyen según la ley de la palanca entre él y sus inmediatos.

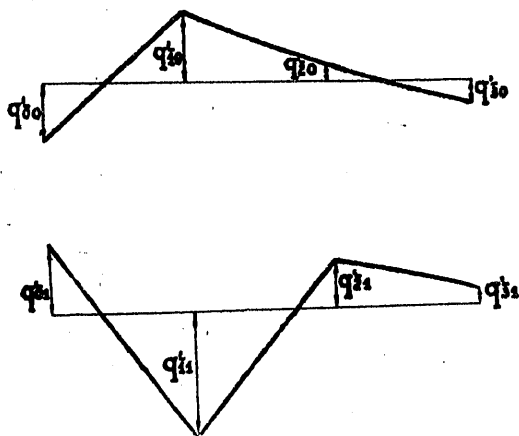


Figura 17.

De una manera análoga a lo hecho con los momentos, pueden determinarse los esfuerzos cortantes en una sección ξ de la viga y, creados por una fuerza arbitraria P_{ξ} por medio de:

$$Q_{\xi} = Q_{\xi 0} q_{\eta 0} + Q_{\xi 1} q'_{\eta 1} \quad (44)$$

La manera práctica de efectuar el cálculo es trazar la línea q , de la que se deduce inmediatamente la q' . Dibujando entonces las líneas de influencia para la sección ξ en estudio, correspondientes a los momentos flectores de la viga apoyada en sus extremos y en la viga continua rígidamente apoyada en el nudo (líneas que son las mismas para todos los largueros), podrán determinarse en virtud de [43] y [44], y de una manera muy sencilla, los momentos y fuerzas creados, por fuerzas aisladas o continuas, en la sección ξ de cada larguero.

Para el caso de emparrillados con más de una vigueta, es necesario, como se vió en el § 13, sustituir idealmente todas ellas por una sola con momento de inercia αJ situada en mitad de la luz. Como para el caso de dos viguetas α es igual a la unidad, siguen siendo válidos todos los razonamientos y fórmulas anteriormente deducidos.

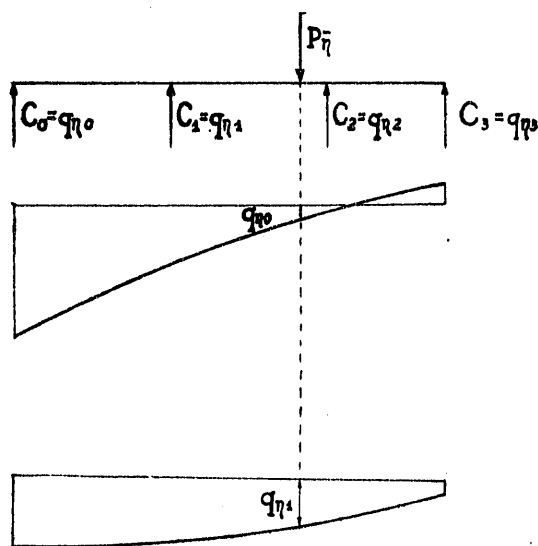


Figura 18.

§ 15. Fuerzas y momentos en las viguetas.

La determinación exacta de estas magnitudes solamente pueden hacerse cuando se trata de emparrillados con una sola vigueta. Por ser entonces conocidos los coeficientes de distribución transversal, se conocen también todas las fuerzas que actúan sobre ella, y se puede hallar el momento $\bar{M}_y$ en el nudo y sin más que multiplicar cada una de estas fuerzas, situadas sólo a la derecha o a la izquierda de y, por la distancia entre su punto de aplicación y el nudo. Así, por ejemplo (fig. 18), para un emparrillado con cuatro largueros y una fuerza aplicada sobre el nudo 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= -P_2 a + P_{q22} 2a + P_{q21} a = \\ &= P a [q_{21} + 2(q_{22} - 1)] \end{aligned}$$

Si la fuerza P_η hubiera estado aplicada en la sección η comprendida entre los nudos 1 y 2, se habrían hallado, mediante las líneas q , los valores de $q_{\eta 0} q_{\eta 1}$ y se tendría:

$$\overline{M}_0 = -P_\eta a + P q_{\eta 1} a = P a (q_{\eta 1} - \eta).$$

En cuanto a los esfuerzos cortantes, basta sumar todas las fuerzas que se encuentran a la izquierda del nudo, o las que quedan a la derecha, cambiados de signo. Así, en los dos casos antes mencionados, se tendría:

$$Q_0 = -P q_{23} + P - P q_{22} - P q_{21};$$

$$Q_0 = -P q_{\eta 3} - P q_{\eta 2} + P - P q_{\eta 1}.$$

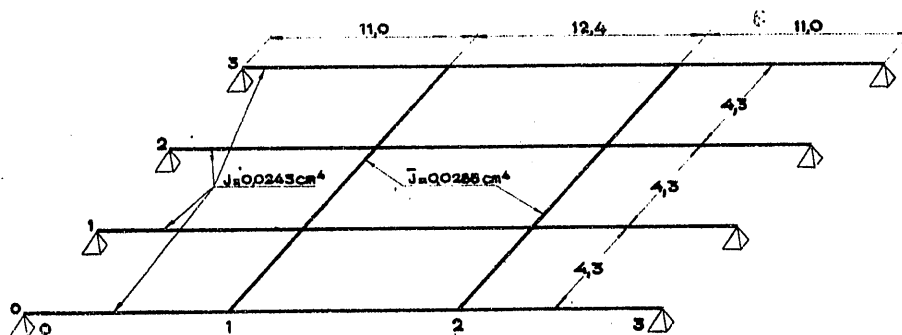


Figura 19.

En el caso de existir dos viguetas bastante rígidas, pueden hallarse, según Leonhardt, valores aproximados para las fuerzas y momentos en una de ellas, sin más que dibujar la línea de influencia que le corresponde, prescindiendo de la otra y de la parte de empujamiento que hay más allá de ella. Los valores dados por esta línea, en una extensión de 0,6 veces la separación entre las viguetas, contada a ambos lados de la vigueta en estudio, son muy aproximados a los reales. Cuando las viguetas son muy elásticas o el empujamiento es muy ancho con relación a la longitud de los largueros, los valores así hallados son superiores a los reales.

Otra manera de proceder, más corta y eficaz, que da los momentos flectores en todas las viguetas y que ha sido empleada en el ejemplo resuelto en el párrafo siguiente, consiste en calcular por medio de [44] los esfuerzos cortantes en todos los nudos, deducir de ellos los valores de las correspondientes reacciones de apoyos (iguales a los incrementos o saltos de los esfuerzos cortantes), conocidas las cuales se pueden calcular sencillamente los momentos flectores multiplicando cada fuerza por su distancia al punto en estudio, según se ha dicho anteriormente.

§ 16. Resolución numérica del empujamiento en estudio $m = 3, n = 3$.

Poniendo en la expresión [38] los datos numéricos relativos al empujamiento en estudio (fig. 19), se obtiene como valor del grado de rigidez:

$$\psi = 75,264;$$

que, introducido en las expresiones de los coeficientes de distribución transversal [39] y [40], da:

$$\begin{aligned} q_{00} = q_{33} &= 0,7082 & q_{01} = q_{32} &= 0,3913 \\ q_{10} = q_{23} &= 0,3913 & q_{11} = q_{22} &= 0,3098 \\ q_{20} = q_{13} &= 0,0925 & q_{21} = q_{12} &= 0,2063 \\ q_{30} = q_{03} &= -0,1921 & q_{31} = q_{02} &= 0,0925 \\ \Sigma q &= 0,9999 & \Sigma q &= 0,9999 \end{aligned}$$

Para cargas aplicadas en el nudo 1 de cualquier larguero, se tiene:

$$\begin{aligned} M_1^0 &= 7,4826 & M_2^0 &= 3,5170 \\ M_1' &= 0 & M_2' &= 0 \end{aligned}$$

y para cargas aplicadas en el punto $1\frac{1}{2}$ de cualquier larguero, se tiene:

$$\begin{aligned} M_1^0 &= 5,5000 & M_{1\frac{1}{2}}^0 &= 8,6000 \\ M_1' &= -0,9740 & M_{1\frac{1}{2}}' &= 2,1265 \end{aligned}$$

Introduciendo en la fórmula [43] todos estos valores, se obtienen los momentos flectores de los largueros, reflejados en los siguientes cuadros. Los momentos flectores de las viguetas se han calculado a partir de [44], como se indica al final del § 15.

Carga unidad aplicada en el nudo 1,0.

Sección	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3
Momento en el larguero.	5,299	2,928	0,692	-1,437	2,491	1,376	0,325	-0,676
Momento en la vigueta.	0	-1,255	-0,826	0	0	0	0	0

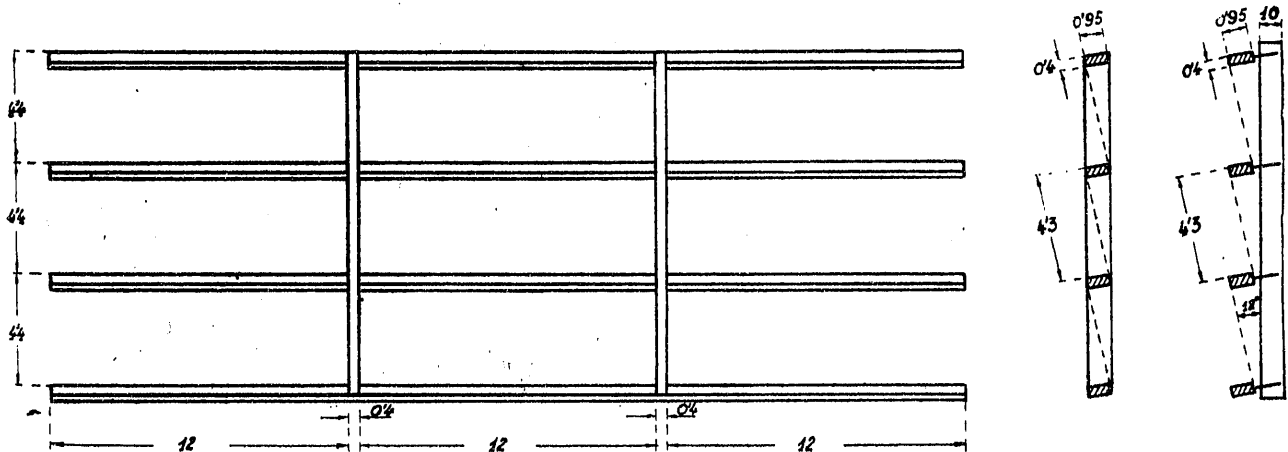


Figura 20.

Carga unidad aplicada en el nudo 1,1.

Sección.	1,0	1,1	1,2	1,2	2,0	2,1	2,2	2,3
Momento en el larguero.	2,928	2,318	1,544	0,692	1,376	1,089	0,726	0,325
Momento en la vigueta.	0	1,683	0,397	0	0	0	0	0

Carga unidad aplicada en el punto $1 \frac{1}{2}, 0$.

Sección.	1,0 2,0	1,1 2,1	1,2 2,2	1,3 2,3	$1 \frac{1}{2}, 0$
Momento en el larguero.	3,611	2,533	0,599	1,244	6,7111
Momento en la vigueta.	0	-0,738	-0,486	0	0

Carga unidad aplicada en el punto $1 \frac{1}{2}, 1$.

Sección.	1,0 2,0	1,1 2,1	1,2 2,2	1,3 2,3	$1 \frac{1}{2}, 1$
Momento en el larguero.	2,901	1,032	1,336	0,599	4,132
Momento en la viga.	0	0,990	0,234	0	0

A partir de estos valores se pueden calcular los momentos en todos los casos de carga considerados, cuyos valores se darán en el resumen comparativo, juntamente con los proporcionados por los otros procedimientos.

CAPÍTULO III

MÉTODO FOTOELÁSTICO

§ 17. Fundamentos.

La idea original que nos sugirió el profesor Föppl y que permite aplicar la Fotoelasticidad al estudio de emparrillados se basa en la hipótesis, que ha sido comprobada *a posteriori*, de que la distribución de momentos flectores no varía al sustituir el emparrillado ordinario, cuyas vigas están todas situadas en un mismo plano horizontal, por otro escalonado de tal manera que, conservándose las proyecciones horizontales de las luces y las secciones normales de cada viga,

las de un sistema permanezcan horizontales y ocupen alturas escalonadas, mientras las del otro queden inclinadas con respecto al plano horizontal.

Por tanto, el estudio fotoelástico ha de efectuarse sobre un modelo confeccionado con un material transparente y que, bajo la acción de cargas, se torne birrefringente, en el cual el escalonamiento de las vigas de un sistema (largueros o viguetas) permita observar todas ellas simultáneamente en dirección horizontal. Siempre se procurará que el ángulo en que ha sido inclinado el conjunto del emparrillado sea el menor posible.

En cuanto a la forma que deba adoptarse para la sección de las vigas en el modelo, se debe sustituir la sección en **I** de la viga real por una sección cuadrada cuyo momento de inercia sea equivalente. En general, este momento de inercia puede variar de unas a otras vigas y aun a lo largo de una sola, pero ésta ha de mantenerse siempre con un espesor constante, variándose solamente su canto. La escala de reducción de dimensiones, γ , puede, por lo demás, ser arbitrariamente elegida. Sólo en el caso de que en la estructura in-

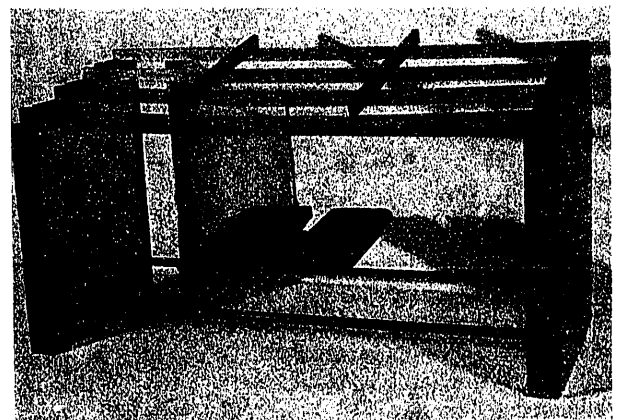


Figura 21.

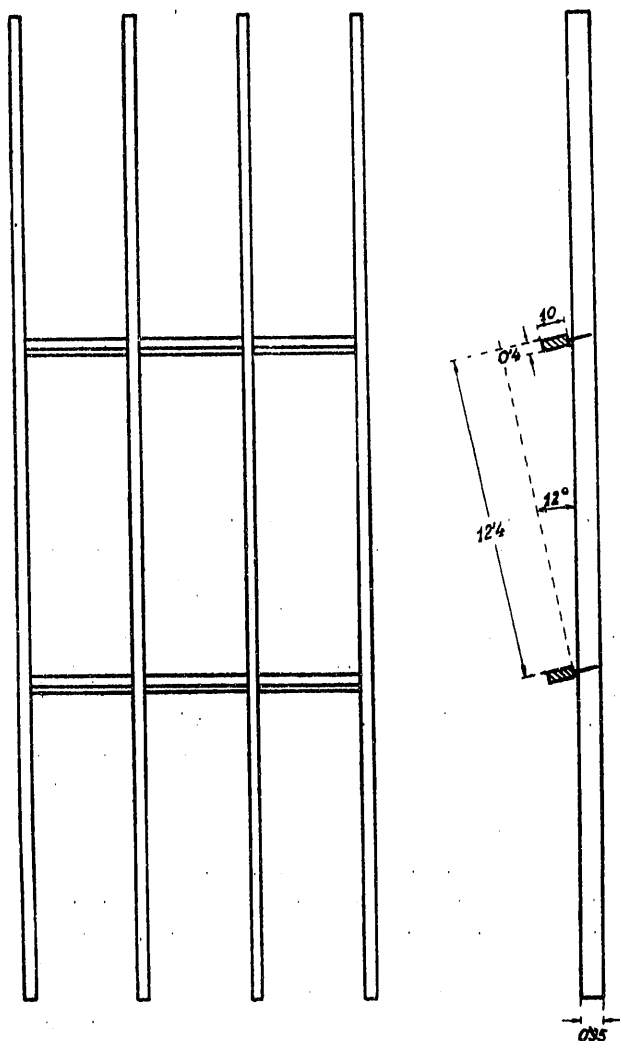


Figura 22.

tervengan diversos tipos de material constructivo con módulos de elasticidad diferentes, y debido a su carácter hiperestático, habrá que cuidar que para todo el emparrillado sea constante la relación:

$$\frac{ES}{E'S'};$$

en donde E y S son, respectivamente, el módulo de elasticidad y la sección en un punto de la construcción, y E' y S' las mismas magnitudes en el punto correspondiente en el modelo. La escala de reducción de fuerzas, ρ , se elige también arbitrariamente, pero de tal manera que las deformaciones producidas sean pequeñas y se mantengan siempre dentro del límite de fluencia.

El paso de las tensiones σ_0 , obtenidas fotoelásti-

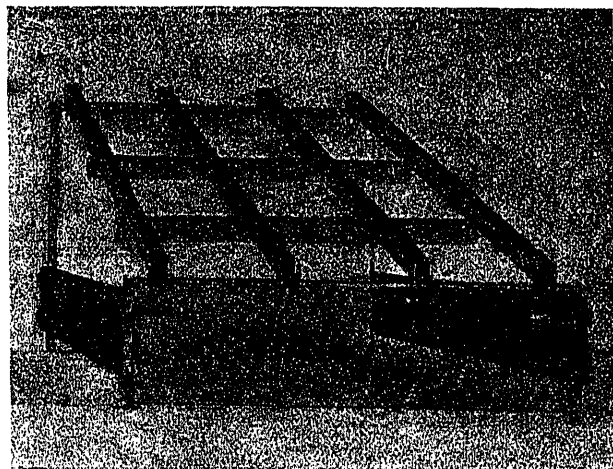


Figura 23.

camente, a las tensiones σ en la construcción real se hace sencillamente por:

$$\sigma = \frac{\rho}{\gamma^2} \sigma_0.$$

El estudio completo de cada emparrillado requiere el examen de dos modelos: uno que permite observar la distribución de tensiones en las vigas longitudinales, en el que los largueros permanecen horizontales y quedan escalonados a alturas diferentes, mientras que las viguetas están inclinadas (figs. 20 y 21); otro que permite observar la distribución de tensiones en las vigas transversales, en el que las viguetas están horizontales y escalonadas a alturas diferentes y los largueros pasan a ser inclinados (figs. 22 y 23).

Existe una nueva circunstancia que ha aconsejado duplicar el número de modelos a estudiar. Puesto que en las construcciones las uniones entre viguetas y

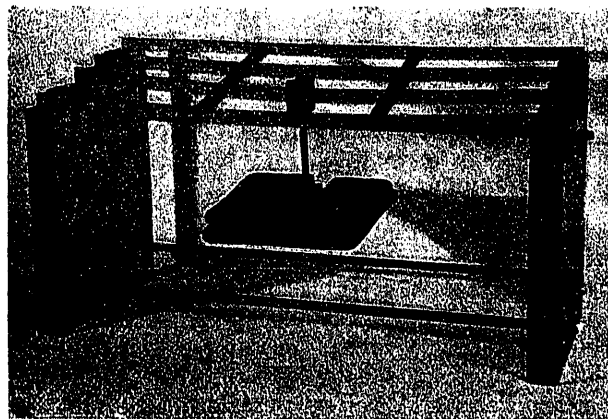


Figura 24.

largueros son ordinariamente por empotramiento, parece plausible investigar un primer tipo de modelos con uniones rígidas, es decir, ejecutados en una sola pieza (fig. 24). Este tipo, además de reproducir fielmente la realidad tiene la ventaja de no presentar duda alguna sobre una rigurosa transmisión de cargas en los nudos, aunque deja la incertidumbre de si, a causa de la inclinación que uno de los sistemas de vigas presenta, aparecerán giros por torsión suficientemente grandes para perturbar el estudio fotoelástico. Desde el punto de vista práctico, de ejecución, exige poder trabajar las planchas de material transparente, tanto en el serrado cuanto en el fresado y limado, bajo un ángulo determinado, siendo algo complicada su confección.

Pero, el hecho de que, a veces, en los emparrillados metálicos reales sean articuladas las uniones entre largueros y viguetas, sugiere la idea de investigar un segundo tipo de modelos en que las vigas sean independientes entre sí y estén unidas mediante rótulas (figura 21). En él todos los largueros estarán, pues, por

punto que es preciso cuidar es el referente a la elección del tipo de rótula. Tras de distintos ensayos se empleó, por su eficacia y sencillez, la representada en la figura 25, que consta de una pequeña punta de acero incrustada en la viga inclinada (la no observada)

CORTE POR LA RÓTULA

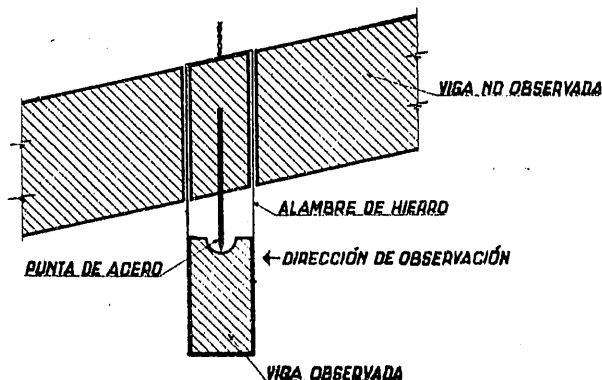
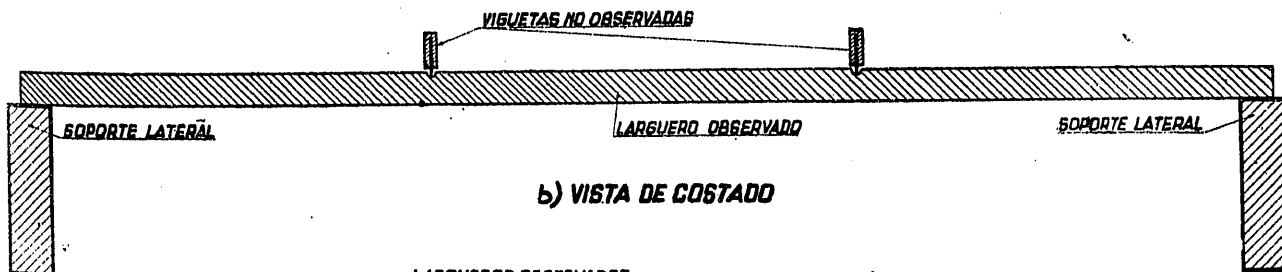


Figura 25.

a) CORTE TRANSVERSAL



b) VISTA DE COSTADO

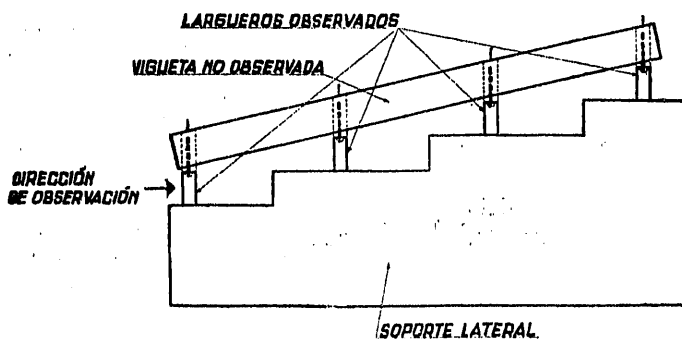


Figura 26.

debajo de las viguetas. Este segundo tipo garantiza la inexistencia de momentos de torsión y de deformaciones de giro, pero deja la duda de si en algún nudo podrá existir una transmisión defectuosa de esfuerzos. Su construcción es mucho más fácil que la del anterior, puesto que cada elemento es cortado y terminado independientemente de los demás. El único

y que se apoya en una concavidad semiesférica de 2 mm. de diámetro excavada en la viga horizontal (la observada). Un alambre o estribo que pasa por dos taladros abiertos a ambos lados de la punta de acero, en la viga no observada, une las dos vigas mediante una ligera presión que no llega a producir efectos fotoelásticos.

Todos los modelos han de ser colocados, para su puesta en carga y examen fotoelástico, sobre marcos especiales. Para la investigación de largueros se utilizó el representado en la figura 26, consistente en dos gruesas chapas de bakelita (podrían haber sido de cualquier otro material), terminadas en su parte superior por un perfil escalonado, tal que el emparrillado, al descansar sobre el marco, quede en la posición correcta; esto es: de tal manera que las superficies laterales de los largueros sean verticales.

Para la investigación de las viguetas se utilizó un segundo bastidor, representado en la figura 27, que consta de dos gruesas chapas de plexiglás (elegido por su perfecta transparencia y su débil efecto fotoelás-

o con una uña de alambre, que en los modelos articulados tiene además la ventaja de mantener la viga vertical e impedir que vuelque por efecto de la carga.

§ 18. Determinación fotoelástica de momentos flectores.

Tanto en los emparrillados como en otras muchas estructuras, que se hallan sometidas a esfuerzo de flexión, interesa conocer, casi exclusivamente, la distribución de momentos flectores, y, en todo caso, la de esfuerzos cortantes, fácilmente deducible de aquélla.

Suponiendo cumplidas las hipótesis de Saint-Ve-

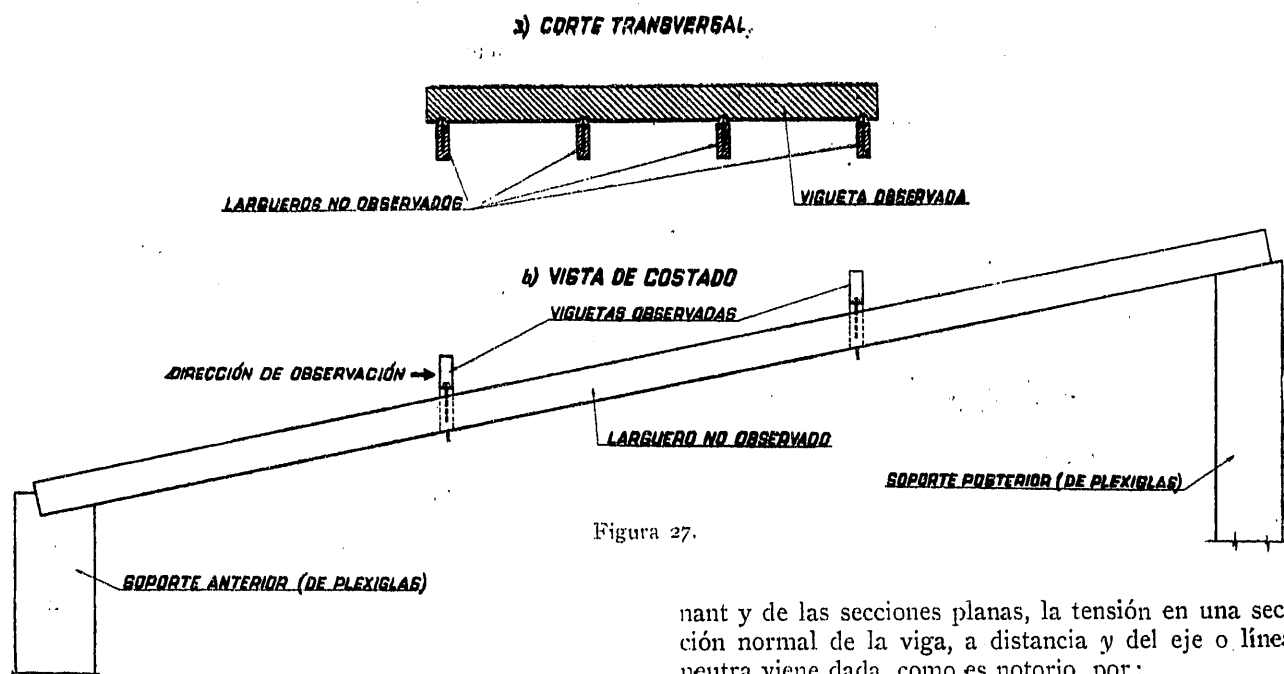


Figura 27.

tico, ya que la observación ha de hacerse a su través), la posterior más alta que la anterior, y tallada su parte superior de tal manera que, al colocar el modelo sobre ellas, no resbale y quede en la posición correcta, con las superficies laterales de las viguetas en posición vertical.

Respecto a la aplicación de cargas, puede emplearse cualquier sistema: resortes, palancas, etc., pero se recomienda el empleo de pesos porque garantizan la constancia de la fuerza aplicada, cualesquiera que sean las deformaciones adoptadas por el emparrillado. Como el orden de magnitud de las cargas debe ser pequeño, no existe mayor complicación en ello y solamente hay que procurar que la aplicación se efectúe uniformemente a lo largo de todo el espesor y sobre una línea normal al eje principal de la viga, lo que se consigue, por ejemplo, mediante un apoyo cilíndrico,

nant y de las secciones planas, la tensión en una sección normal de la viga, a distancia y del eje o línea neutra viene dada, como es notorio, por:

$$\sigma = \frac{12 M}{h^3 c} y = \frac{M}{I} y;$$

en que M representa el momento flector en dicha sección; I , el momento de inercia; c , el espesor, y h , el canto. En particular para el borde, $y = v$, se tiene:

$$M = \frac{I \sigma}{v}; \quad [45]$$

donde σ es la tensión en el borde, tangente a la superficie, y v el semicanto de la pieza. A lo largo de toda la fibra extrema, y salvo en las zonas de aplicación de las cargas o en aquellos puntos en que se produzcan reacciones de apoyo, es nula una de las tensiones principales, por lo que el centro del círculo Mohr coincide con el origen de coordenadas, y, como se ve inmediatamente,

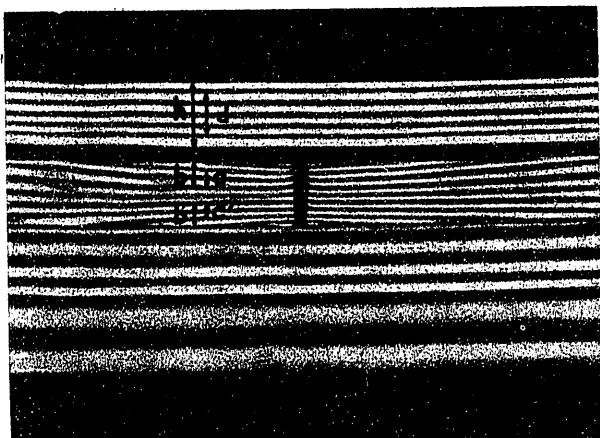


Figura 28.

te, el valor absoluto de la única tensión existente es el doble de la tensión tangencial máxima:

$$\sigma = 2 \tau_{\text{máx.}}$$

Ahora bien: el examen fotoelástico ordinario permite, por medio de la red de isocromas o líneas de nivel, hallar inmediatamente el valor de la tensión tangencial máxima en la fibra extrema de una sección sin más que determinar el orden de extinción o de isocroma, k , que corresponde a dicha fibra extrema y multiplicarle por el valor; para el material en cuestión, de $\Delta \tau_{\text{máx.}}$, incremento, experimentalmente determinado, que la tensión tangencial máxima sufre al pasar de una isocroma a la consecutiva de orden inferior o superior (1). Así, pues,

$$\tau = k \Delta \tau_{\text{máx.}}$$

En el caso de flexión pura la tensión tangencial máxima se anula en el eje de la barra o línea neutra, siendo lineal su variación a lo largo del canto. Para obtener el orden de la isocroma en este caso no hay, pues, más que medir el canto, h , de la imagen de la viga y la separación, d , entre dos isocromas de un orden cualquiera, n , cuanto más alto, mayor precisión (figura 28, en que $n = 2$), situadas a uno y otro lado de la línea central o neutra. Esto puede hacerse directamente en la placa fotográfica con un comparador graduado en micras, o sobre una pantalla, en la que se proyecta ésta, con una escala graduada en milímetros. Basta después dividir la primera cantidad por la segunda y multiplicar el cociente por el orden n del par de isocromas consideradas:

$$k = \frac{h}{d} n.$$

(1) Véase, por ejemplo, la ya citada obra *Fotoelasticidad*, páginas 116-124.

El resultado se puede obtener fácilmente en décimas y, afinando los procedimientos de medida, en centésimas, lo cual, como veremos más adelante, es más que suficiente para la precisión exigible al método fotoelástico.

En el caso en que, junto a los momentos flectores, M , aparezcan esfuerzos cortantes, Q , no es teóricamente posible seguir este camino, puesto que la línea media ya no es rigurosamente la línea neutra o isocroma de orden cero, porque en ella ya no es nula la tensión tangencial máxima. En estos casos, aun siendo nulas las dos tensiones σ_x , σ_y a lo largo de esa línea neutra, la tensión tangencial máxima toma el valor:

$$\tau_{\text{máx.}} = Q \cdot \frac{3}{2 c v}$$

y su variación a lo largo del canto no es lineal, sino parabólica; no se puede, por tanto, utilizar la fórmula [45]. Sin embargo, en la mayor parte de los emparrillados empleados, por ser muy grande la luz de la viga comparativamente a su canto, la variación de la tensión tangencial máxima, puede considerarse lineal en todo él, con excepción de una pequeñísima zona en las inmediaciones de la línea central (fig. 29), puesto que los valores de los esfuerzos cortantes son, frente a los de los momentos flectores, tan pequeños, que se puede prescindir de su existencia sin alterar sensiblemente el resultado. Para valores $Q = \frac{1}{10} \frac{M}{v}$, superiores a todos los que se presentan en el caso particular de emparrillado estudiado, el error cometido, al de-

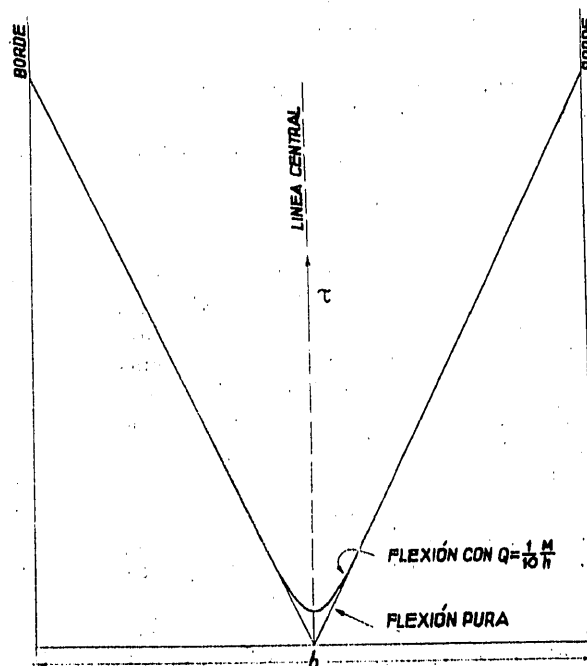


Figura 29.

terminar k por el procedimiento antes indicado, es inferior al 5 por 100.

Pero evitar tales errores no implica una gran complicación. Se mide a uno y otro lado de la línea neutra las distancias, b , b' , entre la isocroma de orden 1 y el borde, y las c , c' , entre esta misma isocroma y otra de orden n cualquiera (fig. 28, en que $n = 3$). Basta después dividir la suma de las primeras cantidades por la suma de las otras dos, multiplicar el cociente por la diferencia de órdenes entre las isocromas consideradas y añadir una unidad a este número:

$$k = 1 + \frac{b + b'}{c + c'} (n - 1).$$

Esta operación se efectúa en todas aquellas secciones en que, por presentar la isocroma un color grisáceo, en lugar del negro profundo característico (1), se sospeche la existencia de un valor apreciable de O .

Una vez determinado el orden de extinción k , se obtendrá el momento flector en cada sección por:

$$M = \frac{2 I \Delta \tau_{\text{máx.}}}{\nu} k;$$

que se deduce introduciendo las expresiones [46] y [47] en la fórmula [45].

Cuando no sea previamente conocido el valor de $\Delta \tau_{\text{máx.}}$, pueden hallarse los momentos flectores de una manera más directa y cómoda sin necesidad de determinar dicho incremento. En efecto: sometiendo a una probeta del mismo material y de análogo espesor al adoptado para largueros o viguetas, a un par de fuerzas que produzcan un estado de flexión pura, se logrará una distribución constante en toda la probeta del momento flector, M_p , al que corresponderá un orden de extinción en el borde k_p , determinado como anteriormente se indicó. Los momentos en el modelo de emparrillado se obtienen, entonces, sencillamente por:

$$M = \frac{M_p}{k_p} k.$$

Puesto que el esfuerzo constante es la derivada del momento flector, se puede determinar éste geométrica o numéricamente y de una manera inmediata, máxime cuando, por tratarse de cargas concentradas, los momentos flectores varían linealmente.

Ninguno de los procedimientos para la determinación de momentos flectores que acabamos de describir sirve para las secciones que están muy próximas a los apoyos ni para aquellas otras que soporten muy débiles momentos flectores, puesto que en ellas no aparece más isocroma que la de orden cero, es decir,

(1) Al no ser exactamente isocroma de orden 0, le corresponde, en lugar de una extinción completa, un tono grisáceo correspondiente al orden de interferencia fraccionario que en realidad representa tal línea.

porque la tensión tangencial máxima no llega a alcanzar en ningún punto de la sección el valor $\Delta \tau_{\text{máx.}}$. Pero puesto que el valor de $\tau_{\text{máx.}}$ influye no sólo en la separación de las líneas de extinción sino también en su anchura, se puede aprovechar esta circunstancia para determinar los momentos flectores.

Ahora bien: la distancia entre dos líneas de extinción es independiente del ennegrecimiento adquirido por la placa fotográfica; esto es, de la potencia lumínica empleada, del tiempo de exposición transcurrido y de las condiciones en que se efectuó el revelado. Por ello es posible determinar $\Delta \tau_{\text{máx.}}$ en un cliché obtenido bajo condiciones cualesquiera y emplearle para determinar $\tau_{\text{máx.}}$ en cualquier otro. Por el contrario, la anchura de una línea de extinción depende notablemente de dicho grado de ennegrecimiento, puesto que la transición de claro a oscuro es paulatina. En estos casos se hace, pues, preciso determinar específicamente para cada fotografía la correspondencia entre anchuras de la línea neutra y momentos flectores en la sección.

Para ello se toma como límite entre negro y blanco un tono de gris bien definido, dado, por ejemplo, por una cuña gris, de las empleadas en fotometría. Se mide entonces la anchura de la isocroma de orden cero en varias secciones de las que se hayan determinado los momentos flectores y se halla la relación media existente entre aquella y éstos, factor que se puede emplear para toda la placa fotográfica. La precisión de esta determinación es algo inferior a la que se obtuvo para k , pero ello no tiene gran importancia, pues de ordinario sólo se presenta este caso en secciones cercanas a los apoyos, en que el momento flector varía linealmente entre un valor nulo en el apoyo y otro valor bien conocido en el próximo nudo.

§ 19. Realización experimental.

Los modelos fueron ejecutados con chapas de 1 centímetro de espesor, de la resina artificial denominada "Decorit" que fabrica la casa Dr. F. Rasdrig, Ludwigshafen a. Rhein, perfectamente transparente e incolora y de una gran sensibilidad fotoelástica. A fin de conseguir una mayor rigidez, es decir, un módulo de elasticidad más elevado, a la par que una constante fotoelástica superior, se recoció el material fotoelástico durante siete horas a 110° C., introducido en cámara de presión a dos atmósferas, verificándose el enfriamiento lentamente durante ocho horas para impedir la aparición de tensiones internas.

El tipo de emparrillado definitivamente elegido para ensayar el método fué el ya visto anteriormente (figura 30), de cuatro largueros y dos viguetas simétricamente situadas. Como en el método rígido de una sola pieza, debió utilizarse para canto de las viguetas el propio espesor de la placa, 0,95 cm., mientras que.

a consecuencia del corte en ángulo, resultó un canto más pequeño para los largueros, 0,90 cm., el modelo resultaba tener mayor momento de inercia en las viguetas que en los largueros para igual espesor en unas y otras, en contra de lo que ocurre realmente. Empleando chapás de más espesor y aun con éste mismo,

utilizar un aparato fotoelástico provisto de grandes filtros polarizadores, se pudo prescindir de un pulido fino en las superficies del modelo (1) que, aparte del trabajo requerido, podía llevar implícita la aparición de tensiones internas, bien por el calentamiento local producido por el roce, bien por la evaporación superfi-

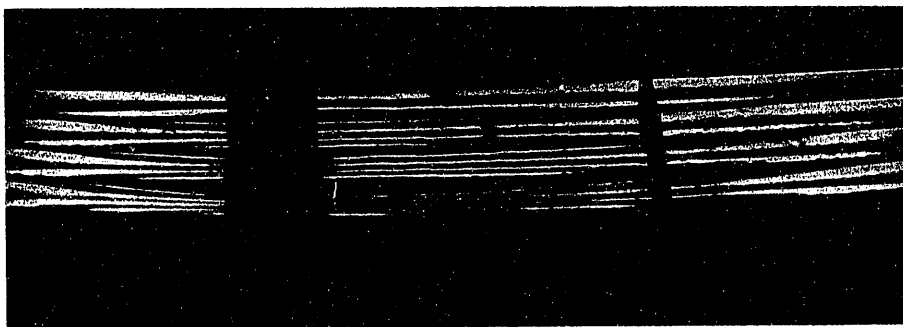


Figura 30.

siempre que se hubiese reducido el espesor de las viguetas, se puede reproducir exactamente la rigidez recíproca de unos y otras. Como en nuestro caso solamente se trataba de ver la posibilidad de aplicación del método, se prescindió de este detalle, que habría obligado a emplear viguetas muy delgadas, y se dió a largueros y viguetas el mismo espesor de 0,4 cm.

cial de los solventes, durante largo tiempo de trabajo. Ajustándose a todas estas circunstancias, el modelo rígido pudo ser construido en sólo cuatro horas, tiempo insuficiente para la modificación de las características de la decorita. El modelo articulado se confeccionó siguiendo normas por entero análogas, pero sólo exigió un trabajo de dos horas.

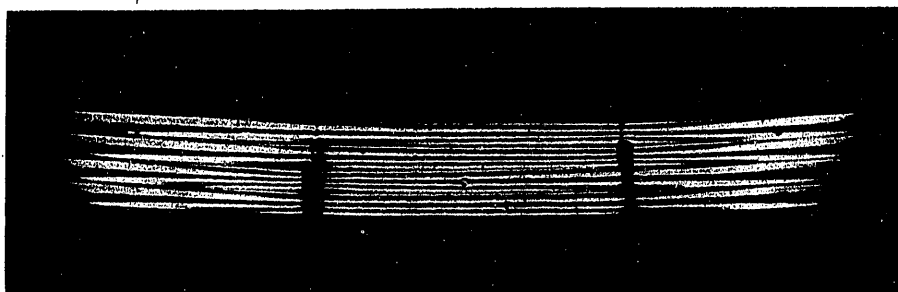


Figura 31.

El ángulo de corte elegido para la confección de los modelos fué de 12° , que es el que se precisa exactamente para construir el modelo en estudio de tal manera que la cara superior de cada larguero esté un poco por debajo de la superficie inferior del consecutivo (fig. 20). Los modelos dedicados a la investigación de viguetas fueron cortados bajo un mismo ángulo, para unificar más el ensayo. Gracias al hecho de

Colocados los modelos en sus respectivos soportes y aplicada la carga o cargas que en cada caso se tra-

(1) Al emplear luz paralela, cualquier imperfección en la superficie, insuficientemente pulida, se traduce en sombras o rayas negras, pues el rayo sale en dirección diferente de la de observación. Con luz en todas direcciones esto no ocurre, pues siempre incidirá algún rayo con una inclinación tal que llegue al punto de observación.

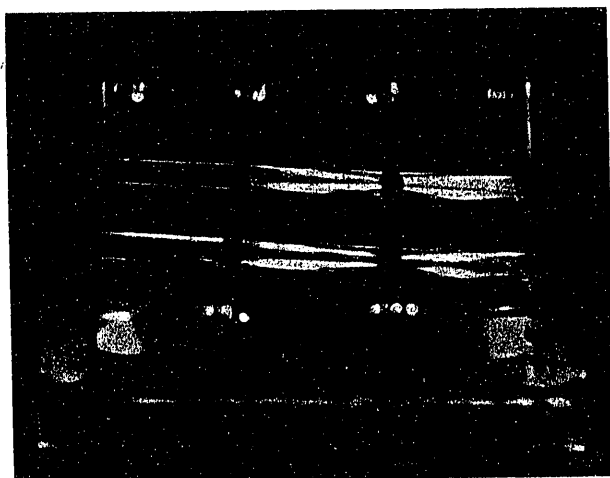


Figura 32.

taba de investigar, se dejaron transcurrir cinco minutos hasta el momento de la observación fotoelástica, al objeto de garantizar una perfecta uniformidad en todos los casos examinados, salvando los posibles efectos de deformación lenta y la consiguiente reactividad del material (1).

De cada tipo de carga se obtuvo entonces una fotografía en placa pancromática, utilizando luz amarilla de spl. En la figura 30 puede verse una de las fotos correspondientes a la investigación de largueros en modelo rígido, observándose los cuatro largueros iluminados y cubiertos de isocromas, así como las sombras de las dos viguetas, la de la izquierda cubierta por los dispositivos de aplicación de cargas. La figura 31 reproduce un caso, de carga diferente, estudiado en modelo articulado, en donde han desaparecido las imágenes oscuras de las viguetas, por estar debajo de los largueros, y sólo se aprecian las sombras de los dos ganchos correspondientes a las cargas aplicadas, sistema que fué utilizado con este tipo de modelo para evitar las grandes sombras antes observadas. Finalmente, la figura 32 muestra el resultado de la investigación de viguetas en modelo articulado, pudiendo apreciarse las sombras producidas por los cuatro largueros y el gancho de la carga aplicada.

A partir de las imágenes así obtenidas, se efectuó una primera medición muy exacta, pero extremada-

(1) Falta de proporcionalidad entre la birrefringencia y las tensiones o variación de la sensibilidad fotoelástica, que aumenta con el tiempo, debido a fenómenos plásticos.

mente laboriosa, sobre las propias placas fotográficas, utilizando un comparador de la casa "Adam Hilger, Ltd.", graduado en micras, con el que se precisaban cuatro lecturas para determinar k por el primer procedimiento mencionado en el § 18, y seis para el segundo procedimiento, allí mismo citado.

Los resultados deducidos de estas lecturas indicaron que el método no permite afinar, en la determinación de k , más allá de las centésimas. Este límite de aproximación impuesto por las condiciones experimentales aconsejó emplear un procedimiento de medida más cómodo y rápido. En vista de ello, se proyectaron las placas fotográficas sobre una pantalla de 2×4 metros, pudiendo entonces medirse directamente las distancias con una escala dividida en milímetros, que proporcionaba el suficiente grado de exactitud para poder asegurar las centésimas en la determinación de k .

Aunque este por ciento de error es ordinariamente suficiente para todos los casos prácticos, no habría inconveniente en afinar más las medidas, siempre que se hubieran empleado modelos de mayor espesor (chapa de decorita más gruesa) y, por tanto, de mayor rigidez, ya que ello habría permitido aplicar cargas más elevadas, sin aumentar excesivamente las deformaciones, debido a la mayor rigidez de las piezas. El aumento del espesor atravesado por la luz, juntamente con el incremento dado a las cargas, daría una red de isocromas mucho más apretada, que habría permitido determinar más cómodamente y con superior exactitud el orden de extinción k .

Otro error experimentalmente hallado es debido a que el larguero externo, más próximo a la aplicación de la carga, es el más deformado y su longitud total pasa a ser superior a la establecida de 34,4 centímetros, por lo que los momentos flectores aumentan al mismo tiempo. Sin embargo, no se introdujo un dispositivo de cuchillas giratorias que garantizase la persistencia, durante todo el ensayo, de la longitud de cada larguero, porque el error obtenido es pequeño e inferior al límite exigible en los cálculos ordinarios de ingeniería. Puede ello fácilmente ser comprobado, sin más que comparar entre sí los resultados obtenidos fotoelásticamente en distintos tipos de carga, deducibles unos de otros por sumación. Esto, que limita en cierta manera la precisión del método, permite, por otra parte, aumentar su sencillez y rapidez, sin que la suma de los distintos errores por él acarreados exceda de un límite prudencial.

Los resultados obtenidos para el modelo en estudio se darán en el resumen comparativo, juntamente con los proporcionados por los otros procedimientos.

(Continuara.)