

ESTUDIO TEÓRICO Y FOTOELÁSTICO DE EMPARRILLADOS

Por E. TORROJA y L. VILLENA, del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales.

El Laboratorio Central de la Escuela de Caminos, que está actualmente completando su instalación fotoelástica, ha querido, asimismo, contribuir a las investigaciones que abren nuevos caminos a esta técnica; y ha desarrollado este importante trabajo, en el que aborda el estudio de emparrillados, a los que no se aplicó, hasta la fecha, el procedimiento fotoelástico. El trabajo, subdividido en cuatro capítulos, será objeto de éste y otro artículo.

§ 1. El problema del emparrillado.

Se entiende por *emparrillado* la estructura hiperestática formada por dos sistemas de vigas que se cruzan en forma de parrilla (fig. 1.^a), y que están ligadas entre sí de tal manera que, en cada uno de los puntos de cruce o nudos, sean iguales las flechas producidas en las dos vigas, una de cada sistema.

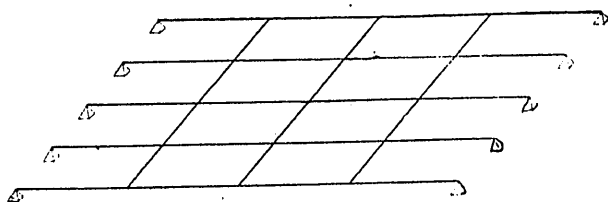


Figura 1.^a

Los elementos de uno de los sistemas son, generalmente, más largos que los del otro y se apoyan en sus extremos, constituyendo las vigas longitudinales o *largueros*. Los elementos del otro sistema, cuyo papel es repartir la carga entre los diversos largueros e igualar las flechas de éstos, apoyan solamente sobre los largueros y se denominan vigas transversales o *viguetas*. Los dos sistemas de vigas se cruzan, de ordinario, ortogonalmente, pero a veces pueden hacerlo bajo un ángulo distinto del recto. Las uniones entre uno y otro sistema suelen ser por empotramiento mutuo, si bien pueden efectuarse también articuladas.

La acción distribuidora de cargas que realizan las viguetas se denominará en lo sucesivo *distribución transversal*.

Si en un emparrillado se articulan entre sí los tramos de cada vigueta, quedarán los largueros independientes unos de otros, no efectuándose, entre ellos, transmisión alguna de cargas y actuando como vigas aisladas, apoyadas únicamente en sus extremos. Al

sistema de vigas así obtenido, en el que no existe distribución transversal, se le denomina *sistema fundamental* del emparrillado en cuestión.

Algunas veces se aborda el problema del emparrillado, prescindiendo de los efectos de la distribución transversal, esto es, se sustituye el estudio de la estructura en sí por el de su sistema fundamental. Por tanto, se supone que una carga aplicada sobre un larguero sólo ejerce influencia sobre él mismo, y que una carga aplicada en un tramo de vigueta se distribuye, según la ley de la palanca, solamente entre los dos largueros vecinos. Parece lógico pensar que de tal manera tendremos siempre un gran margen de seguridad, puesto que los valores de momentos y esfuerzos cortantes así obtenidos serán superiores a los que en realidad experimenta el emparrillado. Sin embargo, se comprueba teóricamente que tal aserto es falso y que en determinadas zonas de las viguetas, y precisamente allí donde se hallaban los máximos momentos positivos, se presentan en realidad momentos negativos. En general, esta manera de calcular da esfuerzos mayores que los reales para los largueros interiores, y menores para los exteriores y las viguetas. Estos errores son considerables cuando existen cargas aisladas y cuando, como es corriente, el peso propio de la estructura es muy pequeño — pueden llegar a ser del orden del 40 al 50 por 100, por defecto, y del 60 al 80 por 100, por exceso, sobre los verdaderos valores —. Dichos errores resultan inadmisibles, dadas las exigencias, cada día mayores, de ahorro del material.

Es necesario, pues, calcular el emparrillado como tal, con lo cual obtendremos resultados mucho más seguros, a la par que ahorros considerables. La solución matemática de estas estructuras no ofrece ninguna dificultad teórica. Ostenfeld (1) y Krabbe (2) han expuesto sendos procedimientos para la resolu-

(1) Ostenfeld, Chr.: *Lastverteilende Querverbände*. Kopenhagen. J. Gjellrup (1930).

(2) Krabbe: "Beitrag zur Behandlung von Trägerrosten". *Bauing.* 15 (1934), págs. 27-32.

ción del sistema de ecuaciones que se establecen entre las deformaciones elásticas del emparrillado, que han de ser previamente conocidas. Recientemente Melan (1) ha expuesto un método puramente matemático, que, por tener un mínimo de peticiones de principio, es denominado, por su autor, exacto. Pero el gran trabajo de cálculo que estos métodos requieren, hace aconsejable no emplearlos más que en ciertos casos muy importantes.

Además, cuando, como es ordinario, existen numerosas vigas transversales separadas por luces desiguales, cuando falta la simetría o varían los momentos de inercia, cuando hay apoyos intermedios aislados, firmes o flotantes, o se presenta cualquier otra suerte de complicación, el cálculo llega a ser tan penoso que se pierde toda relación con la significación propia del fenómeno.

Más fácil y rápido es el método simplificado, ideado por Leonhardt (2), que utiliza coeficientes de distribución transversal que pueden calcularse empíricamente. Pero si bien con él queda reducido el trabajo de cálculo, a costa de la falta de exactitud, éste es todavía excesivo, si se exceptúan los casos sencillos.

Existen también tablas auxiliares, por ejemplo, las dadas por Melan para el empleo de su método, muy cómodas de aplicar, pero sólo valen para casos sencillos y simétricos, que pueden no corresponder al que se presente, por lo que su empleo representa, a veces, una aproximación más o menos ilusoria.

Junto a estos procedimientos de cálculo, se han efectuado numerosos ensayos en modelos reducidos (fig. 2.^a). Cuando el modelo está bien elaborado y las medidas se hacen con gran precisión, los resultados obtenidos llegan a ser más exactos que los del cálculo, que, generalmente, parte de hipótesis incompletas o restringidas. Pero estas exigencias son, a menudo, difíciles de cumplir y entonces los resultados adolecen de inseguridad.

La obtención de los valores de momentos flectores y esfuerzos cortantes, a partir de las medidas efectuadas en modelos reducidos, puede efectuarse por diferentes caminos:

1. Determinando las superficies de influencia correspondientes a las flechas y empleando el método de Ostenfeld-Krabbe.

2. Obteniendo las superficies de influencia correspondientes a las reacciones de apoyo provocadas en

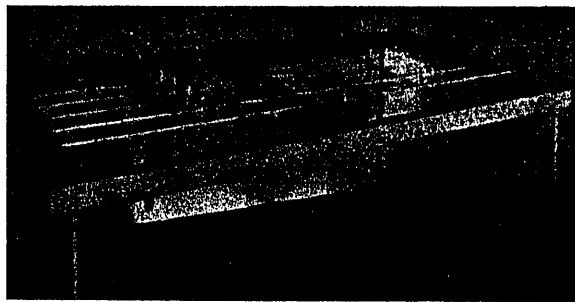


Figura 2.^a

los nudos, y calculando, a partir de ellas, las superficies de influencia de fuerzas y momentos, según el método de Schaechterle (1).

3. Obteniendo directamente las superficies de influencia correspondientes a fuerzas y momentos, por articulaciones en el modelo, según los métodos de Gottschalk (2), Beggs (3) y Abd-el-Wahed (4).

4. Determinando los coeficientes de distribución transversal, como cocientes entre flechas en el emparrillado y en su sistema fundamental y utilizando el método de Leonhardt.

Como se puede apreciar, en todos los casos son necesarios cálculos más o menos largos, que han de añadirse, cuando se trate de modelos complicados, a la gran complejidad y elevado coste del procedimiento.

El frecuente empleo de emparrillados en tableros de puente y otras estructuras, unido a las dificultades que, como se acaba de ver, entrañan la resolución analítica exacta o por modelos reducidos, hacen que sea de particular interés el estudio de un método práctico de resolución experimental, como el que proporciona la Fotoelasticidad. Según nuestras informaciones (5), tal estudio no ha sido intentado hasta la fecha.

(1) Melan, E., y R. Schidler: *Die genaue Berechnung von Trägerrosten*. Wien. Springer (1942).

(2) Leonhardt, F.: "Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste". *Bautech.* 16 (1938), páginas 555-557. *Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung* Berlin. W. Ernst & Sohn (1940).

(1) Schaechterle: "Verfahren zur Ermittlung von statisch unbestimmten Größen und deren Einflusslinien an Modellen". *Bautech.*, 11 (1933), pág. 390.

(2) Gottschalk, O.: "Lösung statischer Aufgaben mittels Kontinostat". *Beton und Eisen.* 26 (1927), págs. 286-292. Puede consultarse también: *Rev. Centro Est. Ing. Buenos Aires*, 244 (1922), pág. 4, y *Anales Soc. Cient. Argentina* (1923), pág. 177.

(3) Beggs, G. E.: "Der Gebrauch von Modellen". *Beton und Eisen.* 26 (1927), págs. 300-304.

(4) Abd-el-Wahed: *Die Gelenkmethode*. Berlín (1931).

(5) Véase como más reciente estudio sobre el problema, con abundante bibliografía: Marten, G.: "Zur Ermittlung von Einflussflächen für torsionfreie Trägerroste mit Modellen". *Fort. und Forsch. im Bauwesen.* A 1 (1942), págs. 25-30.

§ 2. El método fotoelástico.

La Fotoelasticidad, nacida de la feliz conjunción de dos capítulos de la Física Teórica: Óptica y Elasticidad, es un método experimental que permite determinar el sistema de esfuerzos elásticos en el interior de un sólido, pieza de maquinaria o elemento de construcción, mediante la observación de la anisotropía óptica, que, bajo la acción de fuerzas exteriores, aparece, acompañando a la anisotropía mecánica y siendo fiel reflejo de aquélla, en ciertos materiales transparentes, como vidrio óptico, celuloide y algunas resinas artificiales. La Fotoelasticidad, aplicable en un principio sólo a los casos elásticos planos, va extendiendo su campo de acción gracias a numerosos Laboratorios e investigadores de diversos países, que se dedican a profundizar en tal tema y a hacerlo aplicable a problemas cada vez más complejos.

Junto a ello, y a pesar de las dificultades motivadas por la guerra, muchos centros de estudio, dependientes de las grandes empresas constructoras, poseen ya instalaciones fotoelásticas y analizan por este método las diferentes soluciones que pueden darse a la resolución de un problema; bien para elegir, sin necesidad de emplear el cálculo, la más económica de entre todas ellas, bien como comprobación de cálculos ya efectuados, bien en un estilo intermedio, como estudio previo que permita limitar el trabajo posterior de cálculo.

Puede, pues, asegurarse que cuando la investigación internacional tome nuevamente sus cauces normales, la Fotoelasticidad pasará a un primer plano, tanto en las elucubraciones teóricas, como en las aplicaciones prácticas.

Como se ha indicado, la aplicación de la Fotoelasticidad a los problemas planos está totalmente estudiada, sus fundamentos teóricamente deducidos y sus resultados prácticamente comprobados. Pero no es ahí donde este método puede ser más fructífero. En primer lugar, se presentan diariamente estructuras no reducibles a un problema elástico plano; en segundo lugar, es posible, frecuentemente, hallar una combinación afortunada de funciones biarmónicas planas que satisfagan a las condiciones límites a que debe ajustarse la función de Airy para el problema en cuestión y nos dé su solución exacta. Por el contrario, es siempre difícil la resolución teórica de los problemas elásticos de tres dimensiones, máxime cuando se trata de estructuras hiperestáticas, siendo, por tanto, en estos problemas donde está más indicado y se hace más necesario el uso de métodos experimentales.

Por ello, la finalidad de las investigaciones actuales sobre la Fotoelasticidad es llegar a resolver el caso elástico tridimensional, con todas cuantas complicaciones estáticas y dinámicas puedan imaginarse. Tiene

para ello este Método una gran ventaja, pues no necesita hacer ninguna clase de supuestos sobre ligaduras, empotramientos o cualquier otra clase de elementos estáticamente determinados, sino que, reproduciendo fielmente el modelo real, el método, sin más, da cuenta de todas estas indeterminaciones. En este sentido se han orientado los trabajos de Solakian (1) y Hetényi (2), en Norteamérica, y de Oppel (3), Hiltcher (4) y Mönch (5), en el Laboratorio de Fotoelasticidad de la Escuela Técnica Superior de Múnich, dirigido por el Profesor Föppl (en el que uno de los autores ha trabajado durante medio año), que han conducido a un procedimiento para estudiar dichos problemas espaciales, el llamado método de la "congelación", que permite resolver totalmente este caso, si bien todavía no ha adquirido una puesta a punto práctica y sencilla. El Laboratorio Central ha atendido con especial interés esta técnica, y está, en estos momentos, completando su instalación fotoelástica y adecuándola para toda clase de ensayos, con la eficaz ayuda que le ha prestado la Superioridad, por lo que se complace en expresar aquí su agradecimiento a todos.

Independientemente de ello, ha querido contribuir a los trabajos de Laboratorios e investigadores destinados a abrir nuevos caminos en el campo de la Fotoelasticidad, estudiando el problema del emparillado, hasta ahora no abordable fotoelásticamente, ya que se carecía de la necesaria justificación teórica y del método experimental de realización práctica. Otros ensayos en curso permitirán estudiar diversas clases de estructuras, elásticas y plásticas, teniendo como meta ambiciosa el poder llegar a la resolución integral de grandes estructuras espaciales, cuyo cálculo es, hoy en día, prácticamente inabordable.

A pesar de la posible aparición de pequeños esfuerzos de torsión en una pieza cualquiera del emparrillado, por efecto del desigual giro que en los nudos le impone la rigidez de sus enlaces con las que la cruzan normalmente, se puede considerar que en cada una de ellas reina un estado de tensión cuasi-plana, ya que estas tensiones tangenciales de torsión no alteran el estudio fotoelástico del fenómeno de

(1) Solakian, A. G.: "On the hydrodynamic analogy of torsion". *J. App. Mech.* 3 (1936), pág. A. 31.

(2) Hetényi, M.: "The fundamentals of Three-Dimensional Photoelasticity". *J. App. Mech.* 5 (1938), págs. A. 149-155.

(3) Oppel, G.: "Polarisationoptische Untersuchung räumlicher Spannungs- und Dehnungszustände". *Diss. München* (1936). *Forsch. Ing.-Wes.* 7 (1936), págs. 240-248.

(4) Hiltcher, R.: "Polarisationoptische Untersuchung des räumlichen Spannungszustände im konvergenten Licht". *Diss. München* (1938); *Forsch. Ing.-Wes.* 9 (1938), págs. 91-103.

(5) Mönch, E.: *Diss. München* (1943).

flexión, siempre que nos limitemos al caso de pequeñas deformaciones. En efecto: las componentes que actúan en elementos superficiales paralelos al rayo luminoso no ejercen influencia alguna sobre él, y las que lo hacen, según planos perpendiculares a dicho rayo, tienen, a uno y otro lado del plano medio o de simetría de la pieza, valores iguales y de signo contrario, por lo que se anulan sus efectos.

No existe, pues, inconveniente alguno de índole teórica, que impida el examen fotoelástico de un modelo transparente del emparrillado. Pero al estudiar la realización práctica se comprende que, por estar todos los elementos prácticamente a la misma altura, aun en estado de deformación y por tener que efectuar horizontalmente la observación fotoelástica, normalmente a las fuerzas aplicadas, se confundirían las imágenes en todas las vigas atravesadas por la luz polarizada, se sumarían sus efectos ópticos y se obtendría, en definitiva, una imagen borrosa, imposible de interpretar.

Un primer artificio para salvar esta dificultad sería (fig. 3.^a) introducir a ambos lados de la viga, única investigada, dos espejos a 45° con la vertical, encargados de que un haz de luz polarizada, que llegase verticalmente, se reflejase en el primero, atravesara horizontalmente la viga a investigar, y, tras de reflejarse en el segundo, pudiera ser observado verticalmente de nuevo.

Tal procedimiento, sin embargo, tiene una primera desventaja de índole experimental, por precisar un montaje especial, en el que se estorbarían mutuamente los sistemas de aplicación de cargas, los espejos y los elementos del montaje fotoelástico. Pero existe, además, otra razón de tipo óptico: Si el ángulo de incidencia fuese el correspondiente a la incidencia brewsteriana, de unos 57° para el vidrio, la luz emergería tras de ambas reflexiones totalmente polarizada en el plano de incidencia, esto es, el vertical, obligándonos a utilizar los espejos como polarizador y analizador. La luz que atravesaría entonces el modelo estaría, pues, verticalmente polarizada, y como el segundo espejo que automáticamente analizaría la luz solamente dejaría pasar la componente vertical de la luz birrefractada, sería imposible la observación de isoclinas, y sólo mediante la adición de dos láminas cuarto de onda, podrían observarse isocromas en campo claro (1), con las complicaciones e imperfecciones acarreadas por un tal fotoelasticómetro de reflexión. Eligiendo otro ángulo cualquiera, por ejemplo, 45°, no son puros tales fenómenos, por lo que

no se pueden utilizar ambos espejos como analizador y polarizador, pero la polarización parcial sufrida en las dos reflexiones perturba de tal manera la observación que convierte el método en muy impreciso. Por último, en cada operación, solamente sería posible examinar el tramo de una sola viga, comprendido entre dos nudos, lo que alargaría considerablemente el

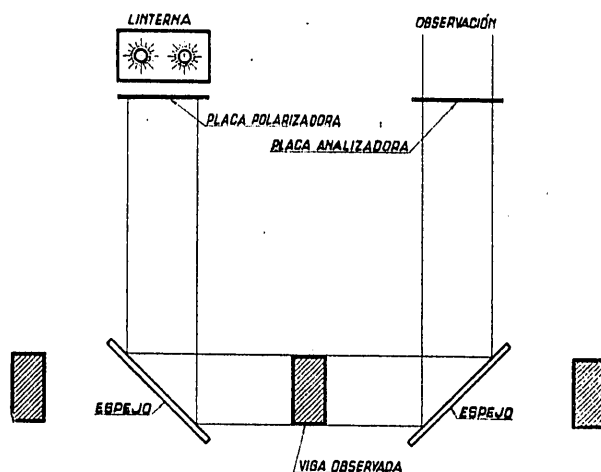


Figura 3.^a

tiempo preciso para cada observación, obligándonos a tener el modelo mucho tiempo bajo carga, con los consiguientes peligros de reactividad, efecto borde, etcétera.

En vista de ello se abandonó este camino y se ha llevado a la práctica un método que, propuesto por el ya citado profesor Föppl, está basado sobre ideas totalmente nuevas y permite, económica y prácticamente, la investigación fotoelástica simultánea de todas las vigas de un sistema, esto es, de todos los largueros o de todas las viguetas de un emparrillado, cualquiera que sea su forma y complicación.

En este trabajo se da cuenta del nuevo método, así como de su aplicación a un caso sencillo y fácilmente comprobable de cálculo. En el Capítulo I se da una exposición abreviada y, en ciertos puntos reformada, del método de cálculo de Melan, aplicándolo al caso elegido. En el II se hace un cálculo simplificado del emparrillado en cuestión, utilizando el método de Leonhardt, cuyos fundamentos se explican brevemente. En el Capítulo III se exponen las bases del nuevo método fotoelástico y los resultados obtenidos con el modelo examinado. Finalmente, en el Capítulo IV se da un resumen comparativo de los resultados hallados por los diferentes caminos para deducir el grado de concordancia de los resultados.

(1) Villena, L.: *Fotoelasticidad*. Publicaciones del Inst. Téc. de la Constr. y Edific., núm. 22 (1944), págs. 109 y 171.

CAPÍTULO I

CÁLCULO EXACTO (1)

§ 3. Nomenclatura.

Considérese (fig. 4.^a) un empujamiento con $m + 1$ largueros, que se designan por $y = 0, 1, 2, \dots, m$, y $n + 1$ viguetas, contando las que unen los extremos de los largueros (por lo que quedan $n - 1$ interiores), a las que se hace corresponder $x = 0, 1, 2, \dots, n$. El punto de cruce del larguero y con la vigueta x , se denomina nudo xy . Una sección cualquiera se indica con ξy en el larguero y , y con $x\eta$, en la vigueta x . Quedan, pues, reservados los símbolos x y y (constan-

una fuerza o reacción de apoyo C_{xy} , que se considerará positiva cuando actúe hacia arriba, sobre el larguero, y hacia abajo, sobre la vigueta.

Estos mismos símbolos afectados del superíndice ^o, representarán las correspondientes magnitudes en el sistema fundamental.

Siguiendo estas convenciones, se representarán por:

a_y , la distancia entre los largueros $y - 1$ e y , que puede ser distinta para los diferentes pares de largueros; esto es, se supone que:

$$a_y = a \alpha_y; \quad [1]$$

en que a es un valor fijo y α_y un coeficiente, variable para cada par de largueros.

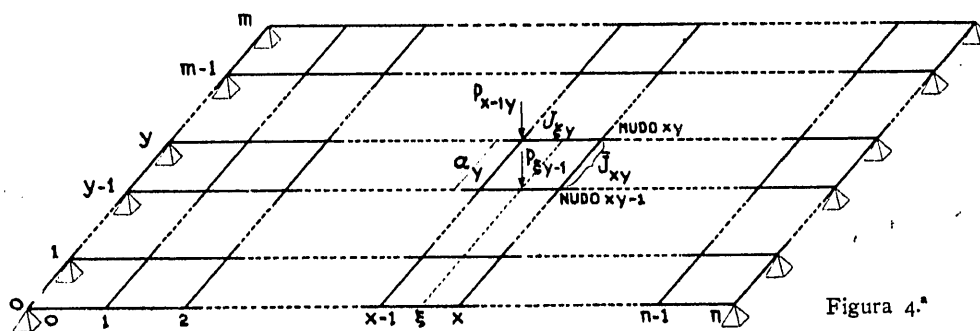


Figura 4.^a

tes y enteros en cada supuesto) para indicar las vigas de ambos sistemas, y las variables $\xi \eta$, para los puntos arbitrarios intermedios.

Cada magnitud vendrá afectada de dos subíndices, que indican el punto del empujamiento al que corresponden. Para indicar los puntos de aplicación de las cargas, se emplearán los mismos subíndices con un guión superpuesto.

Así, las fuerzas que actúan en las secciones ξ de un larguero cualquiera y , vendrán representadas por $P_{\xi y}$.

Las flechas producidas en las distintas secciones de los largueros, se designarán con $s_{\xi y}$ y las que corresponden a los nudos, que son comunes a la vigueta, con s_{xy} .

Los momentos flectores en los largueros, se designan con $M_{\xi y}$, mientras que los producidos en las secciones de las viguetas, correspondientes a los nudos, se representan por $\bar{M}_{xy}$.

En cada nudo se ejerce, entre larguero y vigueta,

$\bar{J}_{xy}$, el momento de inercia de la vigueta x en el tramo comprendido entre los nudos $xy - 1$ y xy . Se supone invariable en cada tramo, pero susceptible de tomar, en cada uno de aquéllos, valores diferentes; esto es, se supone que:

$$\bar{J}_{xy} = \bar{J} j_x j_y \quad [2]$$

en que $\bar{J}$ es un momento de inercia fijo, y $j_x j_y$ dos coeficientes variables con x e y , respectivamente.

$J_{\xi y}$ el momento de inercia del larguero y , que puede variar continuamente a lo largo de él; esto es, se supone que:

$$J_{\xi y} = J_{\xi} \gamma_y; \quad [3]$$

en que J_{ξ} representa un momento de inercia, variable a lo largo del larguero, y γ_y un coeficiente distinto, en general, para cada larguero.

Finalmente se introduce, para simplificar la escritura, las magnitudes:

$$k = \frac{a_2}{EJ}, \quad [4]$$

$$k_y = \frac{\alpha_y}{j_y}.$$

(1) Véase la obra anteriormente citada, de E. Melan y R. Schindler.

§ 4. Planteamiento de las ecuaciones fundamentales.

Al someter el emparrillado a la acción de cargas, aparecen, en las secciones de las viguetas correspondientes a todos los nudos interiores, los momentos flectores $\bar{M}_{xy}$, llamados momentos de apoyo de las viguetas. Al mismo tiempo adquieren los largueros flechas z_{xy} , que para los nudos serán z_{xy} . Limitándose al caso en que no hay cargas aplicadas sobre las viguetas (1), y aplicando el teorema de Clapeyron entre los momentos y las flechas de tres

mente soportan, las reacciones originadas por los momentos de apoyo $\bar{M}_{xy}$, que, en cada nudo, valen:

$$C_{xy} = - \left(\frac{\bar{M}_{xy-1} - \bar{M}_{xy}}{a_y} - \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{xy+1}}{a_{y+1}} \right) \quad [6]$$

en que, como ya se dijo, se atribuye a las C_{xy} valores positivos cuando actúan sobre el larguero, hacia arriba. Así se obtienen las $(n+1)(m+1)$ ecuaciones que faltaban.

La flecha z_{xy} en la sección x del larguero y , que

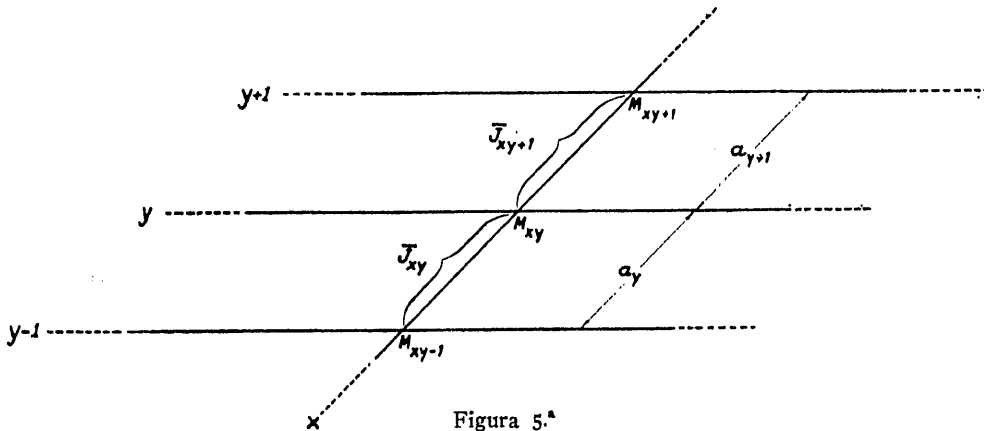


Figura 5.^a

nudos consecutivos, $xy-1$, xy , $xy+1$ (fig. 5.^a), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{a_y}{6EJ_{xy}} \bar{M}_{xy-1} + 2 \left(\frac{a_y}{6EJ_{xy}} + \frac{a_{y+1}}{6EJ_{xy+1}} \right) \bar{M}_{xy} + \\ & + \frac{a_{y+1}}{6EJ_{xy+1}} \bar{M}_{xy+1} + \frac{z_{xy-1} - z_{xy}}{a_y} - \\ & - \frac{z_{xy} - z_{xy+1}}{a_{y+1}} = 0, \end{aligned} \quad [5]$$

que puede ser escrita para

$$x = 0, 1 \dots n \quad y = 1, 2, \dots m-1,$$

cuidando de poner $\bar{M}_{x0} = \bar{M}_{xm} = 0$, ya que en los extremos de las viguetas no pueden existir momentos.

En el sistema de ecuaciones así formado figuran $(n+1)(m-1)$ incógnitas $\bar{M}$, y $(n+1)(m+1)$ incógnitas z , mientras que sólo se dispone de $(n+1)(m-1)$ ecuaciones.

Para obtener el resto, se considera que sobre los largueros actúan, además de las cargas que directa-

mente en [5], puede ahora expresarse por la correspondiente flecha z_{xy}^0 en el sistema fundamental, menos la influencia de las reacciones de apoyo C_{xy} en los nudos; esto es:

$$\begin{aligned} z_{xy} &= z_{xy}^0 - \sum_{\bar{x}=0}^n \theta_{xy\bar{x}} C_{xy} = z_{xy}^0 + \\ & + \sum_{\bar{x}=0}^n \frac{\theta_{xy\bar{x}}}{\gamma_y} \left(\frac{\bar{M}_{xy-1} - \bar{M}_{xy}}{a_y} - \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{xy+1}}{a_{y+1}} \right) \end{aligned} \quad [7]$$

($x = 0, 1, \dots n$; $y = 0, 1, \dots m$),

en que $\theta_{xy\bar{x}}$ es la ordenada en el punto $\bar{x}$ de la línea de influencia correspondiente a la flecha en la sección x del larguero y del sistema fundamental, que, en virtud de [3], ha sido sustituida por $\frac{\theta_{x\bar{x}}}{\gamma_y}$, siendo $\theta_{x\bar{x}}$ la correspondiente ordenada para el mismo larguero del sistema fundamental, con momento de inercia $J_{\bar{x}}$, es decir, para el que $\gamma_y = 0$.

Utilizando la línea de influencia $\theta_{xy\bar{x}} = \frac{\theta_{x\bar{x}}}{\gamma_y}$, puede expresarse z_{xy}^0 por:

$$z_{xy}^0 = \sum_{\bar{x}} P_{\bar{x}} \frac{\theta_{x\bar{x}}}{\gamma_y},$$

(1) El caso de viguetas cargadas es fácilmente reducible a éste.

siendo $P_{\bar{x}y}$ la carga que actúa sobre el larguero, con lo que la expresión anterior toma la forma:

$$z_{xy} = \sum_{\bar{x}} P_{\bar{x}y} \frac{0_x \bar{x}}{\gamma_y} + \sum_{x=0}^n \frac{0_x \bar{x}}{\gamma_y} \left(\frac{\bar{M}_{\bar{x}y-1} - \bar{M}_{\bar{x}y}}{a_y} - \frac{\bar{M}_{\bar{x}y} - \bar{M}_{\bar{x}y+1}}{a_{y+1}} \right) \quad [8]$$

Puesto que para los nudos extremos $y=0$ e $y=m$, las reacciones de apoyo C_{xy} , debidas a los momentos $\bar{M}_{xy}$ de la vigueta, se reducen, respectivamente, a $\frac{\bar{M}_{x1}}{a_1}$, $\frac{\bar{M}_{xm-1}}{a_m}$, se han de añadir como nuevas condiciones en los contornos, que:

$$\bar{M}_{x-1} = \bar{M}_{xm+1} = 0$$

Utilizando [1] y [4], se pueden escribir las ecuaciones fundamentales [5] y [8], en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{k}{j_x} \frac{1}{6} \left(k_y \bar{M}_{xy-1} + 2[k_y + k_{y+1}] \bar{M}_{xy} + k_{y+1} \bar{M}_{xy+1} \right) + \\ + \frac{z_{xy-1} - z_{xy}}{a_y} - \frac{z_{xy} - z_{xy+1}}{a_{y+1}} = 0 \\ (x=0, 1, \dots, n; \quad y=1, 2, \dots, m-1); \\ z_{xy} = \sum_{\bar{x}} P_{\bar{x}y} \frac{0_x \bar{x}}{\gamma_y} + \\ + \sum_{x=0}^n \frac{0_x \bar{x}}{a \gamma_y} \left(\frac{\bar{M}_{\bar{x}y-1} - \bar{M}_{\bar{x}y}}{a_y} - \frac{\bar{M}_{\bar{x}y} - \bar{M}_{\bar{x}y+1}}{a_{y+1}} \right) \\ (x=0, 1, \dots, n; \quad y=0, 1, \dots, m), \end{aligned}$$

que, si se introducen los símbolos

$$\left. \begin{aligned} D(k_y \bar{M}_{xy}) &= \frac{1}{6} (k_y \bar{M}_{xy-1} + 2[k_y + k_{y+1}] \bar{M}_{xy} + \\ &\quad + k_{y+1} \bar{M}_{xy+1}) \\ \Delta \left(\frac{z_{xy}}{a_y} \right) &= \frac{z_{xy-1} - z_{xy}}{a_y} - \frac{z_{xy} - z_{xy+1}}{a_{y+1}} \end{aligned} \right\} [9]$$

quedan reducidas a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{j_x} D(k_y \bar{M}_{xy}) + \Delta \left(\frac{z_{xy}}{a_y} \right) &= 0 \\ (x=0, 1, \dots, n; \quad y=1, 2, \dots, m-1) \\ z_{xy} &= \sum_{\bar{x}} P_{\bar{x}y} \frac{0_x \bar{x}}{\gamma_y} + \sum_{x=0}^n \frac{0_x \bar{x}}{a \gamma_y} \Delta \left(\frac{\bar{M}_{\bar{x}y}}{a_y} \right) \\ (x=0, 1, \dots, n; \quad y=0, 1, \dots, m), \end{aligned} \right\} [10]$$

con los valores de contorno:

$$\bar{M}_{x-1} = \bar{M}_{x0} = \bar{M}_{xm} = \bar{M}_{xm+1} = 0.$$

en que el número de incógnitas es igual al de ecuaciones.

§ 5. Obtención de soluciones particulares por separación de variables.

Hay de buscarse ahora soluciones particulares del sistema fundamental [10] que posean la forma:

$$\begin{aligned} z_{xy} &= z_x v_y, \\ \bar{M}_{xy} &= U_x w_y, \end{aligned} \quad [11]$$

cumpliendo las condiciones de contorno:

$$w_{-1} = w_0 = w_m = w_{m+1} = 0.$$

Si se lograra encontrar un número elevado de tales soluciones:

$$\begin{aligned} z_x^0 v_y^0, z_x^1 v_y^1, \dots, z_x^i v_y^i, \dots; \\ U_x^0 w_y^0, U_x^1 w_y^1, \dots, U_x^i w_y^i, \dots, \end{aligned}$$

se obtendría la solución general del sistema por suma de las soluciones particulares:

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \sum_i z_x^i v_y^i, \\ \bar{M}_{xy} &= \sum_i U_x^i w_y^i. \end{aligned} \quad [12]$$

Introduciendo las expresiones [11] en los símbolos [9], se obtiene:

$$\begin{aligned} D(k_y \bar{M}_{xy}) &= U_x \frac{1}{6} (k_y w_{y-1} + 2[k_y + k_{y+1}] w_y + \\ &\quad + k_{y+1} w_{y+1}) = U_x D(k_y w_y); \\ \Delta \left(\frac{z_{xy}}{a_y} \right) &= z_x \left(\frac{v_{y-1} - v_y}{a_y} - \frac{v_y - v_{y+1}}{a_{y+1}} \right) = z \Delta \left(\frac{v_y}{a_y} \right) \end{aligned}$$

y análogamente:

$$\Delta \left(\frac{\bar{M}_{xy}}{a_y} \right) = U_x \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right),$$

por lo que el sistema [10] se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{k}{j_x} U_x D(k_y w_y) + z_x \Delta \left(\frac{v_y}{a_y} \right) &= 0; \\ z_x v_y &= \sum_{\bar{x}} P_{\bar{x}y} \frac{0_x \bar{x}}{\gamma_y} + \sum_{x=0}^n \frac{0_x \bar{x}}{a \gamma_y} U_x \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right). \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones da, por separación de variables:

$$\frac{k U_x}{j_x z_x} = - \frac{\Delta \left(\frac{v_y}{a_y} \right)}{D(k_y w_y)}$$

en la que el primer miembro depende sólo de x y el segundo sólo de y . Para satisfacerla, han de ser invariables ambos miembros, por lo que se puede poner, sin restricción de la generalidad:

$$\frac{k U_x}{j_x z_x} = 1, \quad \text{o sea:} \quad U_x = \frac{j_x}{k} z_x; \quad [13]$$

de donde:

$$D(k_y w_y) + \Delta \left(\frac{v_y}{a_y} \right) = 0.$$

La segunda ecuación, por su parte, exige, para que sea posible la separación de variables, que $P_{\xi y}$ pueda expresarse en la forma $p_{\xi} v_y \gamma_y$, obteniéndose entonces, tras de dividir por v_y :

$$z_x = \sum_{\bar{x}=0}^{\bar{\xi}} p_{\bar{\xi}} \theta_{x \bar{\xi}} + \sum_{\bar{x}=0}^n \theta_{x \bar{x}} \frac{U_{\bar{x}}}{a} \frac{\Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right)}{\gamma_y v_y}$$

cuyos dos miembros deben depender solamente de x , para lo cual debe verificarse:

$$\frac{\Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right)}{\gamma_y v_y} = -\lambda, \quad [14]$$

en que λ es una constante. Gracias a ello y a [13], podemos escribir la anterior expresión en la forma:

$$z_x = \sum_{\bar{x}=0}^{\bar{\xi}} p_{\bar{\xi}} \theta_{x \bar{\xi}} - \sum_{\bar{x}=0}^n \frac{\lambda j_{\bar{x}}}{a k} z_{\bar{x}} \theta_{x \bar{x}}$$

Así, pues, la flecha $z_{\xi y}$ en la sección ξ de un larguero, y, y el momento $\bar{M}_{xy}$ en el nudo xy de una vigueta, vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} z_{\xi y} &= z_{\xi} v_y, \\ \bar{M}_{xy} &= U_x w_y = \frac{j_x z_x}{k} w_y, \end{aligned} \quad [15]$$

siempre que la carga aplicada en el larguero pueda ser representada por:

$$P_{\xi y} = p_{\xi} v_y \gamma_y; \quad [16]$$

determinándose v_y , w_y por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} D(k_y w_y) + \Delta \left(\frac{v_y}{a_y} \right) &= 0 \quad (y = 1, 2, \dots, m-1); \\ \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right) + \lambda \gamma_y v_y &= 0 \quad (y = 0, 1, \dots, m) \end{aligned} \quad [17]$$

con las condiciones de contorno:

$$w_{-1} = w_0 = w_m = w_{m+1} = 0,$$

y viniendo z_x y z_{ξ} dadas por la solución de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} z_x + \sum_{\bar{x}=0}^n \frac{\lambda j_{\bar{x}}}{a k} z_{\bar{x}} \theta_{x \bar{x}} &= \sum_{\bar{\xi}} p_{\bar{\xi}} \theta_{x \bar{\xi}} = z_x^0 \\ z_{\xi} + \sum_{\bar{x}=0}^n \frac{\lambda j_{\bar{x}}}{a k} z_{\bar{x}} \theta_{\xi \bar{x}} &= \sum_{\bar{\xi}} p_{\bar{\xi}} \theta_{\xi \bar{\xi}} = z_{\xi}^0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} [18] \\ [19] \end{array} \right. \quad (x=0, 1, \dots, n)$$

Siendo conocidas las soluciones λ , v_y y w_y , así como la magnitud z_x , pueden determinarse en virtud de [6], [13] y [14] las fuerzas de apoyo entre largueros y viguetas, debidas a los momentos de apoyo, por:

$$\begin{aligned} C_{xy} &= -\Delta \left(\frac{\bar{M}_{xy}}{a_y} \right) = -\frac{1}{a} \Delta \left(\frac{\bar{M}_{xy}}{a_y} \right) = \\ &= -z_x \frac{j_x}{a k} \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right) = z_x \frac{j_x \lambda}{a k} v_y \gamma_y. \end{aligned} \quad [20]$$

Si se imagina que la carga $P_{\xi y}$ se reduce a p_{ξ} , esto es, si en la fórmula [16] se hace $v_y = \gamma_y = 1$, la anterior expresión se reduce a

$$C_x = z_x \frac{j_x \lambda}{a k}$$

que representará la reacción de apoyo producida por p_{ξ} en un emparillado, cuyos largueros son todos iguales entre sí. Gracias a ello, se puede escribir [15] y [20] en la forma:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xy} &= a C_x \frac{w_y}{\lambda}, \\ C_{xy} &= C_x v_y \gamma_y. \end{aligned}$$

Finalmente, el momento flector $M_{\xi y}$ en la sección ξ del larguero y , vendrá dado, análogamente a lo que sucedía con las flechas [7], por el correspondiente

momento $M_{\xi y}^0$ en el sistema fundamental, menos la influencia de las reacciones de apoyo C_{xy} , esto es:

$$M_{\xi y} = M_{\xi y}^0 - \sum_{\bar{x}=0}^n C_{\bar{x}y} \mu_{\xi \bar{x}} = \sum_{\bar{x}=0}^n P_{\bar{x}y} \mu_{\xi \bar{x}} - \sum_{\bar{x}=0}^n C_{\bar{x}y} \mu_{\xi \bar{x}} \nu_y \gamma_y \quad [21]$$

en que $\mu_{\xi \bar{x}}$ representa la línea de influencia correspondiente al momento en el sistema fundamental, y $M_{\xi y}^0$ el momento que corresponde, en el sistema fundamental, a la carga $P_{\bar{x}y} = p_{\bar{x}} \nu_y \gamma_y$.

De una manera análoga a lo hecho para las reacciones de apoyo, se ve que:

$$M_{\xi y} = \left(\sum_{\bar{x}} p_{\bar{x}} \mu_{\xi \bar{x}} - \sum_{x=0}^m C_{\bar{x}} \mu_{\xi \bar{x}} \right) \nu_y \gamma_y = M_{\xi} \nu_y \gamma_y$$

en que M_{ξ} es el momento creado por la fuerza $p_{\bar{x}}$ en un emparrillado con $J_{\xi y} = J_{\xi}$.

§ 6. El sistema de ecuaciones en $\nu_y w_y$.

Las expresiones [17] forman un sistema simultáneo de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para valores arbitrarios de λ , solamente posee la solución $\nu_y = w_y = 0$, sin valor real, ya que implica la anulación de $P_{\xi y}$, $s_{\xi y}$ y $\bar{M}_{xy}$, y corresponde al emparrillado descargado. Pero existen $m+1$ valores determinados de λ llamados *valores propios*: $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^i, \dots$ (que se ordenan en sentido creciente), a los que corresponden otros tantos sistemas de valores de ν_y y w_y ó *soluciones propias*:

$$\nu_0^i, \nu_1^i, \dots, \nu_m^i \text{ y } w_1^i, w_2^i, \dots, w_{m-1}^i \quad (i=0, 1, \dots, m).$$

A cada uno de los $m+1$ valores propios, corresponden $m+1$ valores de ν_y y $m-1$ de w_y . Los dos primeros valores propios, λ^0 y λ^1 , son nulos; los restantes son siempre positivos. A λ^0 , λ^1 corresponden siempre valores nulos de ν_y^0 y ν_y^1 , mientras que ν_y^0 es constante y ν_y^1 varía linealmente con y .

Si ν_y^i y w_y^i son soluciones, también lo son tras de multiplicarlas por una constante arbitraria. Dicha constante es elegida de tal manera que se verifique:

$$\sum_{y=0}^m (\nu_y^i)^2 \gamma_y = 1, \quad [22]$$

con lo que las magnitudes $\nu_y^i \sqrt{\gamma_y}$ están normalizadas.

Entre dos soluciones, ν_y^i y ν_y^h , correspondientes a los valores propios λ^i , λ^h , se verifica la condición:

$$\sum_{y=0}^m \nu_y^i \nu_y^h \gamma_y = 0, \quad [23]$$

que indica que las magnitudes $\nu_y^i \sqrt{\gamma_y}$ y $\nu_y^h \sqrt{\gamma_y}$ son ortogonales.

A cada sistema de valores $\lambda^i \nu_y^i w_y^i$, corresponderá, en virtud de [16], un estado de carga

$$P_{\xi y}^i = p_{\xi}^i \nu_y^i \gamma_y, \quad [24]$$

viniendo dadas las flechas, momentos de apoyo, fuerzas de reacción y momentos flectores por ella producidos, por:

$$\begin{aligned} z_{\xi y}^i &= z_{\xi}^i \nu_y^i \\ \bar{M}_{xy}^i &= a C_x^i \frac{w_y^i}{\lambda^i} \\ C_{xy}^i &= C_x^i \nu_y^i \gamma_y \\ M_{\xi y}^i &= M_{\xi}^i \nu_y^i \gamma_y. \end{aligned} \quad [25]$$

Como al valor propio $\lambda^0 = 0$ corresponden soluciones propias ν_y^0 constantes, $P_{\xi y}^0$ representa una carga que actúa, sobre todos los largueros, proporcionalmente a sus momentos de inercia, y $s_{\xi y}^0$ no depende de y , teniendo todos los largueros la misma deformada. No existen, pues, momentos flectores $\bar{M}_{xy}^0$ en las viguetas, anulándose también las fuerzas de apoyo C_{xy}^0 , como puede deducirse de $w_y^0 = 0$.

Al valor propio $\lambda^1 = 0$ corresponden valores de ν_y^1 , que varían linealmente con y , por lo que la carga $P_{\xi y}^1$ produce en el emparrillado una deformación tal, que las secciones ξ de todos los largueros están en línea recta, permaneciendo indeformadas las viguetas, en las que no se originan momentos de apoyo $\bar{M}_{xy}^1$, ni fuerzas de reacción C_{xy}^1 , como se puede comprobar con $w_1 = 0$.

Solamente en los estados de carga correspondientes a $i \neq 2$, aparecen momentos de apoyo $\bar{M}_{xy}^i$ y fuerzas de reacción C_{xy}^i .

§ 7. El sistema de ecuaciones en z_x^i .

Las flechas z_x^i deben cumplir, en virtud de [18], el sistema de ecuaciones

$$z_x^i + \sum_{\bar{x}=0}^n \frac{j_{\bar{x}} \lambda^i}{a k} z_{\bar{x}}^i \theta_{x \bar{x}} = \sum_{\bar{x}} p_{\bar{x}}^i \theta_{x \bar{x}} = z_x^0,$$

y las z_{ξ}^i cumplirán condiciones análogas. Estas ecuaciones dan una sencilla interpretación de los valores z_{ξ}^i y z_x^i .

Considérese un larguero del sistema fundamental, con momento de inercia J_{ξ} ($\gamma_y = 1$), apoyado elásticamente en los puntos correspondientes a los nudos (fig. 6.^a), de tal manera que las flechas z_x^i , que en ellos toma, originan unas reacciones de apoyo

$$C_x^i = \beta_x^i z_x^i,$$

en las que las constantes β_x^i se denominarán coeficientes de apoyo elástico.

Figura 6.^a

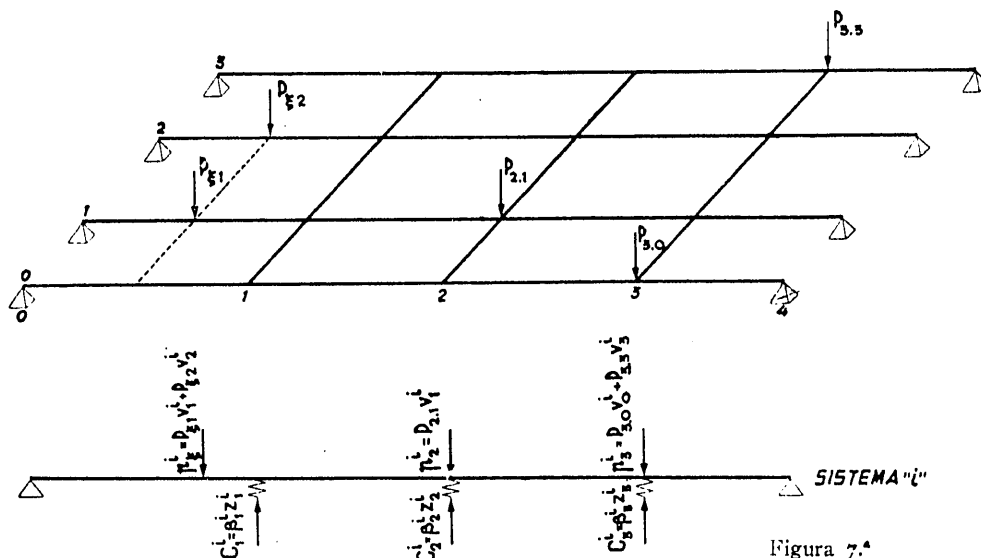
En virtud de esta hipótesis, podremos obtener la deformada de la viga elásticamente apoyada, a partir de la deformada de la viga libre, restándole la influencia de las fuerzas de apoyo. Si $\theta_{\xi \bar{x}}$ representa, como hasta ahora, la ordenada en el punto $\bar{x}$ de la línea de influencia correspondiente de la flecha en la sección ξ

elásticamente en los nudos, con coeficientes de apoyo elástico

$$\beta_x^i = \frac{J_x \lambda^i}{a k}. \quad [26]$$

A cada carga $P_{\xi y}^i$ corresponderá, a consecuencia del factor λ^i , un determinado valor del coeficiente β_x^i . Para cada valor de i se tendrá, pues, un larguero con momento de inercia J_{ξ} ($\gamma_y = 1$) y coeficientes de apoyo elástico β_x^i , que se designan abreviadamente por Sistema "i".

Como ya se ha dicho en el párrafo anterior, $\lambda^0 = \lambda^1 = 0$, por lo que en los sistemas "0" y "1" faltan los apoyos en los nudos. Por tanto, z_{ξ}^0 y z_{ξ}^1 , correspondientes a las cargas $p_{\xi y}^0$ y $p_{\xi y}^1$ son iguales a la deformada del larguero libre en el sistema fundamental con momentos de inercia J_{ξ} .

Figura 7.^a

de la viga sin apoyos intermedios, la flecha que el larguero elásticamente apoyado, con coeficientes β_x^i , experimenta, bajo la carga $p_{\xi y}^i$, viene expresada por:

$$z_{\xi}^i = z_{\xi}^0 - \sum_{\bar{x}=0}^n \beta_x^i z_x^i \theta_{\xi \bar{x}} = \sum_{\bar{x}=0}^n p_{\xi y}^i \theta_{\xi \bar{x}} - \sum_{\bar{x}=0}^n C_x^i \theta_{\xi \bar{x}}.$$

Comparando esta expresión con [19], se ve que aquélla se puede concebir como deformada de un larguero con momento de inercia J_{ξ} ($\gamma_y = 1$), apoyado

Gracias a la circunstancia de poder considerar a z_{ξ} como deformada de un sistema "i", se pueden determinar dichas magnitudes sin necesidad de resolver el sistema [19]. Análogamente, tampoco se necesita, para hallar las demás magnitudes, resolver el sistema [18]. Una vez conocidas z_{ξ}^i y z_x^i , se puede obtener, en virtud de [25], las diferentes soluciones particulares de $\bar{M}_{xy}^i$, C_{xy}^i y $M_{\xi y}^i$.

§ 8. Obtención de la solución general.

El sistema [17] posee $m + 1$ soluciones diferentes v_y^i , w_y^i , a las que corresponden otros tantos valores de $z_{\xi y}^i$, $\bar{M}_{xy}^i$, C_{xy}^i , $M_{\xi y}^i$, dados por [25]. La solución general del sistema [10] se obtendrá superponiendo todas estas soluciones particulares por medio de [12].

Supongamos (fig. 7.^a) que sobre el emparrillado actúa una carga arbitraria, representable [24] por

$$P_{\xi y} = \sum_{i=0}^m P_{\xi y}^i = \sum_{i=0}^m p_{\xi y}^i v_y^i \gamma_y.$$

Entonces, la carga correspondiente a cada sistema "i" viene dada por

$$p_{\xi y}^i = \sum_{\gamma_y=0}^m P_{\xi y}^i v_y^i,$$

pudiendo hallarse las magnitudes buscadas por:

$$z_{\xi y}^i = \sum_{i=0}^m z_{\xi y}^i v_y^i$$

$$\bar{M}_{xy}^i = a \sum_{i=2}^m C_x^i \frac{w_y^i}{\lambda^i}$$

$$C_{xy}^i = \sum_{i=2}^m C_x^i v_y^i \gamma_y$$

$$M_{\xi y}^i = \sum_{i=0}^m M_{\xi y}^i v_y^i \gamma_y,$$

en que $z_{\xi y}^i$, C_x^i y $M_{\xi y}^i$ son los valores de z , C y M , en el sistema "i", producidos por la carga $p_{\xi y}^i$. Como

puede observarse, la sumación para $\bar{M}_{xy}$ comienza por el término $i = 2$, ya que en los estados de cargas $i = 0$, $i = 1$, no aparecen momentos de apoyo. También la sumación de C_{xy} comienza en el valor $i = 2$, porque $c_x^0 = c_x^1 = 0$.

Si se supone (fig. 8.^a) que sólo está cargado un larguero, la carga de los sistemas "i" se simplifica a

$$p_{\xi y}^i = P_{\xi y}^i v_y^i.$$

Siendo entonces $z_{\xi y}^i$, C_{xP}^i y $M_{\xi y}^i$ los valores de las respectivas magnitudes en el sistema "i" bajo la carga $P_{\xi y}^i$; los valores producidos en dicho sistema por la carga $p_{\xi y}^i$ vienen dados por:

$$z_{\xi y}^i = z_{\xi y}^i v_y^i$$

$$C_x^i = C_{xP}^i v_y^i$$

$$M_{\xi y}^i = M_{\xi y}^i v_y^i$$

con lo que las soluciones son:

$$z_{\xi y}^i = \sum_{i=0}^m z_{\xi y}^i v_y^i$$

$$\bar{M}_{xy}^i = a \sum_{i=2}^m C_{xP}^i v_y^i \frac{w_y^i}{\lambda^i}$$

$$C_{xy}^i = \sum_{i=2}^m C_{xP}^i v_y^i \gamma_y$$

$$M_{\xi y}^i = \sum_{i=0}^m M_{\xi y}^i v_y^i \gamma_y.$$

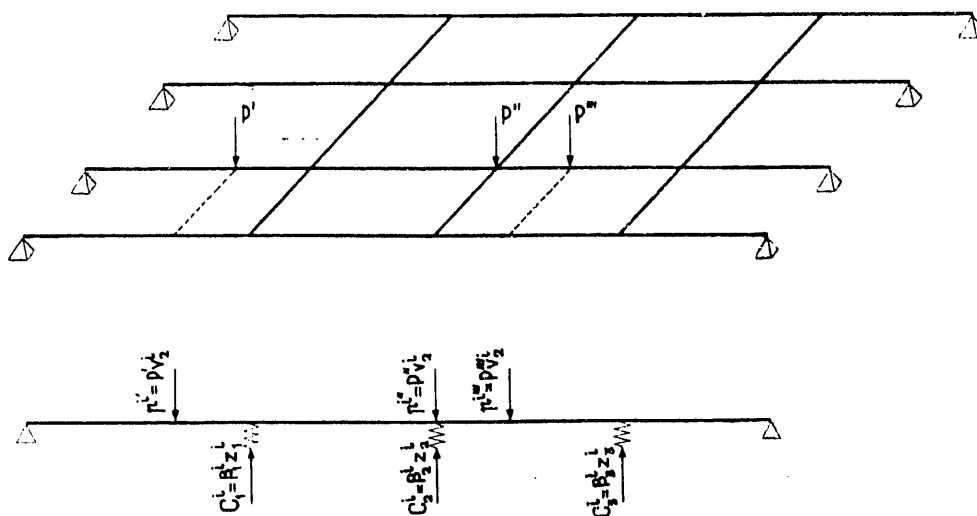


Figura 8.^a

A todos los sistemas "i" corresponde ahora la misma carga y, por lo tanto, los valores z_{ξ}^i , C_x^i , M_{ξ}^i no varían al pasar esta carga de uno a otro larguero.

Cuando se trate de una sola fuerza aislada aplicada en el nudo x y (fig. 9.), todos los sistemas "i" deben soportar una carga unidad en ese mismo nudo. Utilizando las ordenadas en el punto ξ de las líneas de influencia, en el sistema "i", correspondientes, respectivamente, a las flechas, a las fuerzas de apoyo y al momento, se tiene:

$$\begin{aligned} z_{\xi}^i &= P \theta_{\xi \xi}^i \\ C_x^i &= P z_{x \xi}^i \\ M_{\xi}^i &= P \mu_{\xi \xi}^i \end{aligned} \quad [28]$$

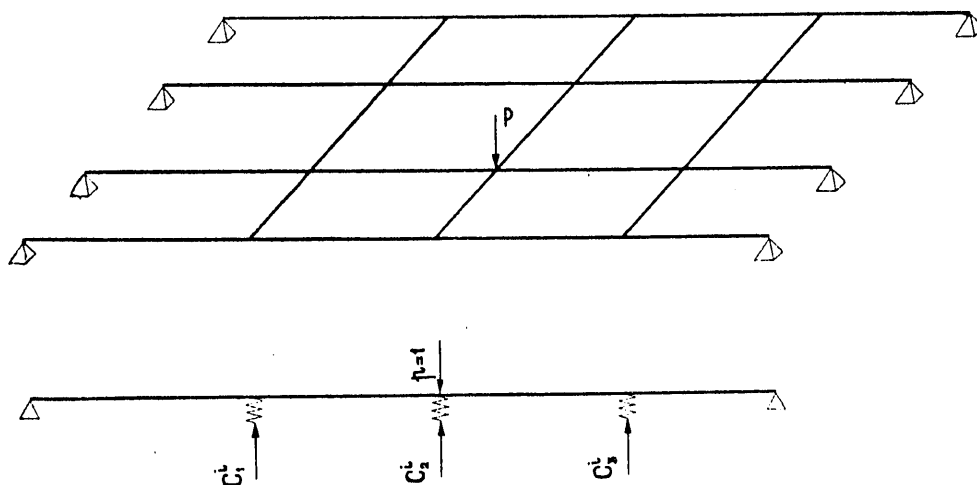


Figura 9.ª

y las fórmulas [27] se transforman en:

$$\begin{aligned} z_{\xi y} &= P \sum_{i=0}^m \theta_{\xi \xi}^i v_{\xi y}^i v_y^i \\ \bar{M}_{xy} &= P a \sum_{i=2}^m z_{x \xi}^i v_{\xi y}^i \frac{w_y^i}{\lambda^i} \\ C_{xy} &= P \sum_{i=2}^m z_{x \xi}^i v_{\xi y}^i v_y^i \gamma_y \\ M_{\xi y} &= P \sum_{i=0}^m \mu_{\xi \xi}^i v_{\xi y}^i v_y^i \gamma_y \end{aligned} \quad [29]$$

Cuando se trate de una fuerza aislada, aplicada entre dos nudos, lo más cómodo es referir este caso al anterior. Imagínese el larguero como una viga continua, rígidamente apoyada en los nudos (fig. 10).

Entonces no hay transmisión de cargas y aparecen, sólo en el larguero cargado, las reacciones de apoyo R_{xy} y los momentos $M'_{\xi y}$. Para obtener el estado original del emparrillado, es necesario superponer, al estado anterior, otro formado por el emparrillado, en cuyos nudos se han aplicado fuerzas suplementarias, iguales y contrarias a las reacciones de apoyo R_{xy} , que producirán en todos los largueros los momentos $M''_{\xi y}$. Entonces, los momentos $\bar{M}_{xy}$ de apoyo en los nudos y todas las magnitudes correspondientes a los largueros descargados, son los hallados en el segundo estado, mientras que los momentos y flechas del larguero cargado se obtendrán por suma de los momentos $M''_{\xi y}$ producidos por las fuerzas adicionales,

más los $M'_{\xi y}$ hallados en el larguero considerado como viga continua:

$$M_{\xi y} = M'_{\xi y} + M''_{\xi y} \quad [30]$$

§ 9. Cálculo de valores propios y soluciones propias.

Las expresiones [17] se nos presentan como un sistema simultáneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que en el caso de no existir muchas variables, puede resolverse inmediatamente. Introduciendo en la primera ecuación el valor de v_y :

$$v_y = -\frac{1}{\lambda \gamma_y} \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right) \quad [31]$$

dado por la segunda, se obtiene el sistema único

$$\begin{aligned} & a_y a_{y+1} D(k_y, w_y) - \frac{a_{y+1}}{\lambda \gamma_{y-1}} \Delta \left(\frac{w_{y-1}}{a_{y-1}} \right) + \\ & + \frac{a_y + a_{y+1}}{\lambda \gamma_y} \Delta \left(\frac{w_y}{a_y} \right) - \frac{a_y}{\lambda \gamma_{y+1}} \Delta \left(\frac{w_{y+1}}{a_{y+1}} \right) = 0 \quad [32] \\ & (y = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

que, teniendo en cuenta las condiciones en los límites, da tantas ecuaciones como incógnitas. Formulando entonces la llamada ecuación de frecuencia, obtenida por la anulación del determinante formado por los coeficientes de las w , se obtiene una ecuación en λ que posee, en todos los casos, $m + 1$ raíces distintas de cero. A cada uno de estos valores propios corresponde un sistema de soluciones propias. Esta ecuación posee, además, la raíz doble $\lambda^0 = \lambda^1 = 0$, a cuyos valores corresponden: w^0 y w^1 , nulas, v^0 , constante, y v^1 , lineal con y .

Escribiendo la condición de ortogonalidad entre cada solución propia y v^0 ó v^1 , se ve que, cuando el emparrillado tiene un eje de simetría paralelo a los largueros, las soluciones correspondientes a valores pares de i son simétricas:

$$w_y^{2n} = w_{m-y}^{2n} \quad v_y^{2n} = v_{m-y}^{2n},$$

mientras que las que corresponden a valores impares de i son antisimétricas:

$$w_y^{2n+1} = -w_{m-y}^{2n+1} \quad v_y^{2n+1} = -v_{m-y}^{2n+1}.$$

Por tanto, en las ecuaciones correspondientes a un número par de m , sólo será necesario hallar la solución hasta la mitad $i = \frac{m}{2}$ y en las de número impar, hasta $i = \frac{m+1}{2}$.

Ya se ha dicho (§ 5) que todas las soluciones propias poseen la condición de continuar siéndolo cuando se multiplican por una constante arbitraria, y que esta constante se determina normalizando la solución por medio de [22]. Designando con $\bar{w}_y^i$ y $\bar{v}_y^i$ las soluciones no normalizadas, y puesto que para $i = 0$:

$$\bar{w}_y^0 = 0 \quad \bar{v}_y^0 = 0$$

y

$$(N_0)^2 = \sum_{y=0}^m (\bar{v}_y^0)^2 \gamma_y = \sum_{y=0}^m \gamma_y,$$

las soluciones normalizadas serán:

$$v_y^0 = \frac{1}{N_0} \quad w_y^0 = 0.$$

Análogamente, para $i = 1$:

$$\bar{w}_y^1 = 0, \quad \bar{v}_y^1 = -\bar{v}_{m-y}^1 = -\frac{1}{2} \sum_{y=1}^m \alpha_y - \sum_{y=1}^y \alpha_y$$

y

$$(N_1)^2 = \sum_{y=0}^m (\bar{v}_y^1)^2 \gamma_y;$$

de donde las soluciones normalizadas serán:

$$v_y^1 = -v_{m-y}^1 = \frac{\bar{v}_y^1}{N_1} \quad w_y^1 = 0.$$

Para hallar las restantes soluciones propias, se introducen en la ecuación [32] cada uno de los $m - 1$ valores propios hallados por la ecuación de frecuencia, igualando a la unidad el valor de una incógnita, por ejemplo, $\bar{w}_y^1 = 1$, y resolviendo la correspondiente ecuación. Como se tiene una ecuación más que incógnitas, se la puede dejar como comprobación de los cálculos. Una vez halladas todas las w_y^i , se recurre a [31] para determinar los correspondientes valores de las v_y^i , teniendo en cuenta que, si se ha elegido $\bar{w}_y^1 = 1$, se verifica:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\bar{w}_y^1}{\alpha_0} \right) &= \frac{1}{\alpha_1}, \\ \Delta \left(\frac{\bar{w}_y^1}{\alpha_1} \right) &= - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + \frac{\bar{w}_y^1}{\alpha_2}, \\ \Delta \left(\frac{\bar{w}_y^1}{\alpha_2} \right) &= \frac{1 - \bar{w}_y^1}{\alpha_2} - \frac{\bar{w}_y^1 - \bar{w}_y^1}{\alpha_3}, \\ \Delta \left(\frac{\bar{w}_y^1}{\alpha_3} \right) &= \frac{\bar{w}_y^1 - \bar{w}_y^1}{\alpha_3} - \frac{\bar{w}_y^1 - \bar{w}_y^1}{\alpha_4}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Se obtiene entonces:

$$(N_i)^2 = - \sum_{y=0}^m \Delta \left(\frac{\bar{w}_y^i}{\alpha_y} \right) \bar{v}_y^i,$$

con lo que las soluciones normalizadas son:

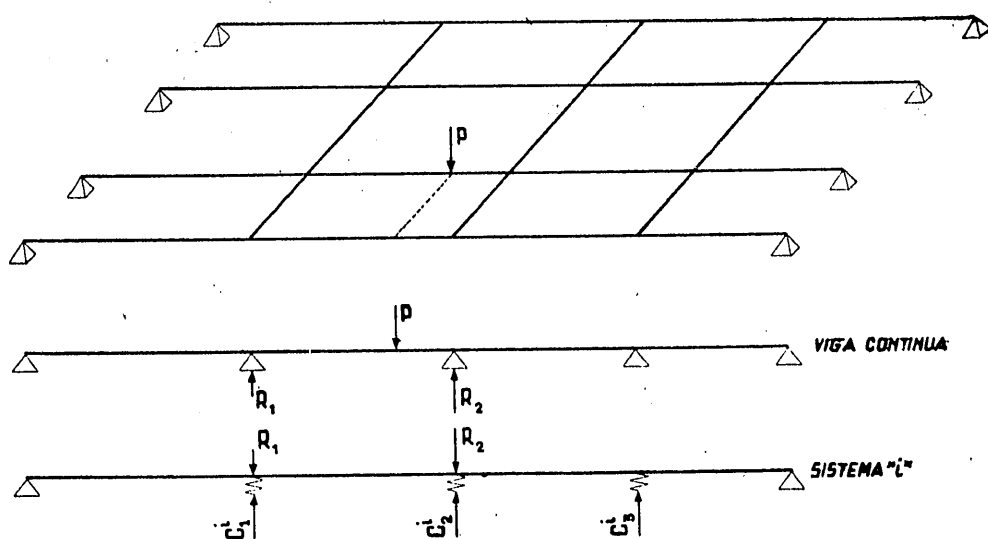
$$v_y^i = \frac{\bar{v}_y^i}{N_i} \quad w_y^i = \frac{\bar{w}_y^i}{N_i} \lambda^i.$$

§ 10. Resolución de los sistemas "i".

La resolución del sistema fundamental [10] ha conducido, mediante la separación de variables, al cálculo de los llamados sistemas "i". Son sistemas estáticamente indeterminados, que coinciden con el sistema fundamental del emparrillado, y que están

Si se designan con $\dot{s}_{xp}^0$ y $\dot{s}_{xx}^0$ las flechas en la sección x del sistema fundamental, a consecuencia de

$$\beta_x^i = \frac{\lambda^i j_x}{a k} = i^i \frac{E J j_x}{a^3}.$$


$$C_x^i = p_x^i z_x^i.$$
$$C_1^i \left(z_{1,1}^0 + \frac{1}{\beta^i} \right) + C_2^i z_{1,2}^0 + \dots + C_{n-1}^i z_{1,n-1}^0 = z_{1,p}^0$$

$$\left. \begin{aligned} & C_1^i z_{2,1}^\circ + C_i^i \left(z_{2,2}^\circ + \frac{1}{\beta i} \right) + \dots + C_{n-1}^i z_{2,n-1}^\circ = z_{2,p}^\circ \\ & \dots\dots\dots \\ & C_1^i z_{n-1,1}^\circ + C_2^i z_{n-1,2}^\circ + \dots + C_{n-1}^i \left(z_{n-1,n-1}^\circ + \frac{1}{\beta i} \right) = \\ & \qquad \qquad \qquad = z_{n-1,p}^\circ \end{aligned} \right\} [33]$$

La solución de estas ecuaciones muestra que las fuerzas de apoyo C_x^i , y con ellas las demás fuerzas y momentos dependen, además de la carga y de la luz, de la única magnitud:

$$p^i = \frac{\lambda^i}{12} \frac{\Phi}{n^4},$$

llamada parámetro de la viga, en donde:

$$\Phi = n \frac{\bar{J}}{J} \left(\frac{l}{a} \right)^3,$$

depende sólo de las dimensiones del emparrillado y da idea de la distribución transversal en el emparrillado.

En función de esta variable da Melan tablas que permiten calcular cómodamente casos sencillos y simétricos de emparrillados, pero que no son aplicables a nuestro ejemplo.

§ 11. Resolución numérica del emparrillado en estudio $m = 3, n = 3$.

Por tratarse de un emparrillado en que los travesaños son iguales entre sí, los largueros tienen un

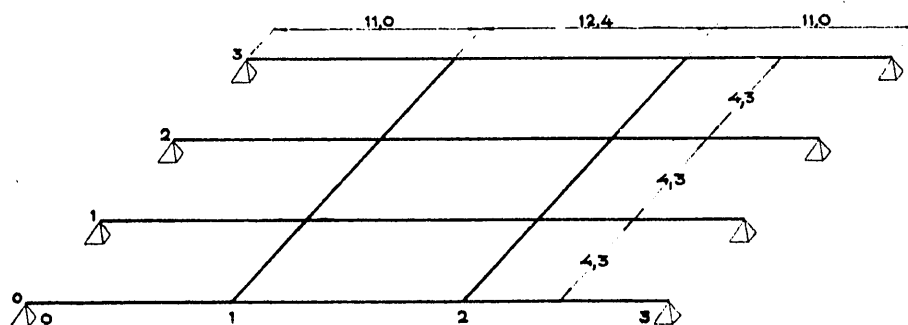


Figura 11.

momento de inercia constante y están a la misma separación (fig. 11), el sistema [17] toma la forma:

$$\frac{1}{6} (w_{y-1} + 4w_y + w_{y+1}) + v_{y-1} - 2v_y + v_{y+1} = 0 \quad (y = 1, 2)$$

$$w_{y-1} - 2w_y + w_{y+2} + \lambda v_y = 0 \quad (y = 0, 1, 2, 3),$$

con los valores de contorno:

$$w_{-1} = w_0 = w_3 = w_4 = 0.$$

Introduciendo en la primer ecuación el valor de v_y hallado en la segunda, se obtiene para expresión de la ecuación [31]:

$$-w_{y-2} + \left(\frac{\lambda}{6} + 4 \right) w_y + \left(\frac{4\lambda}{6} - 6 \right) w_2 + \left(\frac{\lambda}{6} + 4 \right) w_{y+1} - w_{y+2} = 0 \quad (y = 1, 2),$$

con los mismos valores de contorno. El desarrollo de este sistema de ecuaciones da:

$$\left(\frac{4\lambda}{6} - 6 \right) w_1 + \left(\frac{\lambda}{6} + 4 \right) w_2 = 0,$$

$$\left(\frac{\lambda}{6} + 4 \right) w_1 + \left(\frac{4\lambda}{6} - 6 \right) w_2 = 0;$$

de las que, por ser simétrico el emparrillado, bastará resolver la primera.

Para $i = 2$ corresponderá una solución simétrica $w_1 = w_2$, por lo que queda:

$$w_1 \left(\frac{5\lambda}{6} - 2 \right) = 0;$$

de donde, haciendo $w_1 = 1$, se halla $\lambda^2 = 2.4$.

Para $i = 3$ corresponde una solución antismétrica $w_1 = -w_2$, hallando, análogamente:

$$w_1 \left(\frac{3\lambda}{6} - 10 \right) = 0;$$

de donde, con $w_1 = 1$, resulta $\lambda^2 = 20$.

Se tiene, por tanto:

Para $i = 0, \lambda = 0$:

$$\bar{w} = 0 \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 1 \quad N = \sqrt{4}$$

$$v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0.5$$

$$w = 0.$$

Para $i = 1, \lambda = 0$:

$$\bar{w} = 0 \quad \bar{v}_0 = -\bar{v}_3 = 3 \quad \bar{v}_1 = -\bar{v}_2 = 1 \quad N = \sqrt{20}$$

$$v_0 = -v_3 = \frac{3}{\sqrt{20}} = 0.67082, \quad v_1 = -v_2 = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0.22361$$

$$w = 0.$$

Para $i = 2, \lambda = 2.4$:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 1 \quad \bar{v}_0 = \bar{v}_3 = -1 \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 1 \quad N = \sqrt{4}$$

$$v_0 = v_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0.5 \quad v_1 = v_2 = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -0.5$$

$$w_1 = w_2 = \frac{\lambda}{N} = \frac{2.4}{\sqrt{4}} = 1.2.$$

Para $i = 3, \lambda = 20$:

$$\bar{w}_1 = -\bar{w}_2 = 1 \quad \bar{v}_0 = -\bar{v}_3 = -1 \quad \bar{v}_1 = -\bar{v}_2 = 3 \quad N = \sqrt{20}$$
$$v_0 = -v_3 = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0,22361 \quad v_1 = -v_2 = \frac{3}{\sqrt{20}} = -0,67082$$
$$w_1 = -w_2 = \frac{\lambda}{N} = \frac{20}{\sqrt{20}} = 4,47214.$$

Los coeficientes de apoyo elástico de los sistemas “i” vienen dados, en virtud de [26], por:

$$i = 2$$
$$\frac{1}{\beta} = \frac{1,159}{E}$$

$$i = 3$$
$$\frac{1}{\beta} = \frac{139}{E},$$

y las flechas del sistema fundamental resultan ser:

$$z_{0,1} = z_{0,2} = 26,420$$
$$z_{0,1} = z_{0,2} = 22,712;$$

por lo que el sistema [33] se reduce, para una carga unidad, aplicada en el nudo 1, a:

$$i = 2:$$
$$C_1 (26,420 + 1,159) + C_2 \cdot 22,712 = 26,420;$$
$$C_1 \cdot 22,712 + C_2 (26,420 + 1,159) = 22,712;$$

$$i = 3:$$
$$C_1 (26,420 + 139) + C_2 \cdot 22,712 = 26,420;$$
$$C_1 \cdot 22,712 + C_2 (26,420 + 139) = 22,712;$$

cuya resolución da:

$$i = 2$$
$$C_{1,1} \quad 0,8693$$
$$C_{2,1} \quad 0,1076$$

$$i = 3$$
$$0,9805$$
$$0,0166$$

que coinciden, por ser $P = 1$ [28], con los respectivos valores de ξ . Recordando [21] y [28], se obtiene:

$$i = 0 = 1$$
$$\mu_{1,1} \quad 7,4826$$
$$\mu_{2,1} \quad 3,5170$$

$$i = 2$$
$$0,0174$$
$$0,0100$$

$$i = 3$$
$$0,0025$$
$$0,0016$$

Empleando entonces las fórmulas [29], relativas a momentos flectores en largueros y viguetas, se ob-

tiene, para una fuerza unidad aplicada en los nudos 1,0 y 1,1, respectivamente:

Carga unidad aplicada en el nudo 1,0.

Sección	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3
Momento en el larguero	5,392	2,830	0,608	-1,351	2,530	1,591	0,455	-0,831
Momento en la vigueta	0	-1,145	-0,724	0	0	-0,119	-0,112	0

Carga unidad aplicada en el nudo 1,1.

Sección	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3
Momento en el larguero	2,830	2,434	1,607	0,608	1,591	1,101	0,687	9,455
Momento en la vigueta	0	1,567	0,345	0	0	0,126	0,105	0

Finalmente, en el caso de una fuerza unidad aplicada en el centro del tramo central de un larguero, ha de considerarse éste como viga continua rigidamente apoyada en los nudos. Nacen entonces en ellos dos reacciones de apoyo de valor 0,5885. Utilizando los valores del cuadro anterior y aplicando la fórmula [30], se obtiene para una fuerza unidad aplicada en los puntos $1 \frac{1}{2}$ 1 y $1 \frac{1}{2}$ 2, respectivamente:

Carga unidad aplicada en el punto $1 \frac{1}{2}$, 0.

Sección	{ 1,0 1,1 1,2 1,3 $1 \frac{1}{2}$ 0							
	2,0	2,1	2,2	2,3				
Momento en el larguero		3,688	2,602	0,625	1,225	6,788		
Momento en la vigueta		0	-0,744	-0,492	0			

Carga unidad aplicada en el punto $1 \frac{1}{2}$, 1.

Sección	{ 1,0 1,1 1,2 1,3 $1 \frac{1}{2}$ 1							
	2,0	2,1	2,2	2,3				
Momento en el larguero		2,602	1,106	1,350	0,625	4,207		
Momento en la vigueta		0	-0,996	-0,365	0			

A partir de estos valores se pueden calcular los momentos en todos los casos de carga que hemos considerado, y cuyos valores se darán en el resumen comparativo, juntamente con los proporcionados por los otros procedimientos.

(Continuará.)