CÁLCULO MECÁNICO DE LÍNEAS ELÉCTRICAS

POR JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ DEL VALLE, INGENIERO DE CAMINOS

Termina, con el presente artículo, el notable trabajo iniciado en el número anterior, cuyo valor práctico habrán de apreciar los que hayan de desarrollar estos cálculos, aun cuando se sorprendan un tanto del tono humorístico que el autor da a sus epígrafes.

III. Variaciones debidas a movimientos de los apoyos.

17. Puede ocurrir que por desigualdad de vanos, cargas, etc., sean tan diferentes las componentes horizontales de las tensiones de dos hilos que concurren en un aislador, que deformen el poste sustentador. Esta deformación puede ocurrir por flexión longitudinal del poste, por flexión del elemento horizontal, juntamente con torsión del poste, etc.; pero en todos los casos se supone que la deformación sea elástica; es decir, que desaparece cuando desaparece la fuerza que la produce. La reacción elástica es proporcional a la deformación, y la resistencia de materiales estudia las expresiones de los coeficientes que, multiplicados por la tensión total aplicada, dan el valor de la flecha, o sea el recorrido del punto de sujeción del hilo. Designaremos este coeficiente por K; sus dimensiones son longitud/fuerza.

Estas condiciones se cumplen también en la línea suspendida por péndolas cuando el peso de éstas es grande y se hallan perfectamente articuladas en su extremo superior.

Designaremos por r los recorridos, y por e, el exceso sobre la luz de la proyección horizontal del desarrollo. La ecuación que liga e con el parámetro a que define la catenaria es (pág. 299):

$$e = d \cos \gamma - L = L^3/24\, a^2 ; \quad \varepsilon = \frac{1}{24\, \alpha^2}.$$

La componente horizontal de la tensión es (página 295): $p \cdot a = H$, y la deformación o recorrido horizontal del punto de amarre: $r = K \cdot H = K\, p\, a$.

La catenaria en un vano cualquiera queda definida por el valor de e, el cual varía con los recorridos de los apoyos. La anormalidad de un vano produce deformaciones en los postes que lo limitan, y, por lo tanto, las deformaciones se extienden a toda la línea. En la práctica no ocurre así; bien porque algún apoyo sea efectivamente rígido, bien que su deformación se considere nula, hay un vano invariable, más o menos cerca del vano anormal.

El exceso del desarrollo sobre la luz lo designamos con e (dato) antes de la deformación, y por E, después de ella. El recorrido, r, de un poste reduce un vano y aumenta el siguiente, de modo que el exceso, E, es suma algebraica del primitivo, e, y de los recorridos de los dos postes. Tendremos, pues, en los vanos sucesivos:

....

$$E_3 = e_3 + r_2 - r_3 = \frac{1}{24\, a^2_3}$$

$$E_4 = e_4 + r_3 - r_4 = \frac{1}{24\, a^2_4}$$

....

Los recorridos, r, en función de los valores de a son:

....

$$r_2 = K\,(p_3\, a_3 - p_2\, a_2)$$
$$r_3 = K\,(p_4\, a_4 - p_3\, a_3)$$

....

La eliminación de todas las variables (r y a) menos una no es posible; pero los valores de todas ellas pueden hallarse por tanteos en algunos casos particulares.

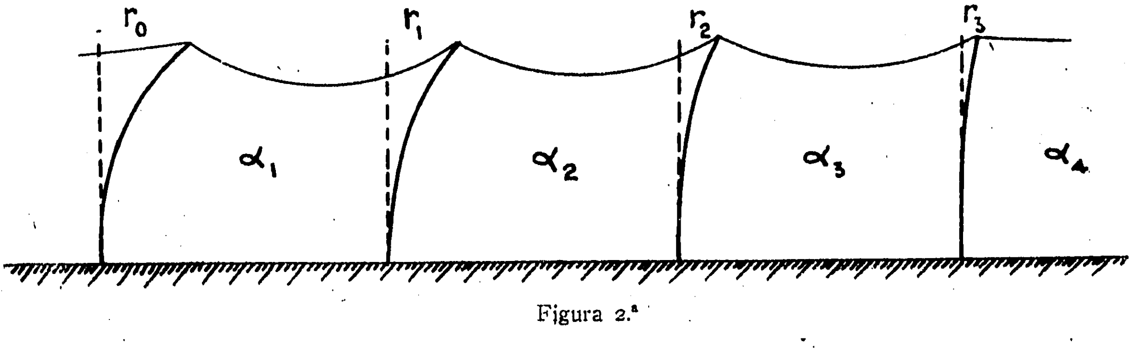

Figura 2.ª

a) *Línea interrumpida* (fig. 2.ª). — Supondremos la carga uniforme para todos los vanos e iguales flexibilidades en todos los postes. Si no ocurre así, basta con añadir un subíndice a las p y las K.

Los sistemas de ecuaciones son los siguientes:

$$r_0 = K\,p\,a_1.$$

$$r_1 = e_1 + r_0 - \frac{1}{24\,a^2_1}$$

$$a_2 = \frac{r_1}{K\,p} + a_1$$

$$r_2 = e_2 + r_1 - \frac{1}{24\,a^2_1}$$

....

$$a_3 = \frac{r_2}{K\,p} + a_2$$

....

Límite de $a_n = a$ normal; límite de $r_n = 0$. Límite de $\Sigma\, r_i = K.\,p.\,a.$ (a normal).

El tanteo se lleva a cabo ensayando un valor de a_1 y deduciendo sucesivamente todos los demás que han de tender a los límites indicados.

El problema puede consistir en hallar el valor de p que produzca una deformación dada, r_0, en el poste más cargado. Esto equivale a tomar como incógnita el valor de Kp.

Si un poste es indeformable, el tanteo se conduce para que la r correspondiente sea nula.

El vano único entre dos postes flexibles cumple la condición

$$E = e + r_i + r_d = \frac{L}{24\,a^2},$$

y como $r_d = r_i = K.\,p.\,a.$, se tiene la ecuación:

$$e + 2\,kpa = \frac{1}{24\,a^2}.$$

El valor de $e = 1/24\,a^2_0$ es el que correspondería a peso nulo del hilo.

b) *Línea simétrica y simétricamente cargada.* — Supongamos el caso de la figura 3.ª, el el cual el vano o soporta cargas diferentes de los demás vanos, pero con la condición de ser simétrica la línea. Las ecuaciones correspondientes a la mitad de la línea son:

$$E_0 = e_0 + r_0 + r'_0 = \qquad r_0 = r'_0 = K\,.\,p_0\,a_0$$
$$E_1 = e_1 - r_0 - r_1 = \qquad r_1 = K\,(p_2\,a_2 - p_1\,a_1)$$

....

$$\text{Lím. } r_n = 0;\quad \text{lím. } a_n = a \text{ normal};$$
$$\text{lím. } \Sigma\, r_i = Kp\,(a_n - a_0).$$

La corrección por deformaciones elásticas o térmicas da origen a nuevos tanteos.

El valor de la luz, L, no se conserva cuando hay deformaciones, pero su variación es despreciable, pues sólo alcanza a valer un par de milésimas de la luz.

Ejemplo:

$$a_n = 578 \text{ m. Luz} = 40 \text{ m. } K\,.\,p = 2{,}5 \times 10^{-4}.$$

De los datos se deduce:

$$\text{lím. } \Sigma\, r_i = 0{,}00025 \times 578 = 0{,}1445 \text{ m. (144,5 mm.).}$$

Primer tanteo: Se supone $a_1 = 240$ m. y obtenemos sucesivamente (v. párrafo *a)* de esta página):

$$a_1 = 240 \text{ m. } r_0 = 2{,}5 \times 24 = 60 \text{ mm.}$$

$$r_1 = 8 + 60 - \frac{40^3}{24 \times 240^2} = 68 - 46{,}4 = 21{,}6 \text{ mm.}$$

$$a_2 = 240 + \frac{21{,}6}{0{,}25} = 240 + 86 = 326 \text{ m.}$$

$$r_2 = 8 + 21{,}6 - \frac{40^3}{24 \times 326^2} = 4{,}4 \text{ mm.}$$

El valor de r_3 saldrá negativo, y, por lo tanto, el valor elegido para a_1 es demasiado pequeño.

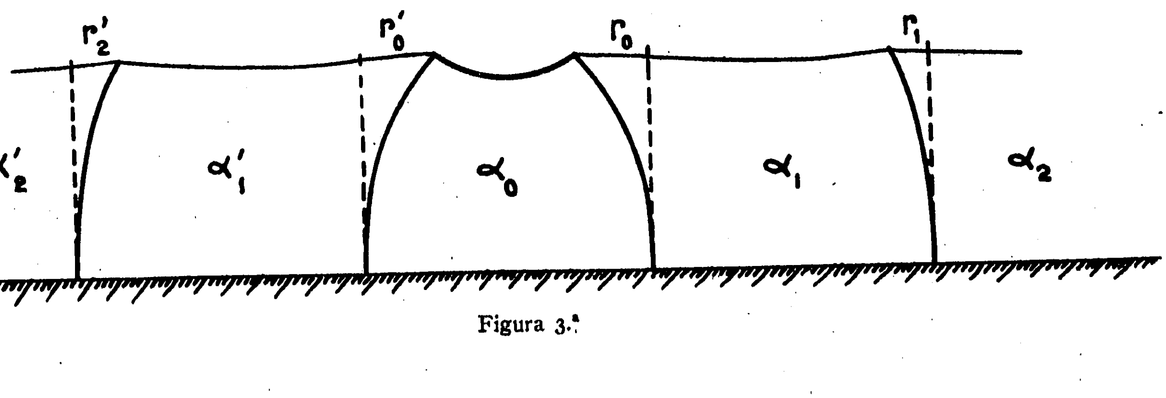

Figura 3.ª

Segundo tanteo: $a_1 = 260$ m.:

$$r_0 = 2{,}5 \times 26{,}0 = 65 \text{ mm.}$$

$$r_1 = 8 + 65 - \frac{40^3}{24 \times 260^2} = 73 - 39{,}5 = 33{,}5$$

$$a_2 = 260 + 33{,}5/0{,}25 = 260 + 134 = 394 \text{ m.}$$

$$r_2 = 41{,}5 - \frac{40^3}{24 \times 394^2} = 41{,}5 - 17{,}2 = 24{,}3$$

$$a_3 = 394 + 24{,}3/0{,}25 = 394 + 98 = 492 \text{ m.}$$

$$r_3 = 32{,}3 - \frac{40^3}{24 \times 492^2} = 32{,}3 - 11{,}0 = 21{,}3$$

$$a_4 = 492 + 21{,}3/0{,}25 = 492 + 86 = 578 \text{ m.}$$

Hemos hallado $a_4 = a_n$; por lo tanto, este valor $a_1 = 260$ m. es demasiado grande. El valor verdadero está, pues, comprendido entre 240 y 260 m. Adoptaremos $a_1 = 250$ m., y el que quiera afinar más, que se compre una guitarra.

18. *Línea deslizante.* — El hilo está apoyado en los soportes; pero no amarrado a ellos; deslizará, por lo tanto, hasta que se igualen las tensiones en los vanos contiguos.

Tendida la línea, sin más carga que su peso propio, a una temperatura dada, se trata de averiguar la forma de equilibrio que toma cuando varían la temperatura o las sobrecargas de cada vano.

a) *Variación de temperatura.* — En un vano cualquiera se tiene (pág. 301), al variar la temperatura, de t_1 a t_2:

$$(d' - d) \cos \gamma = e' - e = L_i \, (t_2 - t_1) \, D + \frac{P_i}{E \, \omega} \, (a' - a) =$$

$$= \frac{L_i^3}{24} \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

y sumando todos los vanos:

$$T \, (t_2 - t_1) \, \Sigma L_i + \frac{\Sigma P_i}{E \, \omega} \, (a' - a) = \frac{\Sigma L_i^3}{24} \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} \right).$$

Ecuación que da el valor del nuevo parámetro a' en función del antiguo a.

b) *Variación de sobrecargas.* — Análogamente, cuando el peso unitario varía de p a p', o bien el peso de cada vano de P_i a P'_i, tendremos (pág. 301) sumando todos los vanos:

$$\frac{1}{E \, \omega} \, (a' \, \Sigma P' - a \, \Sigma P) = \frac{\Sigma L_i^3}{24} \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} \right).$$

19. El caso general en que el peso unitario no sea el mismo para todos los vanos, se resuelve como sigue:

Al tender la línea, el peso unitario es uniforme. La igualdad de tensiones exige la igualdad de parámetros a, y, por lo tanto, en cada uno de los vanos se conoce el valor de $e = L^3/24 \, a^2$.

Con las nuevas sobrecargas ha de tenerse:

$$p_1 \, a_1 = p_2 \, a_2 = \ldots = p_n \, a_n.$$

Elevando al cuadrado estas expresiones y sustituyendo a^2 por su valor en función de e y la alteración que producen los recorridos r en cada amarre, tenemos:

$$\frac{p_1 \, L_1}{24 \, (e_1 - r_1)} = \frac{p_2 \, L_2}{24 \, (e_2 + r_1 - r_2)} \cdots \frac{p_n \, L_n}{24 \, (e_n + r_n)} =$$

$$= \frac{\Sigma \, p_i \, L_i}{24 \, \Sigma \, e_i} = \frac{\Sigma \, P_i \, L_i}{24 \, \Sigma \, e_i}.$$

Los recorridos en los postes extremos son evidentemente nulos, y las ecuaciones de equilibrio nos darán los valores de los recorridos r.

Calculado el valor de e' en cada uno de los vanos, considerados independientes, se hallan los valores de los recorridos, como dejamos dicho.

Si el desplome de la péndola extrema es tan grande que se aproxime más a la inclinación del hilo que a la vertical, no hay inconveniente en suponer que su longitud se sume a la del hilo. La variación del peso unitario, aun siendo grande, en la proximidad del amarre tiene escasa influencia en la forma de equilibrio.

IV. Procedimientos gráficos.

El estudio gráfico de los cambios de régimen suprime los tanteos a costa de la precisión en los resultados; pero como esta precisión es superflua, por la incertidumbre de los datos, no hay por qué tener en menos estima los resultados obtenidos.

Una ventaja apreciable del procedimiento gráfico es la clara idea que da de la influencia de las variaciones del desarrollo en el régimen de tensiones, y así, unas pocas líneas, aun trazadas a pulso, indicarán el orden de magnitud de los resultados que han de obtenerse, y con ello queda eliminada la posibilidad de equivocaciones que pudieran deslizarse en el procedimiento numérico.

20. Los cambios de régimen de sobrecargas o temperatura producen variación en el desarrollo, y, por lo tanto, en el exceso e del desarrollo sobre la luz. La variación de temperatura no produce, de suyo, más que un alargamiento o acortamiento que, por hacer variar el régimen de tensiones, produce, a su vez, un acortamiento o un alargamiento elástico. La nueva característica del vano se obtiene, mediante tanteos, de las ecuaciones [13] y [14], pero pueden ser resueltas gráficamente una vez dibujada en papel cuadriculado la ley de variación de a en función de e, o mejor de α en función de ε, designando por estas letras griegas las relaciones de a y e a la luz L del vano, medida horizontalmente. Esta ley es muy sencilla:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{24\,\varepsilon}}.$$

21. *Variación de sobrecargas.* — La ecuación [13, *b*] puede ser escrita en esta forma:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \frac{P_2}{E\,\omega}\left(\alpha_2 - \alpha_1 \frac{P_1}{P_2}\right), \qquad [13, g]$$

y la construcción gráfica se realiza así:

Conocido el valor de $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{24\,\alpha^2}$, se multiplica el valor de la ordenada por la relación de los pesos y se obtiene el punto A. Por este punto A se traza una recta con la inclinación $-\dfrac{P_2}{E\,\omega}$, que corta la curva en el punto B, que define la ordenada que se buscaba.

22. *Variación de temperatura.*—La ecuación [14] puesta en la forma:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \frac{P}{E\,\omega}(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad [14, g]$$

se traduce en la siguiente construcción gráfica: por el punto B se traza una paralela al eje de las ε hasta el punto M tal que $BM = D\,(t_2 - t_1)$, y por M una recta con la inclinación $\dfrac{P}{E\,\omega}$ que corta la curva en el punto N que define la característica nueva. P es el peso total del hilo en el vano.

Puede apreciarse la escasa influencia del acortamiento elástico cuando el valor de a/L es pequeño.

23. *Apoyos flexibles.* — El ejemplo de la página 356, que corresponde a $\alpha_n = 14{,}45$, se resuelve por tanteos gráficos así:

Adoptando como valor de $\alpha_1 = 6{,}45$, se traza $A'\,B$ con la inclinación Kp hasta B; $A\,A' = \alpha_1$ y $A\,B = K\,p\,\alpha_1 = \rho_0$; $B\,C = \rho$, porque $C\,A = \rho_0 - \rho_1$.

Como ha de tenerse $\rho_1 = Kp\,(\alpha_2 - \alpha_1)$, se traza la vertical que pasa por C' tal que $B'\,C' = B\,C = \rho_1$ y la horizontal $C'\,D$. La vertical de D es valor de α_2, porque $\rho_1 = B'\,A'\,.\,Kp = Kp\,(\alpha_2 - \alpha_1)$. A partir de

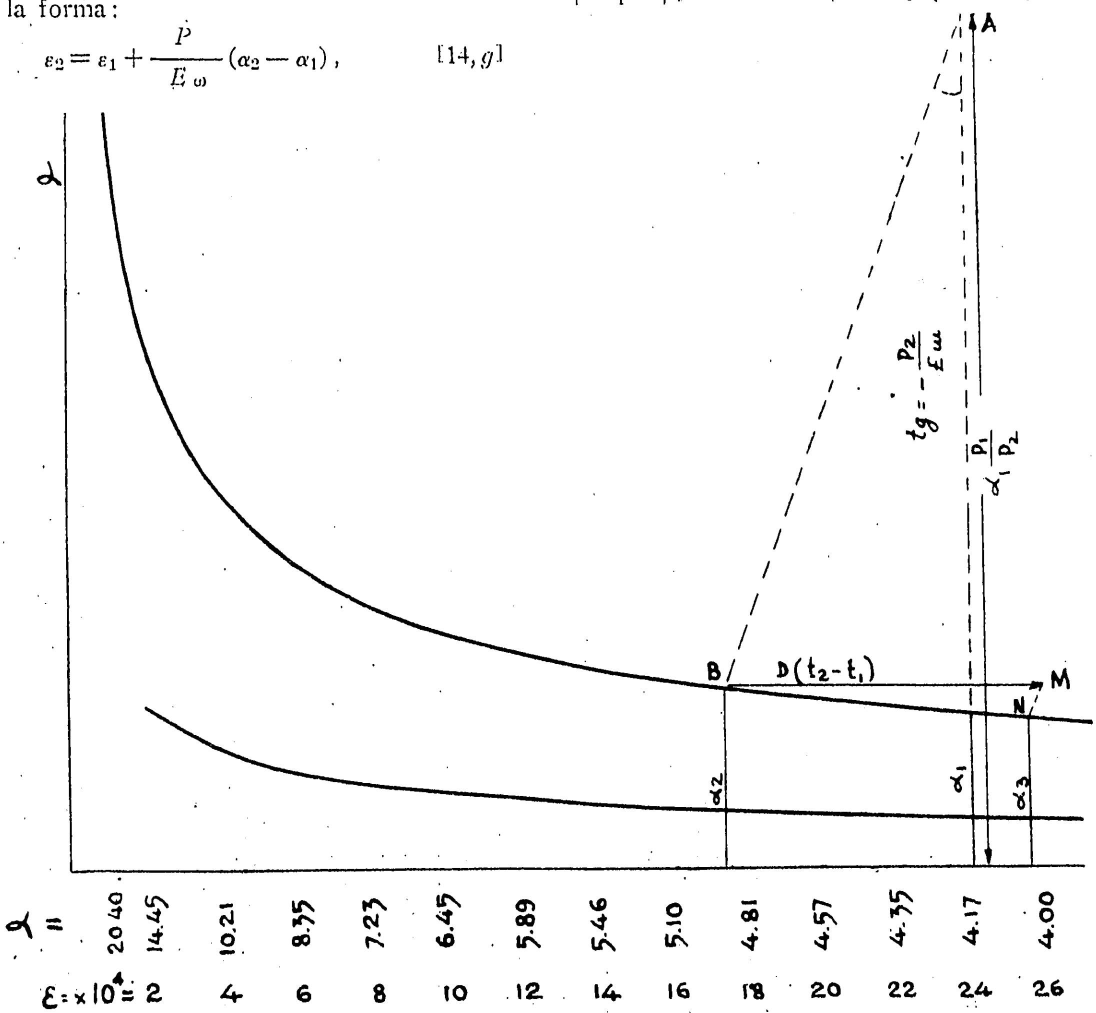

Figura 4.ª

D se toma $DE = \rho_1$; $EF = \rho_2$, porque $FD = \rho_1 - \rho_2$, que es lo que define α_2.

Trazada DF' paralela a Kp, se toma el punto F' tal que $E'F' = \rho_2$; el punto H define α_3, y así sucesivamente.

Si el valor elegido para α_1 es el verdadero, se tenderá con las construcciones sucesivas al valor normal de α.

Los valores hallados en el caso de la figura, son:

= 16,4

= 6,45

= 8,0

= 9,6

= 5,4

= 11,8

= 4,8

= 13,6

....

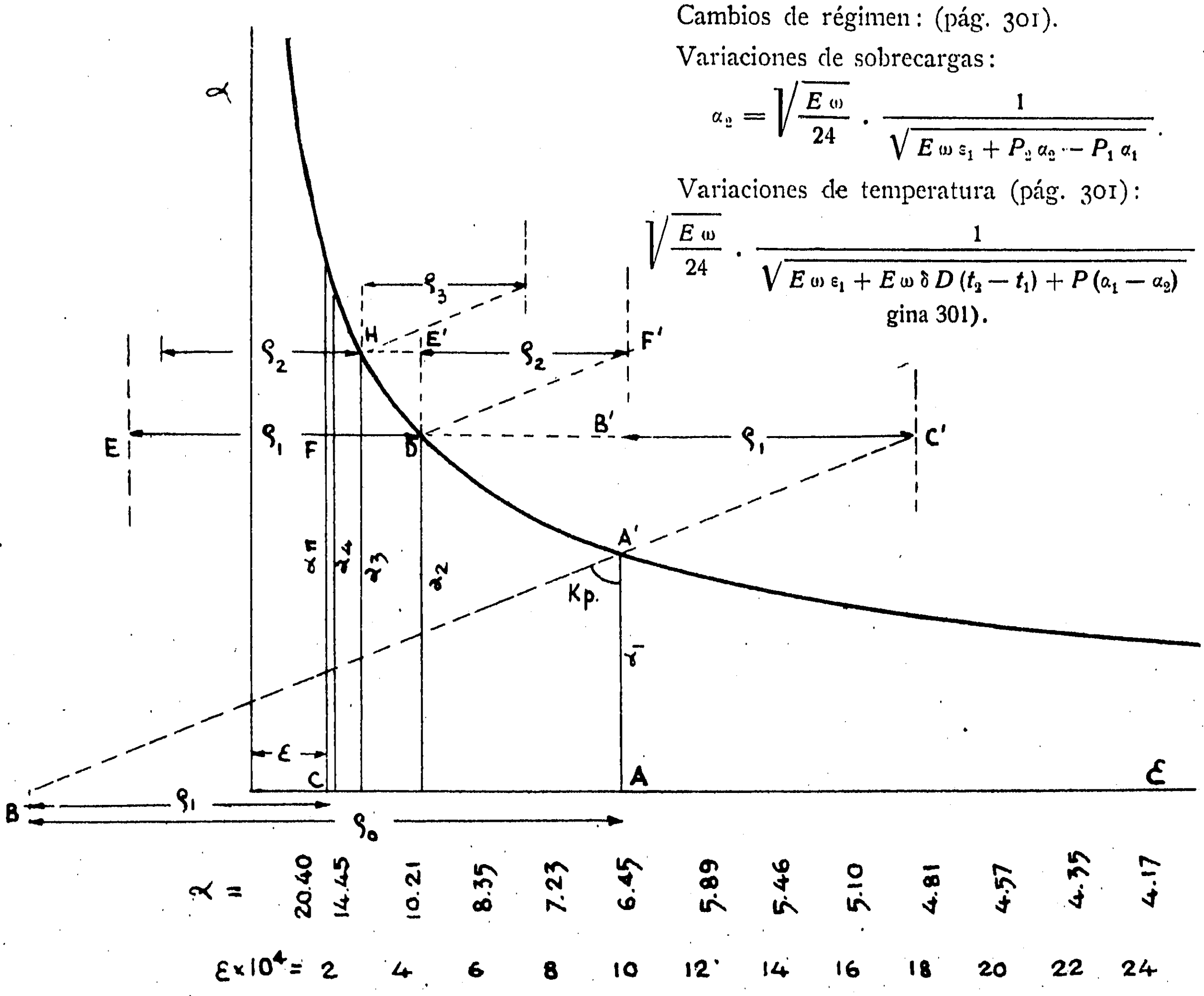

Figura 5.ª

Chuletarium.

a = parámetro = ordenada en el vértice = $\dfrac{\text{tensión}}{\text{peso p. m.}}$

d = desarrollo;

ecuación de la curva:

$$y = a + \frac{x^2}{2a} \qquad \eta = \alpha + \frac{\xi^2}{2\alpha} \text{ (pág. 299)};$$

$$a = L\sqrt{\frac{L}{24\,e}} = \frac{L^2}{8\,f}$$

$$e = d\cos\gamma - L = \frac{L^3}{24\,a^2} = \frac{8\,f^2}{3\,L};$$

$$f = \text{flecha} = \frac{L^2}{8\,a} = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}5\,L\,.\,e} = \sqrt{\frac{3}{8}\,L\,.\,e} \text{ (página 299).}$$

Desarrollo $= d = (L + e)\sec\gamma$.

Cambios de régimen: (pág. 301).

Variaciones de sobrecargas:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{E\,\omega}{24}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{E\,\omega\,\varepsilon_1 + P_2\,\alpha_2 - P_1\,\alpha_1}}.$$

Variaciones de temperatura (pág. 301):

$$\sqrt{\frac{E\,\omega}{24}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{E\,\omega\,\varepsilon_1 + E\,\omega\,\delta\,D\,(t_2 - t_1) + P\,(\alpha_1 - \alpha_2)}} \text{ (página 301).}$$

$E =$ coef. de elasticidad (para el cobre 12.000 Kg./mm.²).

$D =$ coef. de dilatación (para el cobre $= 17 \times \times 10^{-6}$).

P, P_1, $P_2 =$ peso total del hilo en el vano (Kg.).

$t_2 - t_1 =$ diferencia de temperaturas.

$\omega =$ sección; $\alpha = \dfrac{a}{L}$; $\varepsilon = \dfrac{e}{L}$; $\delta = \dfrac{d}{L}$.

APÉNDICE

Φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0000	0001	0002	0003	0004	0006	0008	0011	0014
1	0017	0020	0024	0028	0032	0037	0042	0048	0054	0060
2	0066	0073	0080	0088	0096	0104	0112	0121	0130	0140
3	0150	0160	0171	0181	0193	0205	0217	0230	0242	0256
4	0270	0283	0298	0312	0325	0340	0357	0372	0387	0404
5	0422	0439	0458	0475	0493	0513	0530	0550	0571	0590
6	0611	0631	0653	0674	0697	0718	0742	0766	0788	0813
7	0837	0862	0886	0912	0934	0964	0991	1018	1045	1073
8	1101	1130	1158	1188	1218	1248	1279	1310	1342	1373
9	1406	1438	1472	1505	1539	1574	1608	1643	1680	1715
1,0	1752	1789	1826	1864	1903	1941	1981	2021	2060	2101

Valores de $\dfrac{Sh\,\Phi}{\Phi} = 1 + \dfrac{\Phi^2}{6} + \dfrac{\Phi^4}{120} + \ldots$

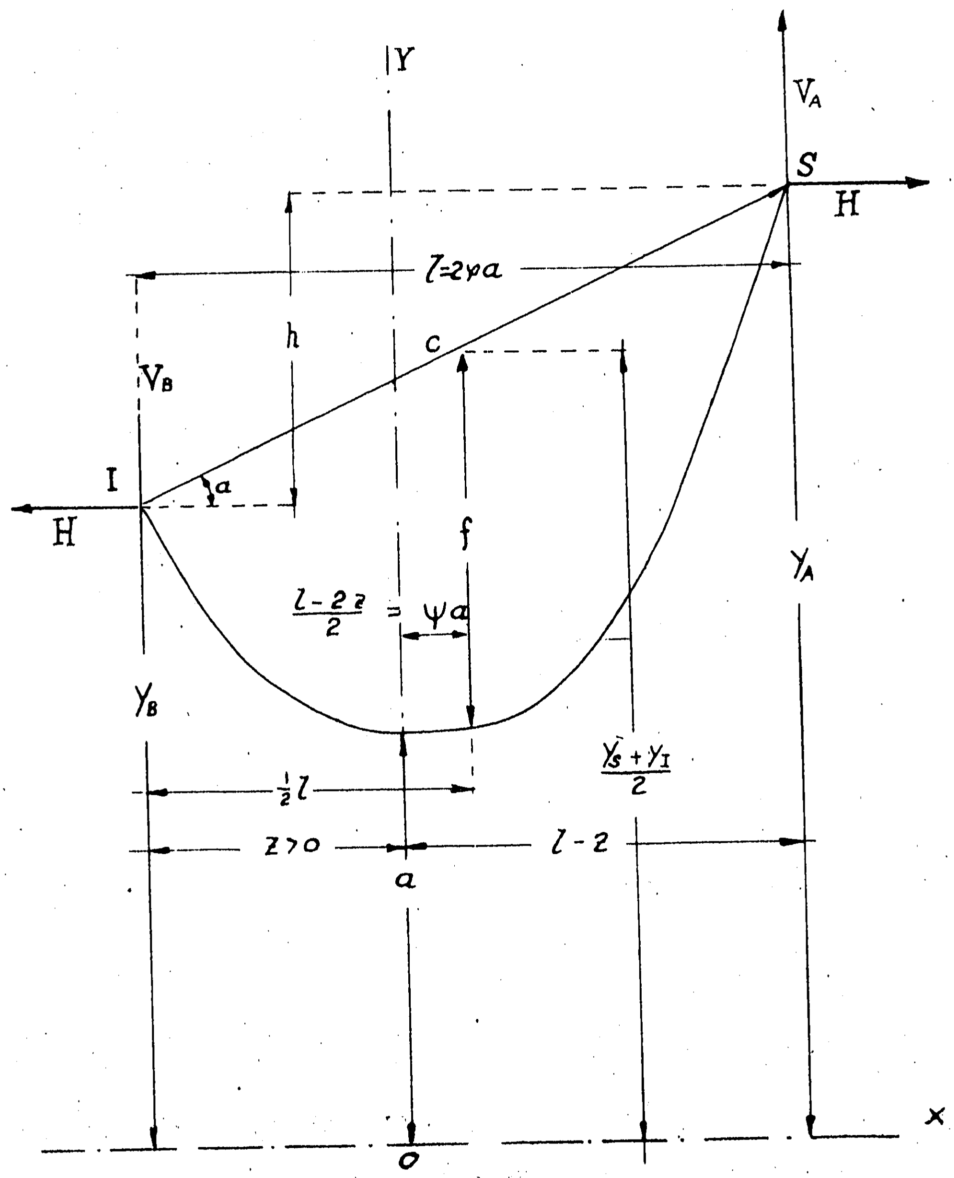

Figura 6.ª